Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/s1journaldemat17liou

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

PARIS. — IMPRIMERIE DE BACHELIER,
rue du Jardinet, n° 12.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

OU

RECUEIL MENSUEL

DE MÉMOIRES SUR LES DIVERSES PARTIES DES MATHÉMATIQUES;

Publié

PAR JOSEPH LIOUVILLE,
Membre de l'Académie des Sciences et du Bureau des Longitudes.

TOME XVII. — ANNÉE 1852.

PARIS,
BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE ET DU BUREAU DES LONGITUDES,
QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

1852

QA
1
J684
t.17

20773
c.

TABLE DES MATIÈRES.

TOME XVII.

Pages.

Solution de quelques questions relatives au mouvement d'un corps solide pesant posé sur un plan horizontal; par M. *V. Puiseux*. 1

Rapport sur un Mémoire de M. Jules Bienaymé, Inspecteur général des Finances, concernant la probabilité des erreurs d'après la méthode des moindres carrés; par M. *J. Liouville*. 31

Sur la probabilité des erreurs d'après la méthode des moindres carrés; par M. *I.-J. Bienaymé*. 33

Distribution de la lumière sur une surface éclairée par plusieurs faisceaux de lumière parallèle; par M. *Philippe Breton*. 79

Thése de Mécanique; par M. *A. Tissot*. 88

Sur les intégrales transcendantes

$$\int \frac{e^{-x^2}dx}{\sqrt{\alpha+\beta x^2}}, \quad \int \frac{e^{-x^2}x^2dx}{\sqrt{\alpha+\beta x^2}}, \quad \int \frac{e^{-x^2}dx}{(\gamma+\delta x^2)\sqrt{\alpha+\beta x^2}};$$

par M. *William Roberts*. 117

Mémoire sur les intégrales communes à plusieurs problèmes de Mécanique; par M. *J. Bertrand*. 121

Note sur l'intégration des équations différentielles; par M. *J. Bertrand*. 175

Sur un déterminant d'intégrales définies; par M. *A. Tissot*. 177

Note sur un théorème de la théorie des nombres; par M. *J.-A. Serret*. 186

Démonstration d'un théorème de M. Sylvester, relatif à la décomposition d'un produit de deux déterminants; par M. *Faà de Bruno*. 190

Démonstration d'un théorème relatif à la réduction des fonctions homogènes à deux lettres à leur forme canonique; par M. *Faà de Bruno*. 193

Solution d'un problème de probabilités; par M. *Roger*. 202

Deux Mémoires sur la théorie dynamique de la chaleur; par M. *William Thomson*. 209

Deuxième Note sur les courbes à double courbure; par M. *Vonzot* 253

Pages.

Thèse de Mécanique. — Sur le développement des Fonctions en Séries ordonnées suivant les Fonctions X_n et Y_n; par M. *Ossian Bonnet* 265

Thèse d'Astronomie. — Sur la Théorie mathématique des Cartes géographiques; par M. *Ossian Bonnet*. 301

Sur la totalité des nombres premiers inférieurs à une limite donnée; par M. *Tchebichef*. 341

Mémoire sur les nombres premiers; par M. *Tchebichef*. 366

Théorème sur le rapport anharmonique; par M. *J. Liouville*. 391

Mémoire sur l'intégration des équations différentielles de la Mécanique; par M. *J. Bertrand*. 393

Sur les courbes à double courbure; par M. *F. Frenet*. 437

Sur les fonctions *gamma* de Legendre; par M. *J. Liouville*. 448

Sur une classe remarquable de séries infinies; par M. *E.-G. Björling*. 454

Extrait d'une Lettre adressée à M. Charles Hermite; par M. *Eisenstein* 473

Note sur la théorie des formules différentielles; par M. *J. Liouville*. 478

ERRATA.

Pages.	Lignes.	
46,	18,	*au lieu de* $\alpha_2 S_{2,h}$ *lisez* $\alpha_2 SK_{2,h}$.
46,	22,	*au lieu de* $\alpha_m^2 K^2_{,h}$, *lisez* $\alpha_m^2 K^2_{m,h}$
47,	14,	*au lieu de* $\alpha_m^2 SK^2_{,h}$, *lisez* $\alpha_m^2 SK^2_{m,h}$.
49,	3,	*au lieu de* a_m, *lisez* α_m.
50,	4 en remontant,	*au lieu de* z_t, *lisez* z_t^2
52,	3 en remontant,	*au lieu de* $h_{t,t}$, *lisez* $h^2_{t,t}$.
54,	7,	*au lieu de* Z_3, *lisez* $Z_3\sqrt{-1}$.
54,	16,	*au lieu de* d_2, *lisez* dt_2.
54,	5 en remontant,	*au lieu de* tome VI, *lisez* tome V.
56,	5,	*après* B_4 et B_6, *ajoutez* ou Z_4, Z_6.
58,	4,	*au lieu de* t_t, *lisez* t_t^2.
59,		dans la première valeur de l'intégrale pour $m=2g-1$, *au lieu de* $\frac{e^{-t^2}}{t}$, *lisez* $\frac{e^{-t^2}}{t}$.
59,		dans la deuxième valeur, *au lieu de* e^{t^2}, *lisez* e^{-t^2}.
62,	5,	*au lieu de* t^2, *lisez* t_m^2.
63,	9 en remontant,	*au lieu de* $\frac{1}{2}$, *lisez* $\frac{1}{2t^2}$.
64,	17,	*au lieu de* $K^2_{,h}$, *lisez* $K^2_{t,h}$.
68,	8,	*au lieu de* $\frac{\sqrt{n}}{6}$, *lisez* $\frac{1}{6}$.
69,	11,	*au lieu de* $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, *lisez* $\frac{1}{4}\sqrt{\pi}$.
445,	8,	*au lieu de* $\cos H \frac{u}{g}$, *lisez* $\cos H = \frac{u}{g}$.

JOURNAL
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

Solution de quelques questions relatives au mouvement d'un corps solide pesant posé sur un plan horizontal;

Par M. V. PUISEUX.

(Présenté à l'Académie des Sciences, le 28 avril 1851.)

Je suppose, dans ce Mémoire, le corps et le plan parfaitement polis, de sorte qu'on puisse faire abstraction du frottement; je néglige également la résistance de l'air. Je considère d'abord un ellipsoïde à trois axes inégaux et même hétérogène, mais tel, cependant, que le centre de gravité se confonde avec le centre de figure, et que les axes principaux d'inertie, relatifs à ce point, coïncident avec les axes géométriques. On sait qu'un pareil corps est en équilibre lorsqu'il repose sur un plan horizontal par un de ses sommets, et que cet équilibre est instable quand ce sommet n'appartient pas au petit axe. Mais si, après avoir écarté très-peu l'ellipsoïde d'une position d'équilibre et imprimé de très-petites vitesses à ses différents points, on lui donne, en outre, une vitesse de rotation finie autour de l'axe qui était d'abord vertical, il pourra se faire que cet axe s'écarte toujours très-peu de la verticale, lors même que la position d'équilibre était instable. Je détermine les conditions qui doivent être remplies pour qu'il en soit ainsi; par exemple, je trouve que le grand axe d'un

ellipsoïde homogène pourra rester toujours sensiblement vertical si la vitesse de rotation autour de cet axe surpasse une limite que j'assigne [*].

Dans les cas où l'un des axes de l'ellipsoïde fait toujours un petit angle avec la verticale, j'intègre par approximation les équations du mouvement, de manière qu'on peut calculer la position approchée du corps à chaque époque donnée.

Je montre ensuite que la même analyse et les mêmes conclusions s'appliquent au mouvement d'un corps de forme quelconque posé sur un plan horizontal, dans le cas où l'un des axes principaux du centre de gravité est normal à la surface du corps et a été écarté de la verticale d'une très-petite quantité.

Enfin, je cherche le mouvement d'un corps pesant absolument quelconque posé sur un plan horizontal lorsque, après l'avoir un peu écarté d'une position d'équilibre, on n'a imprimé que de très-petites vitesses à tous ses points : je ne suppose plus ici qu'on ait donné au corps une vitesse de rotation finie autour de la droite qui, dans la position d'équilibre, passait par le centre de gravité et le point de contact; une telle vitesse ferait acquérir une valeur finie à l'angle compris entre la verticale et la droite dont on vient de parler. J'obtiens les conditions nécessaires pour que cet angle reste très-petit, et je retrouve ainsi les conditions connues de la stabilité d'équilibre : lorsqu'elles sont remplies, j'intègre par approximation les équations du mouvement, et j'en conclus l'existence de deux plans remarquables qui se coupent suivant la normale menée du centre de gravité à la surface du corps. Ces plans, qui, en général, ne sont pas rectangulaires, sont fixes dans le corps et jouissent de la propriété, que les projections sur une verticale des points qui s'y trouvent oscillent comme le fait l'extrémité d'un pendule simple : les oscillations sont

[*] Dans la pratique, où il faut tenir compte du frottement contre le plan et de la résistance de l'air, on peut dire seulement que le grand axe de l'ellipsoïde restera sensiblement vertical, tant que la vitesse de rotation ne sera pas abaissée par les deux causes dont on vient de parler au-dessous de la limite assignée.

synchrones pour les points d'un même plan; mais leur durée n'est pas la même pour les deux plans. Les durées des oscillations, ainsi que la position des plans dans le corps, dépendent seulement de la forme et de la constitution de celui-ci, et nullement des circonstances initiales du mouvement.

Je ferai remarquer à ce propos que lorsqu'un corps pesant posé sur un plan horizontal a été un peu dérangé d'une position d'équilibre stable, il n'est pas exact de dire qu'il s'en écartera toujours très-peu; car, indépendamment du mouvement de translation horizontale que le centre de gravité peut prendre, le corps tournera autour de la verticale menée par ce centre d'un angle dont je donne l'expression, et qui, en général, croîtra indéfiniment avec le temps s'il n'y a pas de frottement. Ce qui reste très-petit, c'est l'angle que fait avec la verticale la normale à la surface menée par le centre de gravité.

I.

Soient OX, OY, OZ trois axes rectangulaires fixes dont le dernier soit vertical : concevons qu'un ellipsoïde pesant repose sur le plan horizontal OXY ; admettons que son centre de gravité G coïncide avec son centre de figure et que ses axes géométriques Gx, Gy, Gz soient en même temps les axes principaux d'inertie du point G. Appelons α, β, γ les longueurs des demi-axes, A, B, C les moments d'inertie correspondants, M la masse de l'ellipsoïde, g la pesanteur. Soient, de plus, à l'époque t, N la résistance du plan fixe. x_1, y_1, z_1 les coordonnées du centre G rapportées aux axes fixes OX, OY, OZ; x, y, z celles du point de contact H rapportées aux axes mobiles Gx, Gy, Gz; p, q, r les vitesses de rotation du corps autour de ces derniers axes: φ et ψ les angles que fait avec OX et Gx la trace horizontale du plan Gxy; θ l'angle de Gz avec la verticale OZ; enfin, désignons comme à l'ordinaire par a, a', a'' les cosinus des angles que Gx fait avec les trois axes fixes, et, de même, par b, b', b'', c, c', c'' les cosinus des angles que Gy et Gz font avec les mêmes axes.

Les principes connus de la Mécanique nous donneront d'abord les

équations :

$$(1)\qquad \frac{d^2x_1}{dt^2} = 0,$$

$$(2)\qquad \frac{d^2y_1}{dt^2} = 0,$$

$$(3)\qquad M\frac{d^2z_1}{dt^2} = N - Mg;$$

$$(4)\qquad A\frac{dp}{dt} + (C - B)qr = N(c''y - b''z),$$

$$(5)\qquad B\frac{dq}{dt} + (A - C)pr = N(a''z - c''x),$$

$$(6)\qquad C\frac{dr}{dt} + (B - A)pq = N(b''x - a''y);$$

$$(7)\qquad p\,dt = \sin\psi\sin\theta\,d\varphi + \cos\psi\,d\theta,$$

$$(8)\qquad q\,dt = \cos\psi\sin\theta\,d\varphi - \sin\psi\,d\theta,$$

$$(9)\qquad r\,dt = d\psi + \cos\theta\,d\varphi.$$

Les coordonnées x, y, z satisfont à l'équation de l'ellipsoïde

$$(10)\qquad \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1:$$

la normale au point de contact doit être verticale, il en résulte

$$(11)\qquad \frac{x}{\alpha^2 a''} = \frac{z}{\gamma^2 c''},$$

$$(12)\qquad \frac{y}{\beta^2 b''} = \frac{z}{\gamma^2 c''}.$$

De plus, ce même point de contact est dans le plan horizontal OXY, on a donc

$$(13)\qquad z_1 + a''x + b''y + c''z = 0.$$

En joignant à ces treize équations les trois relations connues

$$a'' = \sin\psi\sin\theta,\quad b'' = \cos\psi\sin\theta,\quad c'' = \cos\theta.$$

on aura seize équations pour déterminer en fonction de t les seize

variables

$$x_1,\ y_1,\ z_1,\ p,\ q,\ r,\ \varphi,\ \psi,\ \theta,\ a'',\ b'',\ c'',\ x,\ y,\ z,\ \mathrm{N}.$$

Admettons à présent que l'axe Gz de l'ellipsoïde reste à peu près vertical pendant tout le mouvement; l'angle θ sera, ainsi que sa dérivée $\frac{d\theta}{dt}$, une quantité très-petite que nous regarderons comme du premier ordre et dont nous négligerons le carré : nous aurons alors

$$a'' = \theta \sin\psi, \quad b'' = \theta\cos\psi, \quad c'' = 1,$$

d'où

$$\theta = \sqrt{a''^2 + b''^2}, \quad \sin\psi = \frac{a''}{\sqrt{a''^2+b''^2}}, \quad \cos\psi = \frac{b''}{\sqrt{a''^2+b''^2}},$$

$$d\theta = \frac{a''\,da'' + b''\,db''}{\sqrt{a''^2+b''^2}}, \quad d\psi = \frac{b''\,da'' - a''\,db''}{a''^2+b''^2}.$$

Les équations (11) et (12) nous donneront

$$x = \frac{\alpha^2 a'' z}{\gamma^2}, \quad y = \frac{\beta^2 b'' z}{\gamma^2},$$

par où l'on voit que x et y sont du premier ordre; négligeant leurs carrés, on tirera de l'équation (10)

$$z = -\gamma,$$

et, par conséquent,

$$x = -\frac{\alpha^2 a''}{\gamma}, \quad y = -\frac{\beta^2 b''}{\gamma};$$

puis, on conclura de l'équation (13),

$$z_1 = +\gamma,$$

Ainsi l'ordonnée du centre de gravité reste sensiblement constante; il résulte d'ailleurs des équations (1) et (2) que la projection horizontale de ce point se transporte d'un mouvement rectiligne et uniforme.

Les équations (7) et (8) nous montrent que p et q sont des quantités du premier ordre, et qu'ainsi le produit pq est du second ordre: l'expression

$$b''x - a''y = \frac{(\beta^2 - \alpha^2)a''b''}{\gamma}$$

est également du second ordre ; d'ailleurs, l'équation (3) se réduit à

$$N = Mg;$$

on conclut donc de l'équation (6),

$$\frac{dr}{dt} = 0.$$

c'est-à-dire que la vitesse de rotation r autour de l'axe Gz est sensiblement constante pendant tout le mouvement.

De l'équation (9) on tire

$$\frac{d\varphi}{dt} = r - \frac{d\psi}{dt};$$

portant cette valeur dans les équations (7) et (8), on trouvera

$$p = a''\left(r - \frac{d\psi}{dt}\right) + \cos\psi\,\frac{d\theta}{dt} = ra'' - \frac{db}{dt},$$

$$q = b''\left(r - \frac{d\psi}{dt}\right) - \sin\psi\,\frac{d\theta}{dt} = rb' - \frac{da''}{dt};$$

enfin, en substituant ces valeurs ainsi que celles de x, y, z, N, dans les équations (4) et (5), on obtiendra les deux équations différentielles du second ordre,

$$(14)\quad \begin{cases} A\dfrac{d^2b''}{dt^2} + D\dfrac{da'}{dt} + Eb'' = 0, \\[2ex] B\dfrac{d^2a'}{dt^2} - D\dfrac{db''}{dt} + Fa'' = 0, \end{cases}$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$D = (A + B - C)\,r,$$

$$E = (C - B)\,r^2 + \frac{Mg(\beta^2 - \gamma^2)}{\gamma},$$

$$F = (C - A)\,r^2 + \frac{Mg(\alpha^2 - \gamma^2)}{\gamma}.$$

Pour les intégrer, nous poserons

$$a'' = h\sin(\omega t + \varepsilon), \quad b'' = k\cos(\omega t + \varepsilon),$$

h, k, ω, ε désignant des constantes ; la substitution de ces valeurs

nous donnera

$$-Ak\omega^2 + Dh\omega + Ek = 0,$$
$$-Bh\omega^2 + Dk\omega + Fh = 0,$$

d'où

$$\frac{k}{h} = \frac{D\omega}{A\omega^2 - E} = \frac{B\omega^2 - F}{D\omega}.$$

On voit que ω doit être une des racines de l'équation bicarrée

$$(15) \qquad (A\omega^2 - E)(B\omega^2 - F) - D^2\omega^2 = 0;$$

appelons ω' et ω'' deux racines qui ne soient pas égales et de signes contraires, et désignons par λ' et λ'' les valeurs correspondantes du rapport $\frac{k}{h}$: les intégrales complètes des équations (14) seront

$$(16) \qquad \begin{cases} a'' = h' \sin(\omega' t + \varepsilon') + h'' \sin(\omega'' t + \varepsilon''), \\ b'' = \lambda' h' \cos(\omega' t + \varepsilon') + \lambda'' h'' \cos(\omega'' t + \varepsilon''). \end{cases}$$

où h', h'', ε', ε'' sont quatre constantes arbitraires. Les valeurs de a'' et de b'' étant connues en fonction de t, on en conclura celles de θ et de ψ par les formules

$$\theta \sin\psi = a'', \quad \theta\cos\psi = b'';$$

puis, l'angle φ se trouvera en intégrant l'équation

$$\frac{d\varphi}{dt} = r - \frac{d\psi}{dt},$$

ce qui donne

$$\varphi = rt - \psi + \text{constante}.$$

Les angles φ, ψ, θ déterminent à chaque instant la position de l'ellipsoïde autour de son centre de gravité; quant à ce centre lui-même, on aura ses coordonnées par les formules

$$z_1 = \zeta, \quad x_1 = \xi t + \xi_1, \quad y = \eta t + \eta_1,$$

où ξ, ξ_1, η, η_1 désignent des constantes arbitraires.

Observons que les constantes h', h'', ε', ε'' peuvent s'exprimer au moyen de la quantité r et des valeurs initiales θ_0, ψ_0, p_0, q_0 des va-

riables θ, ψ, p, q : en effet, les valeurs initiales de a'' et de b'' sont $\theta_0 \sin\psi_0$, $\theta_0 \cos\psi_0$, et les équations déjà obtenues

$$\frac{da''}{dt} = rb'' - q, \quad \frac{db''}{dt} = p - ra'',$$

montrent que les valeurs initiales de $\frac{da''}{dt}$, $\frac{db'}{dt}$ sont respectivement

$$r\theta_0 \cos\psi_0 - q_0, \quad p_0 - r\theta_0 \sin\psi_0.$$

On aura donc, en faisant $t = 0$ dans les équations (16) et dans leurs dérivées,

$$h' \sin\varepsilon' + h'' \sin\varepsilon'' = \theta_0 \sin\psi_0,$$
$$\lambda' h' \cos\varepsilon' + \lambda'' h'' \cos\varepsilon'' = \theta_0 \cos\psi_0,$$
$$\omega' h' \cos\varepsilon' + \omega'' h'' \cos\varepsilon'' = r\theta_0 \cos\psi_0 - q_0,$$
$$\omega'\lambda' h' \sin\varepsilon' + \omega''\lambda'' h'' \sin\varepsilon'' = r\theta_0 \sin\psi_0 - p_0,$$

équations d'où l'on pourra tirer h', h'', ε', ε''. On voit par ces formules que quand même r serait très-grand, on pourra toujours prendre θ_0, p_0 et q_0 assez petits pour que les constantes h' et h'' soient elles-mêmes aussi petites qu'on le voudra. Alors, si les racines ω' et ω'' sont réelles, a'' et b'' resteront toujours très-petits, et, par conséquent, l'angle $\theta = \sqrt{a''^2 + b''^2}$ sera lui-même toujours très-petit : mais si les racines ω' et ω'' étaient imaginaires ou au moins l'une d'elles, a'' et b'', et, par suite, θ ne pourraient pas rester toujours très-petits.

C'est le premier cas que nous devons supposer, savoir celui de la réalité des racines ω', ω'', puisque nous avons admis que l'axe Gz de l'ellipsoïde faisait toujours un très-petit angle avec la verticale : alors les formules précédentes, qui nous donnent en fonction de t les six quantités φ, ψ, θ, x_1, y_1, z_1, feront connaître à chaque instant la situation du corps. On peut se demander aussi la position du point de contact H, soit sur l'ellipsoïde, soit relativement aux axes fixes : les coordonnées de ce point par rapport aux axes principaux seront

$$x = -\frac{\alpha^2}{\gamma}[h' \sin(\omega' t + \varepsilon') + h'' \sin(\omega'' t + \varepsilon'')],$$

$$y = -\frac{\beta^2}{\gamma}[\lambda' h' \cos(\omega' t + \varepsilon') + \lambda'' h' \cos(\omega'' t + \varepsilon'')].$$

La courbe décrite par ce point sur l'ellipsoïde autour de l'extrémité A de l'axe Gz s'en écartera tres-peu et pourra être regardée comme située dans le plan tangent en A : son équation résultera de l'élimination de t entre les deux équations précédentes, et l'angle que le rayon vecteur AH fait avec le plan Gxz aura pour tangente

$$\frac{y}{x} = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \cdot \frac{\lambda' h' \cos(\omega' t + \varepsilon') + \lambda'' h'' \cos(\omega'' t + \varepsilon'')}{h' \sin(\omega' t + \varepsilon') + h'' \sin(\omega'' t + \varepsilon'')}.$$

Cette expression est semblable à celle qui donne la tangente de la longitude géocentrique d'une planète : le rayon vecteur AH pourra donc ne pas tourner toujours dans le même sens par rapport aux axes principaux de l'ellipsoïde, et alors le mouvement du point de contact, vu du sommet A par un observateur qui croirait le corps immobile, offrira des stations et des rétrogradations analogues à celles que nous observons dans le mouvement des planètes.

Quant aux coordonnées X et Y du même point H, relativement aux axes fixes OX, OY, elles seront données par les formules

$$\begin{aligned} X = x_1 + ax + by + cz &= x_1 + x\cos(\varphi + \psi) \\ &\quad - y\sin(\varphi + \psi) - \gamma\theta\sin\varphi, \\ Y = y_1 + a'x + b'y + c'z &= y_1 + x\sin(\varphi + \psi) \\ &\quad + y\cos(\varphi + \psi) + \gamma\theta\cos\varphi, \end{aligned}$$

ou x, y, x_1, y_1, θ, φ, ψ sont des fonctions connues du temps.

Il nous faut examiner maintenant quelles conditions doivent remplir la constitution de l'ellipsoïde et la vitesse de rotation r pour que l'axe Gz puisse rester à peu pres vertical, c'est-a-dire pour que les racines de l'équation (15) soient réelles. Ces conditions sont exprimées par les trois inégalités

$$AF + BE + D^2{}^2 - 4ABEF > 0, \quad EF > 0, \quad AF + BE + D^2 > 0,$$

dont la première doit avoir lieu pour que les valeurs de ω^2 soient réelles, la seconde pour qu'elles soient de même signe, la troisieme pour qu'elles soient positives : en y remplaçant D, E, F par leurs va-

leurs, on pourra les mettre sous la forme

$$C^2(A+B-C)^2 r^4$$

$$-\frac{2Mg}{\gamma}(A-B-C)[A(2B-C)(\alpha^2-\gamma^2)+B(2A-C)(\beta^2-\gamma^2)]r^2$$

$$+\frac{M^2g^2}{\gamma^2}[A(\alpha^2-\gamma^2)-B(\beta^2-\gamma^2)]^2>0,$$

$$(C-A)(C-B)r^4+\frac{Mg}{\gamma}[(C-B)(\alpha^2-\gamma^2)+(C-A)(\beta^2-\gamma^2)]r^2$$

$$+\frac{M^2g^2}{\gamma}(\alpha^2-\gamma^2)(\beta^2-\gamma^2)>0,$$

$$[(C-A)(C-B)+AB]r^2+\frac{Mg}{\gamma}[A(\alpha^2-\gamma^2)+B(\beta^2-\gamma^2)]>0.$$

Supposons que l'axe Gz de l'ellipsoïde, qui est sensiblement vertical au commencement du mouvement, soit l'axe du plus grand ou du plus petit moment d'inertie : cette propriété peut appartenir même à l'axe moyen, lorsque l'ellipsoïde est hétérogène [*]. Alors, les différences $C-A$, $C-B$ étant de même signe, on pourra toujours donner à r une valeur telle que, pour cette valeur et pour toute valeur plus grande, les inégalités précédentes soient satisfaites. Ainsi, dans ce cas, si la vitesse de rotation autour de l'axe Gz est supérieure à une certaine limite qui ne dépend pas des circonstances initiales, il suffira de donner aux variables p, q, δ des valeurs initiales assez petites, et alors cet axe restera toujours à peu près vertical.

Supposons, en second lieu, que l'axe Gz soit le petit axe de l'ellipsoïde et en même temps corresponde au plus grand moment d'inertie (l'une de ces choses est une conséquence de l'autre, quand l'ellipsoïde est homogène). Les différences $\alpha^2-\gamma^2$, $\beta^2-\gamma^2$, $C-A$, $C-B$ sont alors positives, et il en est de même, par conséquent, des quantités E et F. On a donc bien, quelle que soit r,

$$EF>0,\quad AF+BE+D^2>0,$$

[*] Cela arriverait, par exemple, si la densité du corps était beaucoup plus grande dans le voisinage de l'axe moyen que partout ailleurs, ou bien si près du plan des axes extrêmes elle était beaucoup plus grande que dans le reste de l'ellipsoïde.

et la première inégalité

$$(AF + BE + D^2)^2 - 4ABEF > 0$$

est aussi satisfaite, comme on le voit, en l'écrivant

$$(AF - BE)^2 + 2D^2(AF + BE) + D^4 > 0.$$

Ainsi, dans notre hypothèse, le petit axe restera toujours sensiblement vertical, quelle que soit la vitesse de rotation r, pourvu que les valeurs initiales de p, q, θ soient assez petites.

Généralement, quelles que soient les longueurs des axes et les valeurs des moments d'inertie, on saura de nos trois inégalités déduire des limites supérieures ou inférieures de r. Si ces limites sont incompatibles, l'axe Gz ne pourra pas rester sensiblement vertical; si, au contraire, il existe des valeurs de r qui remplissent les conditions ainsi trouvées, alors, pour ces valeurs de r et pour des valeurs initiales de p, q, θ suffisamment petites, l'axe Gz fera toujours un très-petit angle avec la verticale.

Considérons, en particulier, le cas où la vitesse de rotation r est nulle ou très-petite : alors la première inégalité sera satisfaite, et les deux autres deviendront

$$(\alpha^2 - \gamma^2)(\beta^2 - \gamma^2) > 0, \quad A(\alpha^2 - \gamma^2) + B(\beta^2 - \gamma^2) > 0,$$

d'où il suit nécessairement

$$\alpha > \gamma, \quad \beta > \gamma.$$

Ainsi, pour que l'axe Gz puisse rester toujours à peu près vertical lorsque tous les points du corps n'ont reçu que de très-petites vitesses, il faut que cet axe soit le plus petit. On retrouve ainsi la condition connue de la stabilité de l'équilibre d'un ellipsoïde [*].

Ne supposons plus r très-petite, et considérons encore spécialement

[*] L'hypothèse de r très-petite finissant toujours par se vérifier dans les expériences à cause du frottement contre le plan et de la résistance de l'air, on voit qu'en réalité le petit axe de l'ellipsoïde est le seul qui puisse conserver toujours une direction sensiblement verticale.

le cas d'un ellipsoïde homogène. Les moments principaux d'inertie sont alors

$$A = \frac{M}{5}(\beta^2 + \gamma^2), \quad B = \frac{M}{5}(\alpha^2 + \gamma^2), \quad C = \frac{M}{5}(\alpha^2 + \beta^2);$$

par suite, nos trois inégalités deviennent

$$(\alpha^2 + \beta^2)^2 \left(\frac{\gamma r}{5g}\right)^2 + 2(\alpha^4 + \beta^4 - 2\gamma^4)\frac{\gamma r^2}{5g} + (\alpha^2 - \beta^2)^2 > 0,$$

$$(\alpha^2 - \gamma^2)(\beta^2 - \gamma^2) > 0,$$

$$\frac{\gamma r}{5g} > \frac{\gamma - \alpha^2\beta^2}{\gamma + \alpha^2\beta^2}.$$

Comme on l'a déjà remarqué, elles sont satisfaites, quelle que soit r, lorsque 2γ est le petit axe de l'ellipsoïde. Si l'axe Gz ou 2γ était l'axe moyen, la seconde inégalité n'aurait pas lieu : ainsi, quelle que soit r, l'axe moyen d'un ellipsoïde homogène ne peut pas rester toujours sensiblement vertical. Enfin, si Gz est le grand axe, la seconde égalité sera vérifiée; de plus, il faudra que $\frac{\gamma r^2}{5g}$ surpasse la quantité positive $\frac{\gamma - \alpha^2\beta^2}{\gamma + \alpha^2\beta^2}$ et ne soit pas compris entre les deux racines de l'équation

$$(\alpha^2 - \beta^2)^2 u^2 + 2(\alpha^4 + \beta^4 - 2\gamma^4)u + (\alpha^2 - \beta^2)^2 = 0,$$

racines qui sont positives et ont pour valeurs

$$\left(\frac{\sqrt{\gamma - \alpha^2} + \sqrt{\gamma - \beta^2}}{\alpha^2 + \beta^2}\right)^2, \quad \left(\frac{\sqrt{\gamma - \alpha^2} - \sqrt{\gamma - \beta^2}}{\alpha^2 + \beta^2}\right)^2.$$

Mais, si dans le premier membre de l'équation précédente on met à la place de u la quantité $\frac{\gamma - \alpha^2\beta^2}{\gamma + \alpha^2\beta^2}$, le résultat de la substitution, savoir

$$-\frac{4\gamma(\gamma - \alpha^2)(\gamma - \beta^2)}{\gamma + \alpha^2\beta^2},$$

sera négatif; on en conclut que $\frac{\gamma - \alpha^2\beta^2}{\gamma + \alpha^2\beta^2}$ tombe entre les racines de cette équation. Pour que les trois inégalités soient satisfaites, il faut donc et il suffit que $\frac{\gamma r^2}{5g}$ surpasse la plus grande racine de l'équation

en u, c'est-à-dire qu'on ait

$$\frac{\gamma r^2}{5g} > \left(\frac{\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}+\sqrt{\gamma^2-\beta^2}}{\alpha^2+\beta^2}\right)^2,$$

ou bien

$$r > \sqrt{\frac{5g}{\gamma}}\cdot\frac{\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}+\sqrt{\gamma^2-\beta^2}}{\alpha^2+\beta^2}.$$

Telle est la condition que doit remplir la vitesse de rotation r pour que le grand axe d'un ellipsoïde homogène puisse rester toujours à peu près vertical. On voit que, si les dimensions du corps croissent proportionnellement dans le rapport de 1 à n, la limite inférieure de r diminuera dans le rapport de 1 à $\sqrt{n}$.

Afin de donner une application numérique, considérons un ellipsoïde de révolution homogène; supposons que le rayon de l'équateur ayant 1 décimètre de long, l'axe de révolution soit de 4 décimètres; pour que cet axe puisse rester sensiblement vertical, il suffira qu'on ait imprimé au corps une vitesse de rotation d'au moins dix tours par seconde.

II.

La méthode que nous venons de suivre pour déterminer le mouvement d'un ellipsoïde qui s'écarte peu d'une position d'équilibre, peut servir à résoudre le même problème pour un solide de forme quelconque, homogène ou hétérogène, mais tel, qu'un des axes principaux d'inertie pour le centre de gravité soit normal à la surface du corps. Lorsque cet axe est vertical, le solide posé sur un plan horizontal est en équilibre; supposons qu'on l'ait très-peu écarté de sa position d'équilibre, qu'on ait imprimé à tous ses points des vitesses très-petites, et, de plus, qu'on lui ait donné une vitesse de rotation quelconque autour de l'axe dont il s'agit. Nous nous proposons de savoir si cet axe restera toujours à peu près vertical, et de trouver le mouvement du corps lorsque cette circonstance aura lieu.

Soient Gx, Gy, Gz les trois axes principaux d'inertie relativement au centre de gravité, Gz étant celui qui reste sensiblement vertical : nommons γ la portion GA du prolongement de cet axe comprise entre

le centre de gravité et la surface du corps, de sorte que A désigne le point de cette surface qui sert de point de contact dans la position d'équilibre. Nous aurons toujours les équations (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8), (9) et (13), en conservant aux lettres qui s'y trouvent les significations que nous leur avons données dans le cas de l'ellipsoïde.

Si l'on rapporte la surface du corps aux trois axes Gx, Gy, Gz, les coordonnées x et y seront très-petites dans le voisinage du point A, et en nommant l, m, n les valeurs des dérivées partielles $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx\,dy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$ pour ce point, on aura sensiblement dans les environs,

$$z = -\eta - \frac{1}{2}(lx^2 + 2mxy + ny^2).$$

Regardons maintenant x, y, z comme les coordonnées du point de contact à l'époque t; la condition que la normale en ce point soit verticale nous donnera

$$\frac{lx + my}{a'} = \frac{mx + ny}{b'} = -\frac{1}{c'},$$

ou bien, en négligeant le carré de θ,

$$lx + my = -a', \quad mx + ny = -b'.$$

d'où

$$x = \frac{mb' - na'}{ln - m^2}, \quad y = \frac{ma' - lb'}{ln - m^2}.$$

On voit que θ étant regardé comme une quantité très-petite du premier ordre, x et y sont du même ordre, de sorte qu'en négligeant les quantités du second ordre, on a

$$z = -\eta.$$

Alors l'équation (13) nous donne

$$z_1 = \eta,$$

d'où l'on conclut, comme ci-dessus,

$$B = M\theta.$$

D'ailleurs les équations (7) et (8) nous montrent que p et q sont du

premier ordre. Les équations (4), (5) et (6) se réduisent donc aux suivantes :

$$A\frac{dp}{dt} + (C - B)rq = Mg\left(\gamma b'' + \frac{ma'' - lb''}{ln - m^2}\right).$$

$$B\frac{dq}{dt} + (A - C)rp = -Mg\left(\gamma a'' + \frac{mb'' - na''}{ln - m^2}\right).$$

$$\frac{dr}{dt} = 0.$$

La troisième nous apprend que r est une constante ; quant aux deux autres, en y remplaçant p en q par leurs valeurs trouvées plus haut,

$$ra'' + \frac{db''}{dt}, \quad rb'' - \frac{da''}{dt},$$

on les mettra sous la forme

$$A\frac{d^2 b''}{dt^2} + D\frac{da''}{dt} + Eb'' - Ga'' = 0,$$

$$B\frac{d^2 a''}{dt^2} - D\frac{db''}{dt} + Fa'' - Gb'' = 0.$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$D = (A + B - C)r,$$

$$G = \frac{Mgm}{ln - m^2},$$

$$E = (C - B)r^2 + Mg\left(\frac{l}{ln - m^2} - \gamma\right).$$

$$F = (C - A)r^2 + Mg\left(\frac{n}{ln - m^2} - \gamma\right).$$

Observons qu'on peut dans ces coefficients introduire, au lieu des quantités l, m, n, les rayons de courbure principaux de la surface du corps au point A : en effet, soient ρ et ρ' ces deux rayons et δ l'angle compris entre le plan Gxz et le plan de la section normale dont ρ est le rayon de courbure; on trouve sans peine

$$l = \frac{1}{\rho}\cos^2\delta + \frac{1}{\rho'}\sin^2\delta,$$

$$m = \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'}\right)\sin\delta\cos\delta,$$

$$n = \frac{1}{\rho}\sin^2\delta + \frac{1}{\rho'}\cos^2\delta,$$

d'où

$$\frac{l}{ln - m^2} = \rho \sin^2 \delta + \rho' \cos^2 \delta,$$

$$\frac{m}{ln - m^2} = (\rho' - \rho) \sin \delta \cos \delta,$$

$$\frac{n}{ln - m^2} = \rho \cos^2 \delta + \rho' \sin^2 \delta.$$

Il en résulte

$$E = (C - B) r^2 + Mg [(\rho - \gamma) \sin^2 \delta + (\rho' - \gamma) \cos^2 \delta].$$

$$F = (C - A) r^2 + Mg [(\rho - \gamma) \cos^2 \delta + (\rho' - \gamma) \sin^2 \delta].$$

$$G = Mg (\rho' - \rho) \sin \delta \cos \delta.$$

Pour intégrer les équations différentielles que nous venons d'obtenir, nous poserons

$$a'' = h \sin(\omega t) - h' \cos(\omega t), \quad b'' = k \sin(\omega t) + k' \cos(\omega t),$$

h, h', k, k', ω désignant des constantes : la substitution de ces valeurs nous donnera les quatre équations

$$(A\omega^2 - E) k + G h = - D\omega h',$$

$$(A\omega^2 - E) k' + G h' = D\omega h,$$

$$(B\omega^2 - F) h + G k = D\omega k',$$

$$(B\omega^2 - F) h' + G k' = - D\omega k.$$

De la première et de la troisième on tire

$$h' = - \frac{(A\omega^2 - E) k + G h}{D\omega}, \quad k' = \frac{(B\omega^2 - F) h + G k}{D\omega}.$$

en portant ces valeurs dans les deux autres, on arrivera à une seule et même équation, savoir

$$(A\omega^2 - E)(B\omega^2 - F) - D^2\omega^2 - G^2 = 0,$$

ou bien

$$AB\omega^4 - (AF + BE + D^2)\omega^2 + EF - G^2 = 0.$$

Appelons ω_1 et ω_2 deux racines de cette équation qui ne soient pas égales et de signes contraires, les intégrales complètes de nos deux

équations différentielles seront

$$a'' = h_1 \sin(\omega_1 t) + h'_1 \cos(\omega_1 t) + h_2 \sin(\omega_2 t) + h'_2 \cos(\omega_2 t),$$
$$b'' = k_1 \sin(\omega_1 t) + k'_1 \cos(\omega_1 t) + k_2 \sin(\omega_2 t) + k'_2 \cos(\omega_2 t),$$

où h_1, h_2, k_1, k_2 sont quatre constantes arbitraires, tandis que h'_1, h'_2, k'_1, k'_2 sont données par les formules

$$h'_1 = -\frac{(A\omega^2 - E)k_1 + Gh_1}{D\omega}, \quad k'_1 = \frac{(B\omega^2 - F)h_1 + Gk_1}{D\omega},$$
$$h'_2 = -\frac{(A\omega^2 - E)k_2 + Gh_2}{D\omega}, \quad h'_2 = \frac{(B\omega^2 - F)h_2 + Gk_2}{D\omega}.$$

Ce que nous avons dit dans le cas de l'ellipsoïde de la recherche des autres variables et de la détermination des constantes arbitraires à l'aide des données initiales, s'étend sans difficulté au problème qui nous occupe ici.

Mais, pour que l'angle θ puisse rester toujours très-petit, comme nous l'avons supposé, il faut que les racines ω_1 et ω_2 soient réelles : les conditions nécessaires et suffisantes pour cela sont exprimées par les trois inégalités

$$(AF + BE + D^2)^2 - 4AB(EF - G^2) > 0,$$
$$EF - G^2 > 0,$$
$$AF + BE + D^2 > 0.$$

En ordonnant par rapport à r les premiers membres de ces inégalités, on les mettra sous la forme

$$C^2(A + B - C)^2 r^4 + Hr^2 + I > 0,$$
$$(C - A)(C - B)r^4 + H'r^2 + I' > 0,$$
$$[(C - A)(C - B) + AB]r^2 + K > 0,$$

H, I, H', I', C désignant des quantités indépendantes de r. On voit, comme dans le cas de l'ellipsoïde, que si l'axe Gz est l'axe du plus grand ou du plus petit moment d'inertie, les conditions précédentes seront satisfaites dès que r surpassera une certaine limite. Ainsi, cet axe restera toujours sensiblement vertical, si la vitesse de rotation r

est suffisamment grande, pourvu qu'en même temps les valeurs initiales des variables θ, p, q soient assez petites.

Considérons, en particulier, le cas où la vitesse de rotation r est nulle ou très-petite : les inégalités à vérifier pour que l'axe Gz puisse rester toujours à peu près vertical, se réduiront à

$$I > 0, \quad I' > 0, \quad K > 0,$$

ou bien

$$[(A\cos^2\delta + B\sin^2\delta)(\rho - \gamma) - (A\sin^2\delta + B\cos^2\delta)(\rho' - \gamma)]^2$$
$$- 2(A - B)^2(\rho - \gamma)(\rho' - \gamma)\sin^2\delta\cos^2\delta > 0,$$

$$(\rho - \gamma)(\rho' - \gamma) > 0,$$

$$(A\cos^2\delta + B\sin^2\delta)(\rho - \gamma) - (A\sin^2\delta + B\cos^2\delta)(\rho' - \gamma) > 0.$$

On conclut des deux dernières que γ doit être moindre à la fois que ρ et que ρ', et alors la première se trouve satisfaite. Par conséquent, lorsque les points du corps écarté de sa position d'équilibre n'auront reçu que des vitesses très-petites, l'axe Gz pourra rester sensiblement vertical, si la distance GA du centre de gravité à la surface du corps est moindre que les deux rayons de courbure principaux de cette surface au point A. On retrouve ainsi une proposition connue : mais pour une valeur finie de r, quelle qu'elle soit, on saura toujours, connaissant la constitution du corps, décider par l'analyse précédente si l'axe Gz peut ou non rester toujours très-voisin de la verticale : il suffira d'examiner si nos trois inégalités sont ou ne sont pas vérifiées.

III.

Considérons maintenant un corps pesant de forme quelconque ; par le centre de gravité G menons une normale à sa surface qui la perce en A ; ce corps est en équilibre lorsqu'il repose sur un plan horizontal par le point A. Concevons qu'on l'écarte un peu de cette position d'équilibre et qu'on imprime de très-petites vitesses à tous ses points ; nous nous proposons de déterminer le mouvement qui a lieu dans le cas où la droite GA reste toujours à peu près verticale.

Soient toujours OX, OY, OZ trois axes rectangulaires fixes dont les

deux premiers sont dans le plan horizontal fixe, et Gx, Gy, Gz les axes principaux d'inertie pour le centre de gravité. Conservons aux lettres x_1, y_1, z_1, φ, ψ, θ, p, q, r, a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'', N, M, g la signification que nous leur avons donnée jusqu'à présent, et nommons toujours γ la distance GA qui n'est plus dirigée suivant Gz. Imaginons, en outre, trois nouveaux axes rectangulaires emportés avec le corps, ayant leur origine en A et dont l'un $A\zeta$ est dirigé suivant la normale AG, tandis que les deux autres $A\xi$, $A\eta$ sont tangents aux sections normales principales en A. Désignons par θ_1 l'angle que fait Gz avec $A\zeta$ et par φ_1 et ψ_1 les angles que fait avec $A\xi$ et Gx l'intersection des plans $A\xi\eta$, Gxy : ces angles seront des constantes qui dépendront de la forme et de la constitution du corps. Nommons a_1, a'_1, a''_1 les cosinus des angles que Gx fait avec $A\xi$, $A\eta$, $A\zeta$, et pareillement b_1, b'_1, b''_1, c_1, c'_1, c''_1 les cosinus analogues pour Gy et Gz. On aura les équations

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned}
a_1 &= \cos\varphi_1 \cos\psi_1 - \sin\varphi_1 \sin\psi_1 \cos\theta_1,\\
a'_1 &= \sin\varphi_1 \cos\psi_1 + \cos\varphi_1 \sin\psi_1 \cos\theta_1,\\
a''_1 &= \sin\psi_1 \sin\theta_1;\\
b_1 &= -\cos\varphi_1 \sin\psi_1 - \sin\varphi_1 \cos\psi_1 \cos\theta_1,\\
b'_1 &= -\sin\varphi_1 \sin\psi_1 + \cos\varphi_1 \cos\psi_1 \cos\theta_1,\\
b''_1 &= \cos\psi_1 \sin\theta_1;\\
c_1 &= \sin\varphi_1 \sin\theta_1,\\
c'_1 &= -\cos\varphi_1 \sin\theta_1,\\
c''_1 &= \cos\theta_1;
\end{aligned}\right.$$

et aussi les relations connues

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned}
&b'_1 c''_1 - c'_1 b''_1 = a_1, \quad c'_1 a''_1 - a'_1 c''_1 = b_1, \quad a'_1 b''_1 - b'_1 a'_1 = c_1,\\
&c_1 b'_1 - b_1 c''_1 = a'_1, \quad a_1 c''_1 - c_1 a''_1 = b'_1, \quad b_1 a'_1 - a_1 b''_1 = c'_1,\\
&b_1 c'_1 - c_1 b'_1 = a''_1, \quad c_1 a'_1 - a_1 c'_1 = b''_1, \quad a_1 b'_1 - b_1 a'_1 = c''_1.
\end{aligned}\right.$$

Pour les points de la surface voisins du point A, on aura approximativement

$$\zeta - \frac{\xi^2}{2\alpha} - \frac{\eta^2}{2\beta} = 0,$$

ρ et ρ' désignant les rayons de courbure principaux au point A. Cette équation, qui représente la surface du corps rapportée aux axes Aξ, Aη, Aζ, deviendra celle de la même surface rapportée aux axes Gx, Gy, Gz si l'on y fait

$$\xi = a_1 x + b_1 y + c_1 z,$$
$$\eta = a'_1 x + b'_1 y + c'_1 z,$$
$$\zeta = \gamma + a''_1 x + b''_1 y + c''_1 z.$$

Représentons par V ce que devient après cette substitution le premier membre

$$\zeta - \frac{\xi^2}{2\rho} - \frac{\eta^2}{2\rho'};$$

les cosinus des angles que la normale à la surface au point (ξ, η, ζ) fait avec les axes Gx, Gy, Gz seront respectivement proportionnels aux trois dérivées partielles

$$\frac{dV}{dx} = a''_1 - a_1 \frac{\xi}{\rho} - a'_1 \frac{\eta}{\rho'},$$
$$\frac{dV}{dy} = b''_1 - b_1 \frac{\xi}{\rho} - b'_1 \frac{\eta}{\rho'},$$
$$\frac{dV}{dz} = c''_1 - c_1 \frac{\xi}{\rho} - c'_1 \frac{\eta}{\rho'}.$$

Cela posé, regardons les coordonnées $\xi, \eta, \zeta, x, y, z$ comme celles du point de contact à l'époque t : la normale en ce point devant être verticale, on aura

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{a}\left(a''_1 - a_1 \frac{\xi}{\rho} - a'_1 \frac{\eta}{\rho'}\right) &= \frac{1}{b''}\left(b''_1 - b_1 \frac{\xi}{\rho} - b'_1 \frac{\eta}{\rho'}\right) \\ &= \frac{1}{c''}\left(c''_1 - c_1 \frac{\xi}{\rho} - c'_1 \frac{\eta}{\rho'}\right). \end{aligned} \right.$$

Mais la ligne GA restant toujours à peu près verticale, les angles θ et ψ diffèrent peu de θ_1 et de ψ_1 : posons donc

$$\theta = \theta_1 + \delta\theta, \quad \psi = \psi_1 + \delta\psi,$$

$\delta\theta$ et $\delta\psi$ désignant des variables très-petites que nous regarderons

comme du premier ordre; faisons de même

$$a'' = a''_1 + \delta a'', \quad b'' = b''_1 + \delta b'', \quad c'' = c''_1 + \delta c'',$$

et, enfin, observons que les coordonnées ξ, η du point de contact sont aussi très-petites. En négligeant, dans les équations (19), les termes d'ordre supérieur, on les mettra sous la forme

$$\frac{1}{a''_1}\left(a_1\frac{\xi}{\rho} + a'_1\frac{\eta}{\rho'} + \frac{\delta a''}{a''_1}\right) = \frac{1}{b''_1}\left(b_1\frac{\xi}{\rho} + b'_1\frac{\eta}{\rho'} + \frac{\delta b''}{b''_1}\right)$$
$$= \frac{1}{c''_1}\left(c_1\frac{\xi}{\rho} + c'_1\frac{\eta}{\rho'} + \frac{\delta c''}{c''_1}\right),$$

ou bien

$$(a_1 c''_1 - c_1 a''_1)\frac{\xi}{\rho} + (a'_1 c''_1 - c'_1 a''_1)\frac{\eta}{\rho'} = a''_1\delta c'' - c''_1\delta a'',$$

$$(c_1 b''_1 - b_1 c''_1)\frac{\xi}{\rho} + (c'_1 b''_1 - b'_1 c''_1)\frac{\eta}{\rho'} = c''_1\delta b' - b''_1\delta c'',$$

ou encore, en vertu des relations (18),

$$b'_1\frac{\xi}{\rho} - b_1\frac{\eta}{\rho'} = a''_1\delta c'' - c''_1\delta a'',$$

$$a'_1\frac{\xi}{\rho} - a_1\frac{\eta}{\rho'} = c''_1\delta b'' - b''_1\delta c'':$$

on en tire, en ayant égard aux mêmes relations,

$$c''_1\frac{\xi}{\rho} = a_1(a''_1\delta c'' - c''_1\delta a'') - b_1(c''_1\delta b'' - b''_1\delta c''),$$

$$c''_1\frac{\eta}{\rho} = a'_1(a''_1\delta c'' - c''_1\delta a'') - b'_1(c''_1\delta b'' - b''_1\delta c'').$$

Mais des valeurs de a'', b'', c'' on déduit $\delta a''$, $\delta b''$, $\delta c''$, et, par suite, on trouve sans peine

$$(20)\quad \begin{cases} a''_1\delta c'' - c''_1\delta a'' = -\delta\theta\sin\psi_1 - \delta\psi\cos\psi_1\sin\theta_1\cos\theta_1, \\ c''_1\delta b'' - b''_1\delta c'' = \delta\theta\cos\psi_1 - \delta\psi\sin\psi_1\sin\theta_1\cos\theta_1, \\ b''_1\delta a'' - a''_1\delta b'' = \delta\psi\sin^2\theta_1 : \end{cases}$$

il en résulte, en ayant égard aux formules (17),

$$(21)\quad \begin{cases} \xi = \rho(\delta\theta\sin\varphi_1 - \delta\psi\cos\varphi_1\sin\theta_1), \\ \eta = -\rho'(\delta\theta\cos\varphi_1 + \delta\psi\sin\varphi_1\sin\theta_1). \end{cases}$$

On voit que ξ et η sont de très-petites quantités du premier ordre et qu'ainsi ζ est du second.

Il nous sera facile maintenant de calculer les différences $c''y - b''z$, $a''z - c''x$, $b''x - a''y$ qui entrent dans les équations (4), (5) et (6), où, en effet, en négligeant ζ,

$$(22)\quad \begin{cases} x = -a''_1\gamma + a_1\xi + a'_1\eta, \\ y = -b''_1\gamma + b_1\xi + b'_1\eta, \\ z = -c''_1\gamma + c_1\xi + c'_1\eta; \end{cases}$$

il s'ensuit

$$\begin{aligned} c''y - b''z = {} & (c'_1 + \delta c'')(-b''_1\gamma + b_1\xi + b'_1\eta) \\ & - (b'_1 + \delta b'')(-c''_1\gamma + c_1\xi + c'_1\eta), \end{aligned}$$

ou bien, en supprimant les termes du second ordre,

$$\begin{aligned} c''y - b''z &= (c'_1\delta b'' - b''_1\delta c'')\gamma - (c_1 b'_1 - b_1 c'_1)\xi - (b'_1 c'_1 - c'_1 b'_1)\eta \\ &= c''_1\delta b''_1 - b''_1\delta c'')\gamma - a'_1\xi + a_1\eta. \end{aligned}$$

On trouvera de même

$$\begin{aligned} a''z - c''x &= (a''_1\delta c'' - c''_1\delta a'')\gamma - b'_1\xi + b_1\eta, \\ b''x - a''y &= (b''_1\delta a'' - a''_1\delta b'')\gamma - c'_1\xi + c_1\eta. \end{aligned}$$

Substituons maintenant dans ces formules les valeurs fournies par les équations (20) et (21), et il viendra

$$\begin{aligned} c''y - b''z &= \mathrm{D}\,\delta\psi \sin\theta_1 - \mathrm{E}\,\delta\theta, \\ a''z - c''x &= \mathrm{F}\,\delta\psi \sin\theta_1 - \mathrm{G}\,\delta\theta, \\ b''x - c''y &= \mathrm{H}\,\delta\psi \sin\theta_1 - \mathrm{I}\,\delta\theta, \end{aligned}$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$\varphi - \gamma = \varpi, \qquad \varphi' - \gamma = \varpi',$$

$$\begin{aligned} \mathrm{D} &= \varpi a'_1 \cos\varphi_1 - \varpi' a_1 \sin\varphi_1, & \mathrm{E} &= \varpi a'_1 \sin\varphi_1 + \varpi' a_1 \cos\varphi_1, \\ \mathrm{F} &= \varpi b'_1 \cos\varphi_1 - \varpi b_1 \sin\varphi_1, & \mathrm{G} &= \varpi b'_1 \sin\varphi_1 + \varpi' b_1 \cos\varphi_1, \\ \mathrm{H} &= \varpi c'_1 \cos\varphi_1 - \varpi' c_1 \sin\varphi_1, & \mathrm{I} &= \varpi c'_1 \sin\varphi_1 + \varpi' c_1 \cos\varphi_1. \end{aligned}$$

Observons ensuite que si, dans l'équation (13), on porte les va-

leurs (22) de x, y, z, elle se réduira, en négligeant les termes du second ordre, à

$$z_1 - \gamma = 0:$$

il en résulte, en vertu de l'équation (3),

$$N = Mg.$$

Substituons toutes ces valeurs dans les équations (4), (5) et (6); mettons-y pour p, q, r leurs valeurs approchées [*]

$$p = \sin\psi_1 \sin\theta_1 \frac{d\varphi}{dt} + \cos\psi_1 \frac{d\delta\theta}{dt},$$

$$q = \cos\psi_1 \sin\theta_1 \frac{d\varphi}{dt} - \sin\psi_1 \frac{d\delta\theta}{dt};$$

$$r = \frac{d\delta\psi}{dt} + \cos\theta_1 \frac{d\varphi}{dt}:$$

enfin, négligeons-y les produits qr, pr, pq qui sont du second ordre: ces équations deviendront

$$A \sin\psi_1 \sin\theta_1 \frac{d^2\varphi}{dt^2} + A \cos\psi_1 \frac{d^2\delta\theta}{dt^2} = Mg(D\,\delta\psi \sin\theta_1 - E\,\delta\theta),$$

$$B \cos\psi_1 \sin\theta_1 \frac{d^2\varphi}{dt^2} - A \sin\psi_1 \frac{d^2\delta\theta}{dt^2} = Mg(F\,\delta\psi \sin\theta_1 - G\,\delta\theta),$$

$$C \frac{d^2\delta\psi}{dt^2} + C \cos\theta_1 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = Mg(H\,\delta\psi \sin\theta_1 - I\,\delta\theta).$$

Nous sommes donc arrivés à trois équations différentielles linéaires du second ordre entre le temps et les trois inconnues φ, $\delta\psi$, $\delta\theta$.

Commençons par éliminer φ: pour cela, nous observerons qu'on peut toujours supposer que l'axe principal Gz n'est pas perpendiculaire à la droite AG; car il y a toujours au moins un des axes principaux qui n'est pas perpendiculaire à cette droite. Alors, $\cos\theta_1$ n'étant pas zéro, la troisième de nos équations nous donnera

$$(23) \qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{Mg(H\,\delta\psi \sin\theta_1 - I\,\delta\theta)}{C\cos\theta_1} - \frac{1}{\cos\theta_1}\frac{d^2\delta\psi}{dt^2}.$$

---

[*] Il faut remarquer que $\frac{d\varphi}{dt}$ sera toujours une très-petite quantité: cela résulte de l'équation (9).

et, en mettant cette valeur dans les deux autres, puis posant

$$P = CD\cos\theta_1 - AH\sin\psi_1\sin\theta_1, \quad Q = CE\cos\theta_1 - AI\sin\psi_1\sin\theta_1,$$

$$R = BH\cos\psi_1\sin\theta_1 - CF\cos\theta_1, \quad S = BI\cos\psi_1\sin\theta_1 - CG\cos\theta_1,$$

nous trouverons

$$24)\quad \begin{cases} AC\cos\psi_1\cos\theta_1\dfrac{d^2\delta\theta}{dt^2} - AC\sin\psi_1\sin\theta_1\dfrac{d^2\delta\psi}{dt^2} \\ \qquad\qquad = Mg(P\delta\psi\sin\theta_1 - Q\delta\theta). \\ BC\sin\psi_1\cos\theta_1\dfrac{d^2\delta\theta}{dt^2} + BC\cos\psi_1\sin\theta_1\dfrac{d^2\delta\psi}{dt^2} \\ \qquad\qquad = Mg(R\delta\psi\sin\theta_1 - S\delta\theta). \end{cases}$$

Pour intégrer ces deux équations, ajoutons-les après avoir multiplié la seconde par un facteur constant λ; il deviendra

$$\frac{d^2[(A\sin\psi_1 - \lambda B\cos\psi_1)\delta\psi\sin\theta_1 - (A\cos\psi_1 + \lambda B\sin\psi_1)\delta\theta\cos\theta_1]}{dt^2}$$

$$+ \frac{Mg}{C}[(P + \lambda R)\delta\psi\sin\theta_1 - (Q + \lambda S)\delta\theta] = 0.$$

Déterminons les constantes λ et ω de façon qu'on ait

$$25)\quad \frac{P + \lambda R}{A\sin\psi_1 - \lambda B\cos\psi_1} = \frac{Q + \lambda S}{A\cos\psi_1 + \lambda B\sin\psi_1\cos\theta} = \omega;$$

alors l'équation précédente prendra la forme

$$\frac{d^2[(P + \lambda R)\delta\psi\sin\theta_1 - (Q + \lambda S)\delta\theta]}{dt^2}$$

$$+ \frac{Mg\omega}{C}[(P + \lambda R)\delta\psi\sin\theta_1 - (Q + \lambda S)\delta\theta] = 0.$$

et nous saurons l'intégrer immédiatement.

Des conditions auxquelles nous avons assujetti λ et ω, on déduit, en éliminant λ,

$$AB\cos\theta_1 . \omega^2 - \begin{pmatrix} BP\sin\psi_1\cos\theta_1 + BQ\cos\psi_1 \\ - AR\cos\psi_1\cos\theta_1 + AS\sin\psi_1 \end{pmatrix}\omega + PS - QR = 0.$$

Nommons ω' et ω'' les deux racines de cette équation; appelons λ' et λ'' les valeurs correspondantes de λ qui se déduiront de l'une des deux

équations (25) : les intégrales complètes des équations différentielles (24) seront

$$(P + \lambda' R)\,\delta\psi \sin\delta_1 - (R + \lambda' S)\,\delta\delta = h' \sin\left(t\sqrt{\frac{Mg\omega'}{C}} + \varepsilon'\right),$$

$$(P + \lambda'' R)\,\delta\psi \sin\delta_1 - (Q + \lambda'' S)\,\delta\delta = h'' \sin\left(t\sqrt{\frac{Mg\omega''}{C}} + \varepsilon''\right).$$

h', h'', ε', ε'' désignant des constantes arbitraires, et ces formules feront connaître $\delta\psi$ et $\delta\theta$ en fonction du temps.

Pour que ces variables restent toujours très-petites, il faut que les racines ω' et ω'' soient réelles et positives : or, si aux quantités P, Q, R, S on substitue leurs valeurs, l'équation en ω prendra la forme

$$AB\omega^2 - \left[\begin{array}{r} BC(\varpi a_1'^2 + \varpi' a_1^2) + AC(\varpi b_1'^2 + \varpi' b_1^2) \\ + AB(\varpi c_1'^2 + \varpi' c_1^2) \end{array}\right]\omega$$
$$- C\varpi\varpi'(Aa_1''^2 + Bb_1''^2 + Cc_1''^2) = 0.$$

On voit d'abord que ϖ et ϖ' doivent etre positifs tous deux, c'est-à-dire que la distance GA du centre de gravité à la surface du corps doit etre moindre que chacun des rayons de courbure principaux au point A. C'est la condition connue de la stabilité de l'équilibre : pour nous assurer qu'elle est suffisante, il faut prouver que, ϖ et ϖ' étant positifs, l'équation précédente aura ses racines réelles, auquel cas elles seront nécessairement positives. Il s'agit donc de vérifier que la quantité

$$K = [BC(\varpi a_1'^2 - \varpi' a_1^2) + AC(\varpi b_1'^2 - \varpi' b_1^2) - AB(\varpi c_1'^2 + \varpi' c_1^2)]^2$$
$$- 4ABC(Aa_1''^2 + Bb_1''^2 + Cc_1''^2)\varpi\varpi'$$

est positive : or, si l'on fait

$$BCa_1^2 + ACb_1^2 - ABc_1^2 = l,$$
$$BCa_1'^2 + ACb_1'^2 + ABc_1'^2 = l',$$
$$ABC(Aa_1''^2 + Bb_1''^2 + Cc_1''^2) = m,$$

l, l', m seront des quantités positives, et l'on aura

$$K = (l'\varpi + l\varpi')^2 - 4m\varpi\varpi' = (l'\varpi - l\varpi')^2 + 4(ll' - m)\varpi\varpi' :$$

d'ailleurs, les valeurs précédentes de l, l', m nous donnent

$$\begin{aligned} ll' - m = {} & B^2 C^2 a_1^2 a_1'^2 + A^2 C^2 b_1^2 b_1'^2 + A^2 B^2 c_1^2 c_1'^2 \\ & + A^2 BC (b_1^2 c_1'^2 + c_1^2 b_1'^2 - a_1''^2) + AB^2 C (a_1^2 c_1'^2 + c_1^2 a_1'^2 - b_1''^2 \\ & + ABC^2 (a_1^2 b_1'^2 + b_1^2 a_1'^2 - c_1''^2), \end{aligned}$$

ou bien, en vertu des relations (18),

$$ll' - m = (BC a_1 a_1' + AC b_1 b_1' + AB c_1 c_1')^2 :$$

il en résulte

$$K = (l'\varpi - l\varpi')^2 + 4(BC a_1 a_1' + AC b_1 b_1' + AB c_1 c_1')^2 \varpi\varpi',$$

par où l'on voit que la quantité K sera positive, lorsque ϖ et ϖ' le seront.

Les variables $\delta\psi$ et $\delta\theta$ étant connues en fonction du temps, si on les porte dans l'équation (23) et qu'on l'intègre, on aura pour l'angle φ une expression de la forme

$$\alpha t + \beta + k' \sin\left(t\sqrt{\frac{Mg\omega'}{C}} + \varepsilon'\right) + k'' \sin\left(t\sqrt{\frac{Mg\omega'}{C}} + \varepsilon''\right),$$

où k' et k'' sont très-petits à cause des facteurs très-petits h' et h et où α l'est également, attendu que la valeur initiale de $\frac{d\varphi}{dt}$ doit être très-petite. On voit que la valeur de φ se compose de trois parties dont deux sont périodiques, tandis que la troisième croît indéfiniment avec le temps, mais très-lentement.

Il ne serait donc pas exact de dire que le corps dont nous nous occupons s'écarte toujours très-peu de sa position initiale; car, indépendamment de la translation horizontale du centre de gravité, laquelle se fait uniformément et en ligne droite en vertu des équations

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 y_1}{dt^2} = 0,$$

le corps tournera autour de la verticale passant par ce centre d'un angle qui ordinairement croîtra sans limite, bien que toutes les vitesses initiales soient très-petites.

J'indiquerai encore une propriété assez curieuse du mouvement que

nous venons de déterminer : soient x, y, z les coordonnées par rapport aux axes principaux d'un point quelconque de la masse du corps, et X, Y, Z les coordonnées du même point par rapport aux axes fixes OX, OY, OZ : les premières seront des constantes, tandis que les dernières varieront avec le temps, et l'on aura

$$\begin{aligned} Z = z_1 + a''x + b''y + c''z &= z_1 + x \sin(\psi_1 + \delta\psi) \sin(\theta_1 - \delta\theta) \\ &+ y \cos(\psi_1 + \delta\psi) \sin(\theta_1 + \delta\theta) + z \cos(\theta_1 + \delta\theta), \end{aligned}$$

ou bien, en négligeant les quantités du second ordre,

$$\begin{aligned} Z = \gamma &+ x(\sin\psi_1 \sin\theta_1 + \delta\psi \cos\psi_1 \sin\theta_1 + \delta\theta \sin\psi_1 \cos\theta_1) \\ &+ y(\cos\psi_1 \sin\theta_1 - \delta\psi \sin\psi_1 \sin\theta_1 + \delta\theta \cos\psi_1 \cos\theta_1) \\ &+ z(\cos\theta_1 - \delta\theta \sin\theta_1). \end{aligned}$$

Appelons Z_1 la valeur de Z dans la position d'équilibre du corps, de sorte qu'on ait

$$Z_1 = \gamma + x \sin\psi_1 \sin\theta_1 + y \cos\psi_1 \sin\theta_1 + z \cos\theta_1 :$$

la valeur précédente de Z pourra s'écrire

$$\begin{aligned} Z = Z_1 &+ (x \cos\psi_1 - y \sin\psi_1)\,\delta\psi \sin\theta_1 \\ &+ (x \sin\psi_1 \cos\theta_1 + y \cos\psi_1 \cos\theta_1 - z \sin\theta_1)\,\delta\theta. \end{aligned}$$

Considérons maintenant les points du corps dont les coordonnées rapportées aux axes principaux satisfont à l'équation du premier degré

$$\frac{x \cos\psi_1 - y \sin\psi_1}{P + \lambda' R} + \frac{x \sin\psi_1 \cos\theta_1 + y \cos\psi_1 \cos\theta_1 - z \sin\theta_1}{Q - \lambda' S} = 0 :$$

tous ces points seront dans un même plan Π' passant par la droite GA, et pour tous les points de ce plan on aura

$$\begin{aligned} Z &= Z_1 + \frac{x \cos\psi_1 - y \sin\psi_1}{P + \lambda' R}\left[(P + \lambda' R)\,\delta\psi \sin\theta_1 - (Q + \lambda' S)\,\delta\theta\right] \\ &= Z_1 + \frac{x \cos\psi_1 - y \sin\psi_1}{P + \lambda' R} \cdot h' \sin\left(t\sqrt{\frac{Mg\omega'}{C}} + \varepsilon'\right). \end{aligned}$$

On voit donc que le plan Π' étant emporté avec le corps, la projection de chacun de ses points sur une verticale oscillera, comme le

fait l'extrémité d'un pendule simple, de part et d'autre de la position qu'elle occupe lorsque le corps est en équilibre : toutes ces projections passeront en même temps par leurs positions moyennes, de façon que la durée commune de leurs oscillations soit égale à $\pi\sqrt{\frac{C}{Mg\omega'}}$, et les amplitudes de ces mêmes oscillations seront proportionnelles aux distances des points du plan Π' à la droite GA.

Il existe un deuxième plan Π'' passant aussi par GA et jouissant de la même propriété : il a pour équation

$$\frac{x\cos\psi_1 - y\sin\psi_1}{P + \lambda'' R} + \frac{x\sin\psi_1\cos\theta_1 + y\cos\psi_1\cos\theta_1 - z\sin\theta_1}{Q + \lambda'' S} = 0,$$

et la durée des oscillations exécutées par les projections de ses points sur une verticale est égale à $\pi\sqrt{\frac{C}{Mg\omega''}}$.

La position dans le corps des plans Π' et Π'' et les durées des oscillations dont on vient de parler ne dépendent pas des circonstances initiales, mais seulement de la forme et de la constitution du corps. On peut se demander, par exemple, dans quel cas ces deux plans seront perpendiculaires entre eux.

Leurs équations étant mises sous la forme

$$\begin{aligned}
&x[Q\cos\psi_1 + P\sin\psi_1\cos\theta_1 + \lambda'(S\cos\psi_1 + R\sin\psi_1\cos\theta_1)]\\
&- y[Q\sin\psi_1 - P\cos\psi_1\cos\theta_1 + \lambda'(S\sin\psi_1 - R\cos\psi_1\cos\theta_1)]\\
&- z(P\sin\theta_1 + \lambda' R\sin\theta_1) = 0,\\
&x[Q\cos\psi_1 + P\sin\psi_1\cos\theta_1 + \lambda''(S\cos\psi_1 + R\sin\psi_1\cos\theta_1)]\\
&- y[Q\sin\psi_1 - P\cos\psi_1\cos\theta_1 + \lambda''(S\sin\psi_1 - R\cos\psi_1\cos\theta_1)]\\
&- z(P\sin\theta_1 + \lambda'' R\sin\theta_1) = 0,
\end{aligned}$$

on voit que les deux plans seront rectangulaires si la quantité

$$\begin{aligned}
A = {} & [Q\cos\psi_1 + P\sin\psi_1\cos\theta_1 + \lambda'(S\cos\psi_1 + R\sin\psi_1\cos\theta_1)]\\
& \times [Q\cos\psi_1 + P\sin\psi_1\cos\theta_1 + \lambda''(S\cos\psi_1 + R\sin\psi_1\cos\theta_1)]\\
& + [Q\sin\psi_1 - P\cos\psi_1\cos\theta_1 + \lambda'(S\sin\psi_1 - R\cos\psi_1\cos\theta_1)]\\
& \times [Q\sin\psi_1 - P\cos\psi_1\cos\theta_1 + \lambda''(S\sin\psi_1 - R\cos\psi_1\cos\theta_1)]\\
& + (P\sin\theta_1 + \lambda' R\sin\theta_1)(P\sin\theta_1 + \lambda'' R\sin\theta_1)\\
= {} & P^2 + Q^2 + (PR + QS)(\lambda' + \lambda'') + (R^2 + S^2)\lambda'\lambda''
\end{aligned}$$

se réduit à zéro. Mais λ' et λ'' sont les deux racines de l'équation du second degré

$$(\mathrm{BR}\sin\psi_1\cos\theta_1 + \mathrm{BS}\cos\psi_1)\lambda^2$$
$$+ (\mathrm{BP}\sin\psi_1\cos\theta_1 + \mathrm{BQ}\cos\psi_1 + \mathrm{AR}\cos\psi_1\cos\theta_1 - \mathrm{AS}\sin\psi_1)\lambda$$
$$+ \mathrm{AP}\cos\psi_1\cos\theta_1 - \mathrm{AQ}\sin\psi_1 = 0:$$

on a donc

$$\lambda' + \lambda'' = -\frac{\mathrm{BP}\sin\psi_1\cos\theta_1 + \mathrm{BQ}\cos\psi_1 + \mathrm{AR}\cos\psi_1\cos\theta_1 - \mathrm{AS}\sin\psi_1}{\mathrm{BR}\sin\psi_1\cos\theta_1 + \mathrm{BS}\cos\psi_1},$$

$$\lambda'\lambda'' = \frac{\mathrm{AP}\cos\psi_1\cos\theta_1 - \mathrm{AQ}\sin\psi_1}{\mathrm{BR}\sin\psi_1\cos\theta_1 + \mathrm{BS}\cos\psi_1}.$$

Substituons ces valeurs dans l'expression de A et multiplions-la par

$$\mathrm{BR}\sin\psi_1\cos\theta_1 + \mathrm{BS}\cos\psi_1;$$

elle deviendra

$$\mathrm{B}(\mathrm{R}\sin\psi_1\cos\theta_1 + \mathrm{S}\cos\psi_1)(\mathrm{P}^2 + \mathrm{Q}^2)$$
$$-\left[\begin{array}{l}\mathrm{B}(\mathrm{P}\sin\psi_1\cos\theta_1 + \mathrm{Q}\cos\psi_1)\\ +\mathrm{A}(\mathrm{R}\cos\psi_1\cos\theta_1 - \mathrm{S}\sin\psi_1)\end{array}\right](\mathrm{PR} + \mathrm{QS})$$
$$+\mathrm{A}(\mathrm{P}\cos\psi_1\cos\theta_1 - \mathrm{Q}\sin\psi_1)(\mathrm{R}^2 + \mathrm{S}^2) = \mathrm{A}',$$

et pour que les deux plans soient rectangulaires, il faudra qu'on ait

$$\mathrm{A}' = 0.$$

Or, en remplaçant P, Q, R, S par leurs valeurs, on trouvera

$$\mathrm{A}' = \mathrm{C}\varpi\varpi'(\varpi - \varpi')\cos^2\theta_1(\mathrm{A}a_1''^2 + \mathrm{B}b_1''^2 + \mathrm{C}c_1''^2)(\mathrm{BC}a_1a_1' + \mathrm{AC}b_1b_1' + \mathrm{AB}c_1c_1');$$

les facteurs ϖ, ϖ', $\cos\theta_1$ ne sont pas nuls par hypothèse; les facteurs

$$\mathrm{C} \quad \text{et} \quad \mathrm{A}a_1''^2 + \mathrm{B}b_1''^2 + \mathrm{C}c_1''^2$$

ne peuvent l'être. Pour que A' se réduise à zéro, il faut donc que l'un des deux autres facteurs

$$\varpi - \varpi' = \rho - \rho'$$

et

$$\mathrm{BC}a_1a_1' + \mathrm{AC}b_1b_1' + \mathrm{AB}c_1c_1'$$

soit égal à zéro. Ainsi, les plans Π et Π' seront perpendiculaires entre eux dans deux cas :

1°. Lorsque les rayons de courbure principaux au point A seront égaux ;

2°. Lorsque les moments principaux d'inertie vérifieront l'équation

$$BC\,a_1 a'_1 - AC\,b_1 b'_1 + AB\,c_1 c'_1 = 0,$$

laquelle, en ayant égard à la relation

$$a_1 a'_1 + b_1 b'_1 + c_1 c'_1 = 0,$$

peut encore se mettre sous la forme

$$(B - A)(C - A)\,a_1 a'_1 + A(B - C)\,b_1 b'_1 = 0;$$

cette condition se trouvera remplie en particulier, lorsque les trois moments principaux A, B, C seront égaux.

RAPPORT

Sur un Mémoire de M. Jules Bienaymé, Inspecteur général des Finances, *concernant la probabilité des erreurs d'après la méthode des moindres carrés;*

Par J. LIOUVILLE.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, tome XXXIX. — *Séance du 19 janvier 1852.*

« L'Académie nous a chargés, M. Lamé, M. Chasles et moi, de lui rendre compte d'un Mémoire de M. Bienaymé, inspecteur général des finances, *sur la probabilité des erreurs d'après la méthode des moindres carrés*. Cette méthode célèbre, et aujourd'hui d'un très-fréquent usage, a été donnée d'abord par Legendre dans ses *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes* publiées en 1805, et, depuis, elle a été l'objet des travaux d'un grand nombre de géomètres, parmi lesquels nous citerons Laplace et M. Gauss. Elle donne aux astronomes en particulier un moyen régulier et uniforme de résoudre les équations de condition du premier degré, en plus grand nombre que les inconnues, qui se présentent à eux quand ils veulent rectifier les éléments des orbites et les masses des corps célestes. La règle est de multiplier chacune des équations de condition par le coefficient de chacune des inconnues successivement; d'ajouter les produits donnés par les coefficients de la même inconnue, ce qui fournit autant de nouvelles équations que d'inconnues; enfin de résoudre ces équations de la manière ordinaire. Les solutions, ainsi obtenues, jouissent de la propriété de ne renfermer que les moindres erreurs possibles pour une probabilité donnée. Ce n'est pas, bien entendu, un minimum absolu; c'est un minimum relatif au choix des multiplicateurs qu'on peut appliquer aux équations de condition, pour former ensuite, en les ajoutant, de nouvelles équations qui les remplacent et qui ne soient plus qu'en nombre égal à celui des inconnues. Les multiplicateurs que nous venons d'indiquer sont les plus avantageux que l'on puisse choisir.

» M. Bienaymé, dans le Mémoire dont nous rendons compte, admet ou plutôt démontre de nouveau ce beau théorème. Quand il n'y a dans les équations de condition qu'une seule inconnue, M. Bienaymé s'accorde aussi, avec les géomètres qui l'ont précédé, sur le calcul de l'erreur subsistante et de la probabilité qu'elle peut avoir. Mais, quand il y a plusieurs inconnues, la formule qu'on donne pour calculer l'erreur

et la probabilité de chacune d'elles lui semble défectueuse, comme ne fournissant que l'erreur et la probabilité que l'inconnue dont on s'occupe pourrait avoir si elle était seule, et quelque grandes que fussent les erreurs des autres inconnues. « Or, dit « M. Bienaymé, un des premiers principes de la théorie des probabilités, c'est que, « quand plusieurs événements arrivent simultanément, la probabilité du concours de « ces événements est le produit des probabilités de chacun; de sorte que la probabilité « de ce concours est inférieure à la probabilité de chaque événement pris à part, et « elle est d'autant plus petite qu'il y a plus d'événements. Évidemment, il en est de « même des erreurs de plusieurs inconnues : la probabilité que ces erreurs restent « toutes à la fois dans certaines limites, ne peut être que le produit des probabilités « séparées que chacune ne s'écarte pas de ses limites propres; et, par conséquent, « cette probabilité du concours des erreurs de grandeur limitée doit être notablement « inférieure à la probabilité des limites de chaque erreur considérée isolément, quelles « que puissent être les autres. C'est donc une défectuosité que d'assigner comme pro- « babilité de l'erreur d'une inconnue faisant partie d'un système à déterminer, celle « qu'elle aurait si elle était seule, au lieu de donner des règles pour calculer la pro- « babilité de l'ensemble des erreurs du système, qui ne peuvent, en réalité, être iso- « lées les unes des autres. »

Le point de vue nouveau où s'est placé M. Bienaymé a dû naturellement le conduire à des calculs nouveaux aussi et plus compliqués. L'auteur s'en est tiré avec beaucoup d'adresse et de talent; on voit qu'il est au courant de tous les progrès, même de détail, que les sciences mathématiques ont pu faire dans ces derniers temps. Indépendamment même de toute idée d'application aux grandes questions de philosophie naturelle, les géomètres liraient encore son Mémoire avec intérêt. Mais le calcul des probabilités, auquel se rattachent les noms imposants de Pascal, de Fermat, de Huyghens, de Jacques Bernoulli, de Laplace, de Fourier, de Poisson, etc., n'est pas une pure spéculation abstraite. Restreint à de justes limites, il est pratiquement utile. On en a souvent abusé, il est vrai : ce n'est pas une raison d'en proscrire l'usage.

« En résumé, nous pensons que le Mémoire de M. Bienaymé est très-digne d'être approuvé par l'Académie, et d'être inséré dans le *Recueil des Savants étrangers*. »

Les conclusions de ce Rapport ont été adoptées.

PARIS. — IMPRIMERIE DE BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.

SUR

LA PROBABILITÉ DES ERREURS

D'APRÈS

LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS;

PAR M. I.-J. BIENAYMÉ,
Inspecteur général des Finances.

> Nos sequimur probabilia, nec ultra quam id quod verisimile occurrerit procedere possumus, et refellere sine pertinacia, et refelli sine iracundia paratissumus.
> TESCHEN.

§ Ier.

La méthode des moindres carrés est si fréquemment employée aujourd'hui dans les sciences d'observation, que tout ce qui peut en rendre les applications plus sûres devient d'un grand intérêt, quelque simple que ce soit d'ailleurs. Cette considération a fait rédiger les recherches suivantes qui ont pour objet de modifier le calcul ordinaire de la probabilité des erreurs, non dans le cas où les observations ne font connaître qu'une seule grandeur, mais dans les cas beaucoup plus multipliés où les observations donnent à la fois plusieurs grandeurs inconnues, liées par des équations avec la grandeur observée. Dans d'autres temps, lorsque la méthode était peu usitée en France, et regardée, à cause des longs calculs qu'elle exige, plutôt comme une curiosité savante que comme un instrument réel de l'observateur, la modification profonde reconnue dans la probabilité avait pu ne paraître que d'une importance secondaire; mais, à présent, il semble vraiment utile de signaler la défectuosité du calcul ordinaire, car elle touche à des travaux plus nombreux chaque jour, et les observateurs, ne pouvant sacrifier un temps précieux à la vérification de théories difficultueuses, sont obligés d'en accepter les règles

pratiques sur la foi de leurs devanciers, surtout quand ceux-ci sont des hommes de grande et juste autorité dans la science.

Il y aurait peut-être plus d'un défaut à relever dans les applications de la méthode des moindres carrés : il ne sera cependant question ici que de celui qui frappe le plus souvent les yeux, et dont voici l'indication si simple, qu'aux premiers mots tout le monde en reconnaîtra l'existence, bien que les modifications qu'il nécessite puissent imposer un travail analytique assez compliqué.

On sait que la méthode inventée par Legendre, il y a environ cinquante ans, et publiée pour la première fois dans ses *Nouvelles Méthodes pour la détermination des orbites des comètes*, in-4°. 1805, se réduit à multiplier chacune des équations du premier degré formées entre la grandeur observée et les inconnues, par le coefficient de chacune de ces inconnues successivement; à ajouter les produits donnés par les coefficients de la même inconnue, ce qui fournit autant de nouvelles équations que d'inconnues; enfin à résoudre ces équations de la manière ordinaire. Les solutions ainsi obtenues jouissent de la propriété de ne renfermer que les moindres erreurs possibles pour une probabilité donnée. Ce n'est pas un minimum absolu, comme on a semblé le croire assez souvent, mais c'est un minimum relatif aux erreurs des observations et au mode choisi pour la combinaison de toutes les équations qu'elles fournissent. Il pourrait se trouver d'autres combinaisons plus avantageuses, et il y aurait à les discuter suivant les cas.

Le calcul de la grandeur des erreurs subsistantes et de la probabilité qu'elles peuvent avoir, se fait suivant les règles ordinaires de la théorie et n'entraîne que des difficultés analytiques.

Quand il n'entre qu'une inconnue dans les équations, ce calcul est exact, du moins quant aux fondements théoriques. Mais quand il y a plusieurs inconnues, les règles données pour calculer l'erreur et la probabilité de chacune d'elles ne fournissent que l'erreur et la probabilité qu'elle pourrait avoir si elle était seule, et quelque grandes que fussent les erreurs des autres.

Or, un des premiers principes de la théorie des probabilités, c'est que, quand plusieurs événements arrivent simultanément, la probabilité du concours de ces événements est le produit des probabilités

de chacun. De sorte que la probabilité de ce concours est inférieure à la probabilité de chaque événement pris à part : elle est d'autant plus petite, qu'il y a plus d'événements.

Évidemment, il en est de même des erreurs de plusieurs inconnues; la probabilité que ces erreurs restent toutes à la fois dans certaines limites ne peut être que le produit des probabilités séparées que chacune ne s'écarte pas de ses limites propres, et, par conséquent, cette probabilité du concours des erreurs de grandeur limitée doit être notablement inférieure à la probabilité des limites de chaque erreur considérée isolément, quelles que puissent être les autres.

C'est donc une défectuosité que d'assigner comme probabilité de l'erreur d'une inconnue faisant partie d'un système à déterminer, celle qu'elle aurait si elle était seule, au lieu de donner des règles pour calculer la probabilité de l'ensemble des erreurs du système qui ne peuvent, en réalité, être isolées les unes des autres.

Ce défaut devient plus évident encore lorsqu'on fait attention que la probabilité relative à une limite d'erreur est d'autant plus grande, que l'étendue bornée par cette limite est plus grande : de sorte que, si l'on veut conserver à l'ensemble des erreurs une probabilité un peu élevée, il faudra assigner à chaque erreur des limites plus écartées que celles qu'exigerait la même probabilité si l'inconnue était seule. Lors donc qu'on s'arrête à ces dernières limites, on n'a réellement qu'une très-faible probabilité qu'elles ne sont pas dépassées. On verra, en effet, dans ce qui suit, qu'il suffit de deux inconnues pour que l'étendue des erreurs soit presque doublée pour une même probabilité. Les règles usuelles font naître par là des idées fort inexactes sur la connaissance des grandeurs inconnues qu'on s'est proposé de déduire des observations, et elles égarent même parfois sur la valeur de ces observations, ainsi que sur le nombre de bonnes observations qu'il serait indispensable de faire pour parvenir à un résultat assigné.

Qu'il soit permis, au sujet de ce nombre, de cette multiplicité des observations, bien entendu de bonnes observations, de faire remarquer que c'est là une condition impérieuse des connaissances humaines quand la précision n'est pas absolue. Car les hommes cherchent à la fois tant de choses, que la probabilité du concours des

valeurs exactes de toutes ces choses ne peut devenir très-grande que par la grandeur immense du nombre des observations. C'est, en effet, cette grandeur et la répétition continuelle des circonstances ordinaires de la vie qui met hors de doute les pratiques du sens commun; et toute l'efficacité d'un sophisme ne consiste le plus souvent qu'à dérober la vue de la multiplicité réelle des faits d'une expérience journalière, en faisant croire à une multiplicité factice d'événements possibles sans doute, mais qui n'arrivent pour ainsi dire jamais.

La défectuosité une fois indiquée, on voit qu'il ne s'agit plus que de modifier convenablement la démonstration de la méthode, afin de calculer, non plus la probabilité de l'erreur d'une inconnue, mais la probabilité de l'ensemble des erreurs. Il y avait ici à choisir parmi les démonstrations.

A proprement parler, Legendre n'en a point donné. Seulement il appuie son procédé assez solidement sur les avantages qu'il fait ressortir, et il insiste principalement sur ce que la moyenne arithmétique des observations, que l'on prend d'ordinaire avec confiance, n'est précisément qu'un cas particulier de la méthode des moindres carrés.

Ce fut M. Gauss qui rattacha le premier cette méthode au calcul des probabilités, quelques années après la publication de Legendre, et ce fut aussi dans un ouvrage d'Astronomie : *Theoria motus corporum cœlestium*, in-4°, 1809. La démonstration que M. Gauss y donne repose sur la réciproque de la remarque de Legendre, que la moyenne arithmétique se déduit de sa méthode, quand cette moyenne peut avoir lieu. Réciproquement, si la moyenne arithmétique adoptée généralement est nécessaire, dit M. Gauss, il en résulte qu'une certaine loi de probabilité est nécessaire, et que le seul procédé à suivre pour combiner les équations fournies par l'observation est le procédé qui rend un minimum la somme des carrés de ces équations. Mais on doit convenir que l'hypothèse de la nécessité de prendre la moyenne arithmétique d'une masse de faits pour obtenir le résultat le plus exact possible, est tout à fait gratuite, et ne saurait pas plus être admise à priori que l'hypothèse même de la nécessité du minimum des carrés. Il n'y a donc là qu'une preuve restreinte aux cas particuliers où la loi de probabilité des erreurs, qui conduit toujours à la

moyenne arithmétique, se rencontre dans les observations; et c'est ce qui arrive très-souvent par la nature des choses. Mais, comme on l'ignore le plus ordinairement, il n'existe pas là de démonstration vraiment solide. Aussi, dans un ouvrage bien plus récent, consacré exclusivement à la méthode des moindres carrés, *Theoria combinationis observationum minimis erroribus obnoxiæ*, in-4°, 1823, M. Gauss a-t-il fondé sur d'autres considérations l'emploi de cette méthode. Ce ne sont toutefois que des considérations, et non des preuves; et l'on ne trouve de démonstration réelle que dans les travaux antérieurs de Laplace.

C'est dans un Mémoire publié en 1811, que Laplace fit voir que, quand le nombre des observations est assez grand, les erreurs les plus restreintes probablement sont données par la méthode des moindres carrés. Ce Mémoire se trouve parmi ceux de l'Académie des Sciences pour 1811, et il a été reproduit dans la *Théorie analytique des Probabilités*, qui parut en 1812. Les principes de la démonstration de Laplace sont à l'abri de toute objection; les moyens analytiques peuvent seuls en soulever quelques-unes. Ils n'ont point toute la rigueur désirable, et peut-être, dans les applications, conviendrait-il de bien discuter les cas particuliers qui pourraient se présenter. Mais, lorsqu'on réfléchit qu'il suffirait le plus souvent de quelques observations, ajoutées ou retranchées, pour rendre aux expressions analytiques toute leur valeur, on reconnaît que l'analyse de Laplace satisfait complétement aux démonstrations générales. C'est cette analyse qui sera employée dans ce qui va suivre, pour suppléer l'omission de la probabilité du concours des diverses erreurs dans le cas de plusieurs inconnues, qui se présente presque toujours. Seulement il y sera fait quelques simplifications, tirées surtout des beaux travaux de Laplace et de M. Gauss. Si l'un et l'autre ont négligé cette considération du concours des événements, qui accroît si fortement la grandeur des erreurs possibles avec une probabilité déterminée, ils ont du moins fourni tous les moyens de la calculer.

Il aurait été sans doute très-utile d'entrer dans plus de détails pratiques et de donner plusieurs exemples de calculs; mais chaque application de ce genre exigerait un temps assez long.

On verra cependant comment la probabilité de 1 million contre 1

assignée par Laplace aux erreurs possibles de la masse de Jupiter, dont il fixait la limite à $\frac{1}{100}$ de la valeur, doit être réduite à 1160 contre 1; même en supposant, comme il l'a fait, que le nombre des équations employées, 129 seulement, permît d'appliquer la formule d'approximation, et n'exigeât pas l'addition des termes négligés habituellement. Cette diminution de la probabilité calculée suffit bien, si l'on fait attention aux autres défauts que peuvent renfermer les 129 équations, pour faire cesser la surprise qu'on a dû éprouver quand il a paru nécessaire de modifier de $\frac{1}{50}$ la masse qui semblait définitivement calculée avec une précision double. Les formules nouvelles mettent donc ici le calcul des probabilités à l'abri des reproches qui ont pu lui être faits un peu précipitamment à cette occasion. Il est très-probable que, dans les autres cas où ce calcul paraît en défaut, on en trouverait également la cause dans quelque omission de l'analyse ou de l'observation.

§ II.

L'application de la méthode des moindres carrés suppose qu'un grand nombre n d'observations a donné des résultats $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_h, \ldots, \omega_n$ qui auraient pu être calculés d'avance en fonction linéaire de plusieurs éléments $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots x_m$ en nombre m, si ces éléments étaient connus. Chaque observation fournit dès lors entre la valeur observée et la valeur calculée correspondante, une équation telle que

$$(1) \qquad a_{1,h}x_1 + a_{2,h}x_2 + \ldots + a_{i,h}x_i + \ldots + a_{m,h}x_m = \omega_h,$$

qui se rapporte à la $h^{\text{ième}}$ observation. Les coefficients $a_{i,h}$ sont des quantités connues, indépendantes des éléments x_1, x_2, etc. Les indices dont ils sont affectés marquent l'inconnue et l'équation auxquelles le coefficient appartient. Ainsi, $a_{3,7}$ est le coefficient de la troisième inconnue dans la septième équation.

Les équations en nombre n que représente l'expression (1) ne renfermant que m inconnues, il suffit qu'il s'en trouve m qui ne rentrent pas les unes dans les autres, pour qu'on puisse les résoudre par les

procédés ordinaires. Mais comme l'observation ne donne pas rigoureusement la valeur de la grandeur observée et qu'il s'y joint toujours quelque erreur, il est clair qu'il sera plus avantageux de faire servir, par une combinaison quelconque, toutes les équations obtenues à la détermination des inconnues, qu'il ne pourrait l'être d'en choisir m, peut-être sans motifs valables. Le bon sens suffit, en effet, pour faire présumer que, dans la réunion de tant de valeurs dont les erreurs sont dans tous les sens possibles, il se fera quelque compensation qui assurera aux inconnues des valeurs plus exactes que les solutions de m équations isolées.

Les combinaisons les plus ordinaires des équations du premier degré reviennent à les ajouter après les avoir multipliées respectivement par des facteurs arbitraires, qui servent à dégager les inconnues en se prêtant à diverses transformations. Appelant $K_{i,h}$ le facteur destiné à la $h^{ième}$ équation, on obtient une somme d'équations telle que

$$(2)\qquad x_1 S.K_{i,h} a_{1,h} + x_2 S.K_{i,h} a_{2,h} + \ldots + x_i S.K_{i,h} a_{i,h} + \ldots = S.K_{i,h} \omega_h.$$

et l'on aura immédiatement x_i si l'on assujettit les n facteurs $K_{i,1}$, $K_{i,2}, \ldots, K_{i,n}$ aux conditions ci-après, qui rendent nuls les coefficients de toutes les inconnues, excepté le coefficient de x_i qu'elles réduisent à l'unité :

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l}
S.a_{1,h} K_{i,h} = a_{1,1} K_{i,1} + a_{1,2} K_{i,2} + \ldots + a_{1,h} K_{i,h} + \ldots + a_{1,n} K_{i,n} = 0,\\
S.a_{2,h} K_{i,h} = a_{2,1} K_{i,1} + a_{2,2} K_{i,2} + \ldots + a_{2,h} K_{i,h} + \ldots + a_{2,n} K_{i,n} = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
S.a_{i',h} K_{i,h} = a_{i',1} K_{i,1} + a_{i',2} K_{i,2} + \ldots + a_{i',h} K_{i,h} + \ldots + a_{i',n} K_{i,n} = 0,\\
S.a_{i,h} K_{i,h} = a_{i,1} K_{i,1} + a_{i,2} K_{i,2} + \ldots + a_{i,h} K_{i,h} + \ldots + a_{i,n} K_{i,n} = 1,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
S.a_{m,h} K_{i,h} = a_{m,1} K_{i,1} + a_{m,2} K_{i,2} + \ldots + a_{m,h} K_{i,h} + \ldots + a_{m,n} K_{i,n} = 0.
\end{array}\right.$$

Il ne reste alors dans l'équation (2) que

$$x_i = S.\omega_h K_{i,h}.$$

Il faut remarquer que les facteurs $K_{i,h}$ étant au nombre de n ne

sont nullement déterminés par les conditions (3), puisque ces conditions ne sont qu'au nombre de m.

En prenant un autre système de n facteurs, qu'on désignerait de même par $K_{i,h}$, on obtiendrait semblablement la valeur de la première inconnue x_i, pourvu qu'on astreignît les n facteurs $K_{i,h}$ à m conditions semblables aux conditions (3) qui se rapportent à l'inconnue x_i.

Les m inconnues seront donc fournies par m systèmes de n facteurs, déterminés en partie par m systèmes de conditions tout à fait semblables, et en nombre m pour chaque élément inconnu. Comme les facteurs d'un système n'entrent pas dans les autres, les m^2 conditions ne détermineront qu'un nombre égal de facteurs sur les mn employés, et $n - m$ seront indépendants dans chaque système.

C'est de ces facteurs restés arbitraires qu'on disposera pour rendre les valeurs

$$x_i = S \cdot \omega_h K_{i,h}$$

le plus exactes possible; et c'est ce pour quoi il faut nécessairement recourir au calcul des probabilités, sous quelque forme qu'on le déguise.

Effectivement, la valeur des coefficients $K_{i,h}$, quelle qu'on voulût la fixer, ne modifierait en rien la valeur trouvée pour x_i en fonction de ces arbitraires, si les équations étaient rigoureusement exactes. Mais, puisqu'il s'attache toujours quelque erreur plus ou moins grande au résultat d'une observation, il faudrait, pour avoir des équations rigoureuses, retrancher de toutes les quantités ω_h les erreurs respectives ε_h dont elles sont affectées. On ne le peut pas, et la somme

$$x_i = S \cdot \omega_h K_{i,h}$$

reste affectée par suite d'une erreur

$$r_i = S \cdot \varepsilon_h K_{i,h}.$$

La grandeur de cette erreur dépendra, on le voit, du choix des coefficients K, et en même temps, de la loi de probabilité des erreurs possibles, qui aura régné dans le cours des observations.

Il y aurait à faire plus d'une remarque sur ce qu'on doit entendre

par cette loi de probabilité, et sur les moyens de suppléer à l'ignorance où l'observateur se trouve souvent à ce sujet. Mais il faut se borner ici au point unique en discussion. La loi des erreurs ε_h sera supposée connue.

Chacune des valeurs trouvées pour les inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_m$ sera entachée d'une erreur $r_1, r_2, \ldots, r_m$ respectivement, qui se présentera sous la forme qui vient d'être assignée à l'erreur r_i de l'élément x_i :

$$(4)\quad \begin{cases} r_1 = \mathrm{S}.\varepsilon_h \mathrm{K}_{1,h}, \\ r_2 = \mathrm{S}.\varepsilon_h \mathrm{K}_{2,h}, \\ r_3 = \mathrm{S}.\varepsilon_h \mathrm{K}_{3,h}, \\ \ldots\ldots\ldots \\ r_m = \mathrm{S}.\varepsilon_h \mathrm{K}_{m,h}. \end{cases}$$

La grandeur de chacune de ces erreurs résultera de ce qu'il s'est présenté pendant les observations un système d'erreurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_h, \ldots, \varepsilon_n$ plutôt qu'un autre, et l'on voit que toutes les erreurs r seront modifiées à la fois par les changements que pourra subir le système des erreurs ε. Chacune des erreurs ε est inconnue; mais si la loi en est connue, c'est-à-dire si l'on sait qu'à une erreur ε répond une certaine probabilité, la probabilité d'un système donné $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ d'erreurs dans l'ensemble des observations sera aussi connue et égale au produit des probabilités de chacune.

Ce produit sera donc la probabilité du système (4) des erreurs $r_1, r_2, \ldots, r_m$, puisque celles-ci sont déterminées toutes dès que les erreurs ε_h de chaque observation reçoivent des valeurs données.

Désignant par $\varphi\varepsilon$ la fonction qui exprime la probabilité de l'erreur ε, de sorte que $\varphi\varepsilon d\varepsilon$ soit cette probabilité infiniment petite, on aura, entre les limites dans lesquelles les erreurs peuvent s'étendre,

$$\int \varphi\varepsilon d\varepsilon = 1,$$

puisque c'est la somme des probabilités de tous les cas possibles. De plus, si l'on appelle μ_θ la moyenne des puissances θ de toutes les erreurs possibles, on aura

$$\int \varepsilon^\theta d\varepsilon \varphi\varepsilon = \mu_\theta.$$

Par exemple, la moyenne de toutes les erreurs possibles s'exprimera par

$$\mu_1 = \int \varepsilon \, d\varepsilon \, \varphi \varepsilon;$$

la moyenne de leurs carrés par

$$\mu_2 = \int \varepsilon^2 \, d\varepsilon \, \varphi \varepsilon, \text{ etc.}$$

La probabilité d'un système de valeurs $r_1, r_2, \ldots, r_m$ étant la probabilité de l'ensemble des valeurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ dont elles se composent, s'exprimera par le produit

$$\varphi \varepsilon_1 \, d\varepsilon_1 \times \varphi \varepsilon_2 \, d\varepsilon_2 \times \varphi \varepsilon_3 \, d\varepsilon_3 \times \ldots \times \varphi \varepsilon_n \, d\varepsilon_n.$$

Il ne reste plus qu'à déterminer les systèmes de valeurs des quantités r_i pour lesquels ce produit est le plus grand, et en dehors des limites desquels il devient dès lors très-peu probable que ces quantités puissent se trouver. L'on y parviendra évidemment si l'on emploie le procédé de Laplace, qui consiste à le multiplier par une fonction des erreurs $r_1, r_2, \ldots, r_m$ et de leurs composantes $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, telle que l'intégration subséquente, prise dans toute l'étendue de la probabilité, ne laisse subsister que la somme des valeurs correspondantes à certaines grandeurs données des $r_1, r_2, \ldots, r_m$. Ce procédé, dont Laplace a tant répété l'emploi sans en varier la forme, est au fond le même que Fourier, et plus récemment M. Lejeune-Dirichlet, ont reproduit d'une autre manière et avec un si grand succès. En suivant Laplace, au lieu de former d'abord la fonction limitative nécessaire, on considérera le produit

$$\begin{aligned}
P = \int_{n} & d\varepsilon_1 \varphi \varepsilon_1 \times d\varepsilon_2 \varphi \varepsilon_2 \times \ldots \times d\varepsilon_h \varphi \varepsilon_h \times \ldots \times d\varepsilon_n \varphi \varepsilon_n \\
& \times e^{\alpha_1 \sqrt{-1} (\varepsilon_1 K_{1,1} + \varepsilon_2 K_{1,2} + \varepsilon_3 K_{1,3} + \ldots + \varepsilon_n K_{1,n})} \\
& \times e^{\alpha_2 \sqrt{-1} (\varepsilon_1 K_{2,1} + \varepsilon_2 K_{2,2} + \varepsilon_3 K_{2,3} + \ldots + \varepsilon_n K_{2,n})} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& \times e^{\alpha_i \sqrt{-1} (\varepsilon_1 K_{i,1} + \varepsilon_2 K_{i,2} + \ldots + \varepsilon_n K_{i,n})} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& \times e^{\alpha_m \sqrt{-1} (\varepsilon_1 K_{m,1} + \varepsilon_2 K_{m,2} + \ldots + \varepsilon_n K_{m,n})}.
\end{aligned}$$

qui contient en exposant les erreurs des m inconnues

$$r_i = \varepsilon_1 K_{i,1} + \varepsilon_2 K_{i,2} + \ldots + \varepsilon_n K_{i,n} = S\,\varepsilon_h K_{i,h},$$

multipliées chacune par un argument spécial α_i, qui puisse permettre de la distinguer après l'intégration multiple, prise pour toute l'étendue dans laquelle les erreurs ε sont possibles. Si, après cette intégration relative aux ε, on veut se rendre compte du produit P, il faudra se le représenter comme n'étant plus fonction que des r, et sous la forme

$$P = \int_m dr_1\, dr_2 \ldots dr_m\, \Phi(r_1, r_2, \ldots, r_m)\, e^{r_1\alpha_1\sqrt{-1} + r_2\alpha_2\sqrt{-1} + \ldots + r_m\alpha_m\sqrt{-1}}.$$

expression dans laquelle la fonction Φ sera telle, qu'elle réunira les probabilités relatives à des valeurs égales du système des erreurs r. C'est réellement cette fonction, multipliée par le produit différentiel $dr_1\, dr_2 \ldots dr_m$, qui est la probabilité de ce système d'erreurs, et, si on la connaissait, il n'y aurait plus qu'à intégrer dans des limites convenables pour obtenir la probabilité cherchée. Pour déterminer la fonction Φ, il suffit de multiplier P successivement par une série de m intégrales de la forme

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha_i\, e^{-r_i\alpha_i\sqrt{-1}}.$$

car on sait que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha_i\, e^{-r_i\alpha_i\sqrt{-1}} \int du\, \Phi(u)\, e^{\alpha_i u\sqrt{-1}} = \Phi(r_i).$$

Si donc on répète cette opération presque mécanique pour tous les arguments α_i et les erreurs r_i, en nombre m, on obtiendra la loi de probabilité de ces erreurs. Ce sera le résultat Q que voici :

$$Q = \frac{1}{(2\pi)^m}\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha_1\, d\alpha_2 \ldots d\alpha_m\, e^{-r_1\alpha_1\sqrt{-1} - r_2\alpha_2\sqrt{-1} - \ldots - r_m\alpha_m\sqrt{-1}} \times P.$$

Partant, $Q\,dr_1\, dr_2 \ldots dr_m$ sera la probabilité du système $r_1, r_2, \ldots, r_m$ des erreurs des inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_m$; et intégrant entre les limites qui renferment les grandeurs de ces erreurs dont on voudra

connaître la probabilité commune, on obtiendra facilement cette probabilité, qui sera

$$p = {}_m\int dr_1\, dr_2 \ldots dr_m\, \mathrm{Q}.$$

On peut aisément reconnaître, si l'on veut, la composition de la fonction limitative qui n'a été introduite que successivement, et il serait superflu de s'y arrêter. Il reste à poursuivre ces intégrations successives.

A cet effet, on modifie le produit P en réunissant dans l'exposant tous les termes qui se rapportent à une même observation, et séparant les intégrales relatives aux $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{P} = &\int d\varepsilon_1\, \varphi\varepsilon_1\, e^{\varepsilon_1(\alpha_1 \mathrm{K}_{1,1} + \alpha_2 \mathrm{K}_{2,1} + \alpha_3 \mathrm{K}_{3,1} + \ldots + \alpha_m \mathrm{K}_{m,1})\sqrt{-1}} \\
&\times \int d\varepsilon_2\, \varphi\varepsilon_2\, e^{\varepsilon_2(\alpha_1 \mathrm{K}_{1,2} + \alpha_2 \mathrm{K}_{2,2} + \alpha_3 \mathrm{K}_{3,2} + \ldots + \alpha_m \mathrm{K}_{m,2})\sqrt{-1}} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\times \int d\varepsilon_h\, \varphi\varepsilon_h\, e^{\varepsilon_h(\alpha_1 \mathrm{K}_{1,h} + \alpha_2 \mathrm{K}_{2,h} + \alpha_3 \mathrm{K}_{3,h} + \ldots + \alpha_m \mathrm{K}_{m,h})\sqrt{-1}} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\times \int d\varepsilon_n\, \varphi\varepsilon_n\, e^{\varepsilon_n(\alpha_1 \mathrm{K}_{1,n} + \alpha_2 \mathrm{K}_{2,n} + \alpha_3 \mathrm{K}_{3,n} + \ldots + \alpha_m \mathrm{K}_{m,n})\sqrt{-1}}.
\end{aligned}$$

Isolant une de ces n intégrales, on peut l'écrire

$$\int d\varepsilon_h\, \varphi\varepsilon_h\, e^{\varepsilon_h\sqrt{-1}\,\Sigma\alpha_i \mathrm{K}_{i,h}},$$

et même, afin d'abréger, on peut représenter $\Sigma\alpha_i \mathrm{K}_{i,h}$, somme composée de m termes, par S_h, au moins provisoirement; on peut aussi supprimer l'indice h de ε, qui n'a été employé que pour la clarté. On aura, en développant l'exponentielle,

$$\int d\varepsilon\, \varphi\varepsilon\, e^{\varepsilon \mathrm{S}_h\sqrt{-1}} = \int d\varepsilon\, \varphi\varepsilon \left(1 + \varepsilon \mathrm{S}_h\sqrt{-1} - \frac{\varepsilon^2 \mathrm{S}_h^2}{2} - \frac{\varepsilon^3 \mathrm{S}_h^3}{6}\sqrt{-1} + \frac{\varepsilon^4 \mathrm{S}_h^4}{2.4} + \ldots\right),$$

et, en intégrant relativement à ε, qui est partout explicite, on aura

$$1 + \mu_1 \mathrm{S}_h\sqrt{-1} - \frac{\mu \mathrm{S}_h^2}{2} - \frac{\mu \mathrm{S}_h^3}{6}\sqrt{-1} + \frac{\mu_1 \mathrm{S}_h^4}{2.4} + \ldots.$$

à cause de

$$\int d\varepsilon\,\varphi\varepsilon = 1 \quad \text{et} \quad \int \varepsilon^2 d\varepsilon\,\varphi\varepsilon = \mu_2.$$

On pourra ensuite rétablir cette suite en exponentielle, ce qui donne

$$e^{\mu S_h \sqrt{-1} - \frac{S_h^2}{2}(\mu_2 - \mu_1^2) - \frac{S_h^3}{6}(\mu_3 - 3\mu_2\mu_1 + 2\mu_1^3)\sqrt{-1} + \frac{S_h^4}{24}(\mu_4 - 4\mu_3\mu_1 - 3\mu_2^2 + 12\mu_2\mu_1^2 - 6\mu_1^4) + \ldots}$$

Rien ne serait plus facile, on le voit, que de supposer la loi de probabilité $\varphi\varepsilon$ variable d'une observation à l'autre, et de conserver cette distinction dans le reste des calculs. Mais on reconnaîtra bientôt que la méthode des moindres carrés repose sur cette hypothèse, que les moyennes μ_1 et μ_2 des erreurs ε possibles et de leurs carrés, ne varient pas d'une observation à l'autre; de sorte que la variation de la loi de probabilité, réduite aux moyennes des puissances supérieures, aurait peu d'intérêt dans la question actuelle. Il n'en sera donc point tenu compte.

Dans cette hypothèse, le produit P étant formé d'intégrales toutes semblables, se présentera sous la forme

$$P = e^{\mu(S_1 + S_2 - \ldots + S_n)\sqrt{-1} - \frac{\mu_2 - \mu_1^2}{2}(S_1^2 + S_2^2 + \ldots + S_n^2) - \ldots},$$

les troisième et quatrième termes de l'exposant étant de même

$$-\frac{\mu_3 - 3\mu_2\mu_1 + 2\mu_1^3}{6}(S_1^3 + S_2^3 + \ldots + S_n^3)\sqrt{-1}$$

$$+\frac{\mu_4 - 4\mu_3\mu_1 - 3\mu_2^2 + 12\mu_2\mu_1^2 - 6\mu_1^4}{24}(S_1^4 + S_2^4 + \ldots + S_n^4).$$

Si l'on examine à présent chacune des suites qui entrent dans les différents termes, on verra sans peine que chaque variable α_i est multipliée dans l'une d'elles par tous les facteurs $K_{i,h}$ correspondant à la même inconnue x_i ou à la même erreur r_i. Ils pourront donc être réunis sous des formes symétriques, et, pour plus de clarté, il sera loisible d'attribuer aux sommes qui comprennent n termes le signe S plus spécialement, et à celles qui n'en renfermeront que m, le signe Σ.

On peut observer que les premières sont celles où l'ordre des observations en nombre n amène autant de lettres différentes; et que les secondes sont celles qui, dépendant de l'ordre des inconnues x_i en nombre m, ne sauraient comprendre que ce dernier nombre de lettres.

On a ainsi, comme précédemment,

$$S_h = \alpha_1 K_{1,h} + \alpha_2 K_{2,h} + \ldots + \alpha_i K_{i,h} + \ldots$$
$$+ \alpha_m K_{m,h} = \Sigma \alpha_i K_{i,h},$$

où la somme Σ est relative à l'indice i, qui lui-même ne varie que de 1 à m, nombre des inconnues. Il en résulte, pour la somme des premières puissances des S_h,

$$S_1 + S_2 + \ldots + S_h + \ldots + S_n = \Sigma \alpha_i K_{i,1} + \Sigma \alpha_i K_{i,2} + \ldots$$
$$+ \Sigma \alpha_i K_{i,h} + \ldots + \Sigma \alpha_i K_{i,n},$$

qu'on pourrait écrire $S = \Sigma \alpha_i K_{i,h})$, la somme finie S se rapportant à l'indice h.

Il est bien aisé de voir que

$$S = \Sigma \alpha_i (K_{i,1} + K_{i,2} + \ldots + K_{i,h} + \ldots + K_{i,n})$$
$$= \alpha_1 S K_{1,h} + \alpha_2 S_{2,h} + \ldots + \alpha_m S K_{m,h}$$
$$= \Sigma (\alpha_i S K_{i,h}).$$

De même, à cause de

$$S_h^2 = (\alpha_1 K_{1,h} + \alpha_2 K_{2,h} + \ldots + \alpha_m K_{m,h})^2 = (\Sigma \alpha_i K_{i,h})^2$$
$$= \alpha_1^2 K_{1,h}^2 + \alpha_2^2 K_{2,h}^2 + \ldots + \alpha_m^2 K_{m,h}^2$$
$$+ 2\alpha_1 K_{1,h} (\alpha_2 K_{2,h} + \alpha_3 K_{3,h} + \ldots + \alpha_m K_{m,h})$$
$$+ 2\alpha_2 K_{2,h} (\alpha_3 K_{3,h} + \ldots + \alpha_m K_{m,h})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ 2\alpha_{m-1} K_{m-1,h} (\alpha_m K_{m,h}),$$

on a

$$
\begin{aligned}
& S_1^2 + S_2^2 + \ldots + S_h^2 + \ldots + S_n^2 \\
&= \alpha_1^2 (K_{1,1}^2 + K_{1,2}^2 + K_{1,3}^2 + \ldots + K_{1,h}^2 + \ldots + K_{1,n}^2) \\
&+ \alpha_2^2 (K_{2,1}^2 + K_{2,2}^2 + K_{2,3}^2 + \ldots + K_{2,h}^2 + \ldots + K_{2,n}^2) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \alpha^2 (K_{,1}^2 + K_{m,2}^2 + \ldots + K_{m,h}^2 + \ldots + K_{m,n}^2) \\
&+ 2\alpha_1\alpha_2 (K_{1,1}K_{2,1} + K_{1,2}K_{2,2} + \ldots + K_{1,h}K_{2,h} + \ldots + K_{1,n}K_{2,n} \\
&+ 2\alpha_1\alpha_3 (K_{1,1}K_{3,1} + K_{1,2}K_{3,2} + \ldots + K_{1,h}K_{3,h} + \ldots + K_{1,n}K_{3,n}) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ 2\alpha_i\alpha_{i'} (K_{i,1}K_{i',1} + K_{i,2}K_{i',2} + \ldots + K_{i,h}K_{i',h} + \ldots + K_{i,n}K_{i',n}) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ 2\alpha_{m-1}\alpha_m (K_{m-1,1}K_{m,1} + \ldots + K_{m-1,h}K_{m,h} + \ldots + K_{m-1,n}K_{m,n}),
\end{aligned}
$$

ou, en abrégeant,

$$
\begin{aligned}
&= \alpha_1^2 SK_{1,h}^2 + \alpha_2^2 SK_{2,h}^2 + \alpha_3^2 SK_{3,h}^2 + \ldots + \alpha_m^2 SK_{,h}^2 \\
&+ 2\alpha_1 (\alpha_2 SK_{1,h}K_{2,h} + \alpha_3 SK_{1,h}K_{3,h} + \ldots + \alpha_m SK_{1,h}K_{m,h} \\
&+ 2\alpha_2 (\alpha_3 SK_{2,h}K_{3,h} + \ldots + \alpha_m SK_{2,h}K_{m,h}) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\qquad\qquad + 2\alpha_{m-1}\alpha_m SK_{m-1,h}K_{m,h}.
\end{aligned}
$$

Ici les sommes des produits ont pu être aussi facilement désignées que les sommes de puissances, puisqu'il n'y a dans chaque somme qu'une seule variable. On abrégerait encore davantage en écrivant

$$\Sigma(\alpha_i^2 SK_{i,h}^2) + 2\Sigma(\alpha_i\alpha_{i'} SK_{i,h}K_{i',h}),$$

en ayant soin, pour former la seconde somme Σ, de ne prendre les indices i et i' que sous la condition $i < i'$, ou bien d'effacer le coefficient 2 qui la précède.

Passant aux S_h^3, il est visible que, suivant des remarques analogues

$$
\begin{aligned}
& S_1^3 + S_2^3 + \ldots + S_h^3 + \ldots + S_n^3 \\
&= \alpha_1^3 SK_{1,h}^3 + \alpha_2^3 SK_{2,h}^3 + \ldots + \alpha_m^3 SK_{m,h}^3 \\
&+ 3\alpha_1^2 (\alpha_2 SK_{1,h}^2 K_{2,h} + \alpha_3 SK_{1,h}^2 K_{3,h} + \ldots + \alpha_m SK_{1,h}^2 K_{m,h}) \\
&+ 3\alpha_2^2 (\alpha_1 SK_{2,h}^2 K_{1,h} + \alpha_3 SK_{2,h}^2 K_{3,h} + \ldots + \alpha_m SK_{2,h}^2 K_{m,h}) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ 6\alpha_1\alpha_2\alpha_3 SK_{1,h}K_{2,h}K_{3,h} + \ldots + 6\alpha_i\alpha_{i'}\alpha_{i''} SK_{i,h}K_{i',h}K_{i'',h} + \ldots \\
&\qquad\qquad + 6\alpha_{m-2}\alpha_{m-1}\alpha_m SK_{m-2,h}K_{m-1,h}K_{m,h} \\
&= \Sigma(\alpha_i^3 SK_{i,h}^3) + 3\Sigma(\alpha_i^2\alpha_{i'} SK_{i,h}^2 K_{i',h}) + 6\Sigma(\alpha_i\alpha_{i'}\alpha_{i''} SK_{i,h}K_{i',h}K_{i'',h}).
\end{aligned}
$$

Il est presque inutile de dire qu'il faut entendre par les sommes Σ relatives aux indices i, lorsqu'elles s'appliquent aux produits, toutes les combinaisons possibles, sans double emploi.

Arrivant enfin aux S_h^4, on aura absolument de la même manière,

$$S_1^4 + S_2^4 + \ldots + S_h^4 + \ldots + S_m^4 = S\left(\Sigma \alpha_i K_{i,h}\right)^4$$

$$= S\left(\begin{array}{l} \Sigma \alpha_i^4 K_{i,h}^4 + 4\Sigma \alpha_i^3 \alpha_{i'} K_{i,h}^3 K_{i',h} + 6\Sigma \alpha_i^2 \alpha_i^2 K_{i,h}^2 K_{i',h}^2 \\ \quad + 12\Sigma \alpha_i^2 \alpha_{i'} \alpha_{i''} K_{i,h}^2 K_{i',h} K_{i'',h} \\ \quad + 24\Sigma \alpha_i \alpha_{i'} \alpha_{i''} \alpha_{i'''} K_{i,h} K_{i',h} K_{i'',h} K_{i''',h} \end{array}\right)$$

$$= \Sigma\left(\alpha_i^4 S K_{i,h}^4\right) + 4\Sigma\left(\alpha_i^3 \alpha_{i'} S K_{i,h}^3 K_{i',h}\right) + 6\Sigma\left(\alpha_i^2 \alpha_i^2 S K_{i,h}^2 K_{i',h}^2\right)$$
$$+ 12\Sigma\left(\alpha_i^2 \alpha_{i'} \alpha_{i''} S K_{i,h}^2 K_{i',h} K_{i'',h}\right)$$
$$+ 24\Sigma\left(\alpha_i \alpha_{i'} \alpha_{i''} \alpha_{i'''} S K_{i,h} K_{i',h} K_{i'',h} K_{i''',h}\right).$$

Il était utile de montrer les formes des troisième et quatrième termes de l'exposant, afin qu'on pût reconnaître pour quels motifs très-différents ils sont négligés dans les applications.

En désignant par T_1, T_2, T_3, T_4 les termes de l'exposant de e, qui viennent d'être développés, le produit P peut s'écrire

$$P = e^{T_1\sqrt{-1} - \frac{1}{2}T_2 - \frac{1}{6}T_3\sqrt{-1} + \frac{1}{24}T_4 + \ldots}$$

$$= e^{T_1\sqrt{-1} - \frac{1}{2}T_2}\left(1 - \frac{1}{6}T_3\sqrt{-1} + \frac{1}{24}T_4 + \ldots - \frac{1}{72}T_3^2 - \ldots\right),$$

en s'arrêtant aux termes du quatrième degré en α_i, comme précédemment.

Il ne restera donc plus à intégrer que relativement à ces variables, pour obtenir la fonction Q, qui se présente sous la forme

$$Q = \frac{1}{2\pi^m}\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha_1\, d\alpha_2 \ldots d\alpha_m\, e^{-r_1\alpha_1\sqrt{-1} - r_2\alpha_2\sqrt{-1} - \ldots - r_m\alpha_m\sqrt{-1}} \times P$$

$$= \frac{1}{2\pi^m}\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha_1\, d\alpha_2 \ldots d\alpha_m\, e^{-\Sigma r_i\alpha_i\sqrt{-1} + \sqrt{-1}\,\mu_i\Sigma\,\alpha_i S K_{i,h} - \frac{1}{2}T_2}\left(1 - \frac{\sqrt{-1}}{6}T_3 - \ldots\right)$$

Il est visible que les premières puissances des α peuvent se mettre

en facteur commun, et que l'exposant de e est égal à

$$-\alpha_1\sqrt{-1}\,(r_1-\mu_1 \mathrm{SK}_{1,k})-\alpha_2\sqrt{-1}\,(r_2-\mu_1 \mathrm{SK}_{2,k})-\ldots$$
$$-\alpha_m\sqrt{-1}\,(r_m-\mu_1 \mathrm{SK}_{m,k})-\frac{1}{2}\mathrm{T}_2$$

Laplace et plusieurs autres géomètres ont supposé la moyenne μ_1 réduite à zéro. Mais cette condition simplifie très-peu les calculs, et elle oblige en quelque sorte à les recommencer quand cette moyenne ne peut être considérée comme nulle. On allègue, à la vérité, que, dans un système d'observations bien dirigées, cette moyenne μ_1, qui est une véritable erreur constante, a dû être reconnue et retranchée des valeurs observées. N'est-il pas possible, au contraire, qu'on ne fasse les observations que pour déterminer les erreurs constantes, et qu'on doive conserver μ_1, qui est alors la chose cherchée. Ici, pour conserver la facilité de reprendre cette moyenne, bien que la recherche de sa valeur, d'après les observations mêmes, ne doive pas faire un sujet d'examen, il suffira de réduire à une seule lettre les termes de la forme $r_i-\mu_1 \mathrm{SK}_{i,k}$. On introduira ainsi au lieu des erreurs r d'autres quantités qui n'en différeront que de quantités constantes. On peut écrire, par exemple,

$$(5)\qquad r_i-\mu_1 \mathrm{SK}_{i,k}=\rho_i\sqrt{2(\mu_2-\mu_1^2)};$$

de sorte qu'une erreur r_i se calculera par la relation

$$r_i=\mu_1 \mathrm{SK}_{i,k}+\rho_i\sqrt{2(\mu_2-\mu_1^2)},$$

et

$$dr_i=d\rho_i\sqrt{2(\mu_2-\mu_1^2)}.$$

De cette manière, on voit que

$$\Omega=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}m}}\int_{-\infty}^{\infty}d\alpha_1\,d\alpha_2\ldots d\alpha_m\,e^{-\sqrt{-1}\sqrt{2(\mu_2-\mu_1^2)}\,\Sigma\rho_i\alpha_i-\frac{1}{2}\mathrm{T}_2}\left(1-\frac{\sqrt{-1}}{6}\mathrm{T}_3+\ldots\right).$$

Si l'on fait subir aux α_i un changement analogue, c'est-à-dire qu'on pose

$$\alpha_i=z_i\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}(\mu_2-\mu_1^2)}},\quad d\alpha_i=\frac{dz_i}{\sqrt{\frac{1}{2}(\mu_2-\mu_1^2)}},$$

il en résultera

$$dr_i\,d\alpha_i = d\rho_i\sqrt{2(\mu_2-\mu_1^2)}\times\frac{dz_i}{\sqrt{\frac{1}{2}(\mu-\mu_1^2)}} = 2\,d\rho_i\,dz_i.$$

De plus, le facteur $\frac{1}{2}(\mu_2-\mu_1^2)$ disparaîtra du terme $\frac{1}{2}T_2$; de sorte que la probabilité du système d'erreurs désignées par ρ_i ou par

$$r_i = \mu_1 SK_{i,h} + \rho_i\sqrt{2(\mu_2-\mu_1^2)},$$

qui est égale à

$$p = {}_m\!\int dr_1\,dr_2\ldots dr_m\,Q,$$

se calculera par la formule

$$p = \frac{1}{\pi^m}\int d\rho_1\,d\rho_2\ldots d\rho_m\int_{-\infty}^{\infty} dz_1\,dz_2\ldots dz_m\,e^{-2\sqrt{-1}\,\Sigma\rho_i z_i - Z}\left(1-\frac{\sqrt{-1}}{6}Z+\frac{1}{24}Z_2-\frac{1}{72}Z_3\right).$$

en écrivant Z_2, Z_3, Z_4, pour abréger, au lieu des termes suivants que donne le changement des α_i en $\frac{z_i}{\sqrt{\frac{1}{2}(\mu_2-\mu_1^2)}}$. On avait

$$\frac{1}{2}T_2 = \frac{\mu_2-\mu_1^2}{2}\left[\Sigma(\alpha_i^2 SK_{i,h}^2) + 2\Sigma(\alpha_i\alpha_{i'}SK_{i,h}K_{i',h})\right];$$

et l'on aura plus simplement

$$Z_2 = \Sigma(z_i^2 SK_{i,h}^2) + 2\Sigma(z_i z_{i'} SK_{i,h}K_{i',h}).$$

De même,

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} Z_3 &= 2^3\frac{\mu_3-3\mu_2\mu_1+2\mu_1^3}{(\mu_2-\mu_1^2)^{\frac{3}{2}}}\left\{\begin{aligned}&\Sigma(z_i^3 SK_{i,h}^3) + 3\Sigma(z_i^2 z_{i'} SK_{i,h}^2 K_{i',h})\\ &+ 6\Sigma(z_i z_{i'} z_{i''} SK_{i,h}K_{i',h}K_{i'',h})\end{aligned}\right\},\\ Z_4 &= 4\frac{\mu_4-4\mu_3\mu_1-3\mu_2^2+12\mu_2\mu_1^2-6\mu_1^4}{(\mu_2-\mu_1^2)^2}\left\{\begin{aligned}&\Sigma(z_i^4 SK_{i,h}^4) + 4\Sigma(z_i^3 z_{i'} SK_{i,h}^3 K_{i',h})\\ &+ 6\Sigma(z_i^2 z_{i'}^2 SK_{i,h}^2 K_{i',h}^2)\\ &+ 12\Sigma(z_i z_{i'} z_{i''} SK_{i,h}^2 K_{i',h}K_{i'',h})\\ &+ 24\Sigma(z_i z_{i'} z_{i''} z_{i'''} SK_{i,h}K_{i',h}K_{i'',h}K_{i''',h})\end{aligned}\right\}.\end{aligned}\right.$$

Il est bien aisé de remarquer que les sommes désignées par S contenant n termes seront de la forme nM, M étant une valeur commune

de ces termes. De sorte qu'il suffira, pour rendre très-petites les parties qui les contiennent, de donner aux variables z des dénominateurs dans lesquels se trouvent n à une puissance supérieure à la première, et une valeur commune M à peu près équivalente. On sait que c'est là ce qui arrive dans l'analyse de Laplace.

Pour abréger encore l'écriture de l'exposant de e et pour le développer, on pourra mettre indifféremment

$$b_{i,i'} = \mathrm{SK}_{i,h}\,\mathrm{K}_{i',h} = b_{i',i},$$

ce qui entraîne

$$b_{i,i} = \mathrm{SK}^2_{i,h}.$$

De cette manière, l'exposant sera

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l}
-2\rho_1 z_1\sqrt{-1} - 2\rho_2 z_2\sqrt{-1} - \ldots - 2\rho_i z_i\sqrt{-1} - \ldots - 2\rho_m z_m\sqrt{-1} \\
-z_1^2 b_{1,1} - 2z_1(z_2 b_{1,2} + z_3 b_{1,3} + \ldots + z_i b_{1,i} + \ldots + z_m b_{1,m}) \\
\qquad -z_2^2 b_{2,2} - 2z_2(z_3 b_{2,3} + \ldots + z_i b_{2,i} + \ldots + z_m b_{2,m}) \\
\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad\qquad -z_i^2 b_{i,i} - 2z_i(z_{i+1} b_{i,i+1} + \ldots + z_m b_{i,m}) \\
\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad -z_m^2 b_{m,m}.
\end{array}\right.$$

Si maintenant on fait à la fois

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l}
\xi_1 = z_1 h_{1,1} + z_2 h_{1,2} + z_3 h_{1,3} + \ldots + z_i h_{1,i} + \ldots + z_m h_{1,m} + t_1\sqrt{-1}, \\
\xi_2 = \qquad\quad + z_2 h_{2,2} + z_3 h_{2,3} + \ldots + z_i h_{2,i} + \ldots + z_m h_{2,m} + t_2\sqrt{-1}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\xi_i = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + z_i h_{i,i} + \ldots + z_m h_{i,m} + t_i\sqrt{-1}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\xi_m = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + z_m h_{m,m} + t_m\sqrt{-1},
\end{array}\right.$$

et qu'après avoir élevé au carré chacune des nouvelles variables ξ_i, on en fasse la somme, il ne s'y trouvera que quatre espèces de termes :

En z_i^2 dont le coefficient sera

$$h_{1,i}^2 + h_{2,i}^2 + \ldots + h_{i-1,i}^2 + h_{i,i}^2,$$

et contiendra i termes;

En $2z_i z_{i'}$ dont le coefficient sera de même

$$h_{1,i}h_{1,i'} + h_{2,i}h_{2,i'} + \ldots + h_{i-1,i}h_{i-1,i'} + h_{i,i}h_{i,i'},$$

contenant i termes;

En $-2z_i\sqrt{-1}$ multiplié par l'expression variable

$$t_1 h_{1,i} + t_2 h_{2,i} + \ldots + t_i h_{i,i},$$

contenant encore i termes;

Et, enfin, les m carrés des t_i pris négativement.

Si donc on fait les coefficients des z_i^2 égaux à ceux que ces variables ont dans l'exposant de e, et qu'on agisse de même pour les coefficients des doubles produits; ce qui donnera

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{l}
b_{1,1} = h_{1,1}^2, \quad b_{1,2} = h_{1,1}h_{1,2}, \quad b_{1,3} = h_{1,1}h_{1,3}, \\
\qquad\qquad b_{2,2} = h_{1,2}^2 + h_{2,2}^2, \quad b_{2,3} = h_{1,2}h_{1,3} - h_{2,2}h_{2,3}, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad b_{3,3} = h_{1,3}^2 + h_{2,3}^2 + h_{3,3}^2, \\
b_{1,4} = h_{1,1}h_{1,4}, \\
b_{2,4} = h_{1,2}h_{1,4} + h_{2,2}h_{2,4}, \\
b_{3,4} = h_{1,3}h_{1,4} + h_{2,3}h_{2,4} + h_{3,4}h_{3,4}, \\
b_{4,4} = h_{1,4}^2 + h_{2,4}^2 + h_{3,4}^2 + h_{4,4}^2, \\
b_{1,i} = h_{1,1}h_{1,i}, \\
b_{2,i} = h_{1,2}h_{1,i} + h_{2,2}h_{2,i}, \\
b_{3,i} = h_{1,3}h_{1,i} + h_{2,3}h_{2,i} + h_{3,3}h_{3,i}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
b_{i,i'} = h_{1,i}h_{1,i'} + h_{2,i}h_{2,i'} + h_{3,i}h_{3,i'} + \ldots + h_{i',i}h_{i',i}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
b_{i,i} = h_{1,i}^2 + h_{2,i}^2 + h_{3,i}^2 + \ldots + h_{i',i}^2 + \ldots + h_{i,i}^2,
\end{array}\right.$$

relations dont la loi est facile à saisir; puis, qu'on assujettisse les nouvelles variables t_i, qui seules multiplient les premières puissances

des z_i, aux conditions

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{l} \rho_1 = t_1\, h_{1,1}, \\ \rho_2 = t_1\, h_{1,2} + t_2\, h_{2,2}, \\ \rho_3 = t_1\, h_{1,3} + t_2\, h_{2,3} + t_3\, h_{3,3}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \rho_i = t_1\, h_{1,i} + t_2\, h_{2,i} + t_3\, h_{3,i} + \ldots + t_i\, h_{i,i}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \rho_m = t_m\, h_{1,m} + t_2\, h_{2,m} + t_3\, h_{3,m} + \ldots + t_m\, h_{m,m}; \end{array}\right.$$

il est manifeste que la somme des carrés des variables ξ_i sera, sauf le signe, égale à la fonction des z_i et des ρ_i qui formait l'exposant (7), moins la somme des carrés des variables t_i. Ainsi l'exposant pourra être remplacé par la somme négative des carrés des variables nouvelles ξ_i et t_i.

D'un autre côté, les relations (8) et (10) assurent immédiatement

$$d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_m = dz_1\, dz_2 \ldots dz_m\, h_{1,1}\, h_{2,2} \ldots h_{m,m},$$
$$d\rho_1\, d\rho_2 \ldots d\rho_m = dt_1\, dt_2 \ldots dt_m\, h_{1,1}\, h_{2,2} \ldots h_{m,m};$$

de sorte que

$$d\rho_1\, d\rho_2\, d\rho_m \times dz_1\, dz_2 \ldots dz_m = dt_1\, dt_2 \ldots dt_m \times d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_m.$$

Partant, les variables se trouvent complétement séparées dans l'intégrale multiple, les limites des ξ_i restant infinies, comme celles des z_i ou des α_i dont elles dérivent; et l'on obtient la probabilité

$$p = \frac{1}{\pi^m}\left\{\begin{array}{l} {}_m\!\int dt_1\, dt_2 \ldots dt_m\, e^{-t_1^2 - t_2^2 - \ldots - t_m^2} \\ \times\, {}_m\!\int_{-\infty}^{\infty} d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_m\, e^{-\xi_1^2 - \xi_2^2 - \ldots - \xi_m^2}\left(1 - \frac{\sqrt{-1}}{6} Z_3 + \frac{1}{24} Z_4 - \frac{1}{72} Z_3^2\right) \end{array}\right\}.$$

Dans cette nouvelle expression, l'intégrale multiple relative aux ξ s'obtient sans autre peine que d'écrire, attendu les valeurs connues

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, e^{-\xi^2} = \sqrt{\pi}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \xi^{2i+1}\, d\xi\, e^{-\xi^2} = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi^{2i}\, d\xi\, e^{-\xi^2} = \frac{1.3.5\ldots 2i-1}{2.2.2\ldots 2}\sqrt{\pi}.$$

On aura donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_m\, e^{-\xi_1^2-\xi_2^2-\ldots-\xi_m^2} = (\sqrt{\pi})^m.$$

Mais, lorsque la fonction sous le signe sera multipliée par les quantités représentées dans l'équation (6) par Z_3 et Z_4 ou par Z_3^2, le résultat sera moins simple. On reconnaît sur-le-champ qu'il ne contiendra que les parties de ces expressions multipliées par des puissances paires de ξ, les puissances impaires disparaissant. Il en ressort que Z_3 se changera en une fonction $B_3(\sqrt{\pi})^m$ des t_i, ne renfermant que les puissances première, deuxième et troisième de ces nouvelles variables; Z_4 deviendra $B_4(\sqrt{\pi})^m$ et ne contiendra que les puissances zéro, première, deuxième, troisième et quatrième; enfin Z_3^2 devenant $B_6(\sqrt{\pi})^m$ offrira les puissances zéro, première, deuxième, troisième, quatrième, cinquième et sixième des t_i. Ces termes ne seront pas développés, uniquement pour abréger.

D'après toutes ces remarques, il reste pour la probabilité

$$p = \frac{1}{\sqrt{\pi}^m} \int_m dt_1\, d_2 \ldots dt_m\, e^{-t_1^2-t_2^2-\ldots-t_m^2} \left(1 - \frac{1}{6} B_3 + \frac{1}{24} B_4 - \frac{1}{72} B_6\right).$$

Une seule difficulté semblerait peut-être entraver cette transformation, si l'on écarte, bien entendu, celles qui tiennent au procédé de Laplace, dont il ne sera pas question ici. La difficulté dont il s'agit, c'est celle qui porterait sur la détermination des arbitraires $h_{i,i'}$, lesquelles ne sont déduites des coefficients $b_{i,i'}$ que par des équations du deuxième degré (9), et pourraient devenir imaginaires. Mais c'est là ce qui ne saurait arriver, attendu que la fonction du deuxième degré en $z_1, z_2, \ldots, z_m$ est une somme de carrés, comme on peut s'en convaincre; et cette forme permet d'y appliquer la marche suivie dans un Mémoire présenté à l'Académie des Sciences en 1834 (tome VI du *Recueil des Savants étrangers*). La transformation successive des variables mettrait en évidence les sommes de carrés qui seules entrent dans les radicaux, et les rendent nécessairement réels.

Ramenée par tout ce qui précède à ne plus contenir que des inte-

grales de la forme

$$\int dt\, e^{-t^2} t^n,$$

rien ne sera plus facile que d'obtenir la probabilité p lorsque les limites des variables t_i seront déduites, au moyen des relations (10), de celles qu'on voudra assigner aux erreurs ρ_i. Les grandeurs de ces dernières sont arbitraires; mais on voit que la grandeur assignée à l'une d'elles influera sur la forme de toutes les autres, ou tout au moins sur la forme de celles qui la suivent dans l'ordre des relations (10). Si l'on voulait que les variables ρ_i fussent seulement proportionnelles aux termes $t_i h_{i,i}$, qui n'entrent qu'une fois dans chacune respectivement, on n'y parviendrait qu'en assignant aux variables t_i dans l'intégrale p des limites qui dépendraient de ces variables; si bien qu'il ne serait possible d'évaluer p que par des approximations très-pénibles. Mais il existe des combinaisons d'erreurs dont la probabilité peut, au contraire, s'exprimer sans trop de difficultés.

Ce sont celles pour lesquelles l'exposant de e ne peut prendre que les valeurs inférieures à une certaine constante γ^2. On voit qu'il faut intégrer p dans cette hypothèse pour toutes les valeurs des t_i qui satisfont à la condition

$$t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_i^2 + \ldots + t_m^2 < \gamma^2.$$

On y parviendra par plusieurs méthodes bien connues. Il pouvait se trouver quelque intérêt, il y a quinze ou vingt ans, lors de la première recherche sur ce sujet, à développer ces procédés. Il suffira aujourd'hui de montrer qu'il n'est besoin que d'intégrations très-simples.

En opérant successivement sur les variables t_i, on aurait à intégrer chacune d'elles entre les limites égales et de signes contraires

$$t_i = \pm \sqrt{\gamma^2 - t_1^2 - t_2^2 - \ldots - t_{i-1}^2}.$$

Or, entre de semblables limites, il est visible que l'intégration relative à la fonction qui a été désignée par B_3 donnera un résultat nul. B_3 provient effectivement de Z_3, où il n'entrait que des produits de degré impair des z_i, et où il n'est resté que les termes affectés de puis-

sances paires des ξ_i, c'est-à-dire ceux qui offrent des puissances impaires des t_i. Ils donneront lieu à des intégrations de la forme

$$\int_{-c}^{c} dt\, e^{-t^2}\, t^{2n-1} = 0.$$

Ainsi, tout ce qui est relatif à B_3 disparaîtra.

Quant à B_1 et B_5, il s'y trouve des produits de puissances paires des t_i, et les puissances impaires seront affectées de $\sqrt{-1}$; celles-ci feront disparaître les termes imaginaires où elles se rencontrent. Mais l'intégration laissera subsister tous les termes où il n'entre que des puissances paires. Le résultat ne sera donc pas nul. Seulement, tous les termes de ces fonctions acquièrent, par la substitution des valeurs de z_i en fonction des ξ_i et t_i, des diviseurs qui contiennent les carrés des sommes finies des facteurs $K_{i,h}$, lesquels sont au nombre de n dans chaque somme. Ainsi, quand le nombre n des observations sera très-grand, chacun des termes sera de l'ordre très-petit $\frac{1}{n}$. Il serait superflu de s'arrêter sur ce point dans la question présente. On sait assez que c'est là précisément la forme qu'amène l'analyse de Laplace. Il n'y aurait à le montrer par le calcul même, d'autre difficulté que la longueur de l'écriture de ces expressions assez complexes. Toutefois, il faut faire observer que, quand il y a m éléments ou inconnues, et non une seule, le nombre de ces termes de l'ordre de $\frac{1}{n}$ dépend du nombre m. De sorte que l'ensemble de ces termes n'est que de l'ordre de $\frac{m}{n}$. Il est donc indispensable, puisque l'on néglige constamment cette partie de l'intégrale, de s'assurer que $\frac{n}{m}$ est un grand nombre: assez grand surtout pour contre-balancer l'influence des puissances de γ qui entrent dans ces termes jusqu'à γ^6. Ce sera donc dans les applications une condition à ne pas oublier, que $\gamma^6 \frac{m}{n}$ reste de l'ordre des quantités qu'on croira pouvoir se permettre de négliger. S'il n'en est pas ainsi, on ne pourrait s'assurer quelque exactitude que pour de petites valeurs de γ; et c'est ce qui n'a pas toujours été fait avec l'attention que ce point mérite.

D'après ces considérations, il ne reste plus à s'occuper que de la formule d'approximation

$$p = \frac{1}{(\sqrt{\pi})^m}\, {}_m\!\int dt_1\, dt_2 \ldots dt_m\, e^{-t_1^2 - t_2^2 - \ldots - t_m^2}.$$

Entre les limites égales et de signes contraires, il est palpable que les valeurs négatives des t_i donnent des résultats égaux à ceux que produisent les valeurs positives. On peut donc doubler le résultat de chaque intégration, ou multiplier l'intégrale ci-dessus par 2^m, et ne faire le calcul que de zéro aux limites positives. C'est ce qui s'exécute facilement en transformant d'abord l'une des variables t_m par exemple, au moyen de la relation

$$t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_m^2 = u^2,$$

$$t_m = \sqrt{u^2 - t_1^2 - t_2^2 - \ldots - t_{m-1}^2},$$

$$t_m\, dt_m = u\, du,$$

$$dt_m = \frac{u\, du}{\sqrt{u^2 - t_1^2 - t_2^2 - \ldots - t_{m-1}^2}};$$

qui entraîne pour les limites de u les valeurs zéro et γ. L'expression de p se ramène ainsi à

$$p = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^m \int_0^\gamma u\, du\, e^{-u^2}\, {}_{m-1}\!\int \frac{dt_1\, dt_2 \ldots dt_{m-1}}{\sqrt{u^2 - t_1^2 - t_2^2 - \ldots - t_{m-1}^2}},$$

et sous cette forme il suffit de la seule intégrale vraiment élémentaire,

$$\int_0^{\sqrt{a}} dt\, t^\eta (a - t^2)^{\frac{\delta}{2}} = a^{\eta + \frac{\delta+1}{2}} \frac{\Gamma\left(\eta + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\delta}{2} + 1\right)}{2\Gamma\left(\eta + 1 + \frac{\delta+1}{2}\right)},$$

pour réduire l'intégrale multiple. Les fonctions gamma n'ont ici pour objet que d'abréger l'écriture. La formule qui les contient est proprement celle qui sert à réduire les termes renfermés dans B_4 et B_6. Il faut y faire $\eta = 0$, pour l'appliquer à la valeur approximative de p.

Elle devient, dans ce cas particulier,

$$\int_0^{\sqrt{a}} dt\,(a-t^2)^{\frac{\delta}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, a^{\frac{\delta+1}{2}}\, \frac{\Gamma\left(\frac{\delta}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\delta+1}{2}+1\right)}.$$

Employant $(m-1)$ fois cette expression, en ayant soin de donner successivement à a les valeurs $(u^2 - t_1^2 - t_2^2 - \ldots - t_i)$, qui résultent de la disparition d'une des variables t_i à chaque opération, on obtiendra

$$\int_{m-1} \frac{dt\,dt_1 \ldots dt_{m-1}}{\sqrt{u^2 - t_1^2 - t_2^2 - \ldots - t_{m-1}^2}} = u^{m-2}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{m-1} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} \times \frac{\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \times \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(2)} \times \ldots \times \frac{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}$$

$$= u^{m-1}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^m \frac{2}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}.$$

Substituant dans p, il en résulte

$$p = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \int_0^{\gamma} u^{m-1}\, du\, e^{-u^2}.$$

Ce résidu fort simple reçoit deux formes très-différentes selon que le nombre m des éléments ou des inconnues est pair ou impair. Il est très-digne de remarque qu'au point de vue du calcul numérique, la probabilité soit plus simplement exprimée quand il se présente un nombre pair d'inconnues, que lors même qu'il s'agit d'une seule.

On sait effectivement que

$$\int_0^{\gamma} u^{m-1}\, du\, e^{-u^2} = -\gamma^{m-2}\frac{e^{-\gamma^2}}{2} - \frac{m-2}{2}\gamma^{m-4}\frac{e^{-\gamma^2}}{2} - \frac{m-2}{2}\cdot\frac{m-4}{2}\gamma^{m-6}\frac{e^{-\gamma^2}}{2} - \ldots$$

$$- \frac{m-2}{2}\cdot\frac{m-4}{2}\cdots\frac{m-2i}{2}\gamma^{m-2i-2}\frac{e^{-\gamma^2}}{2}$$

$$+ \frac{m-2}{2}\cdot\frac{m-4}{2}\cdots\frac{m-2i}{2}\,\frac{m-2i-2}{2}\int_0^{\gamma} u^{m-2i-3}\, du\, e^{-u^2}.$$

De sorte que, pour $m = 2g$,

$$\int_0^\gamma u^{2g-1}\,du\,e^{-u^2} = \left\{\begin{array}{l} -\gamma^{2g-2} - \frac{2g-2}{2}\gamma^{2g-4} - \frac{2g-2}{2}\cdot\frac{2g-4}{2}\cdot\gamma^{2g-6} - \ldots \\ \qquad - \frac{2g-2}{2}\cdot\frac{2g-4}{2}\cdots\frac{2}{2} \end{array}\right\}\frac{e^{-\gamma^2}}{2} \\ \qquad + \frac{2g-2}{2}\cdot\frac{2g-4}{2}\cdots\frac{2}{2}\cdot\frac{1}{2},$$

qu'on peut écrire

$$\int_0^\gamma u^{2g-1}\,du\,e^{-u^2} = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{2g}{2}\right) - \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{2g}{2}\right)e^{-\gamma^2}\left[\frac{\gamma^{2g-2}}{\Gamma\left(\frac{2g}{2}\right)} + \frac{\gamma^{2g-4}}{\Gamma\left(\frac{2g-2}{2}\right)} + \ldots + \frac{\gamma}{\Gamma\left(\frac{4}{2}\right)} + 1\right];$$

et, pour $m = 2g - 1$,

$$\int_0^\gamma u^{2g-2}\,du\,e^{-u^2} = \left\{\begin{array}{l} -\gamma^{2g-3} - \frac{2g-3}{2}\gamma^{2g-5} - \frac{2g-3}{2}\cdot\frac{2g-5}{2}\gamma^{2g-7} - \ldots \\ \qquad - \frac{2g-3}{2}\cdot\frac{2g-5}{2}\cdots\frac{3}{2}\gamma \end{array}\right\}\frac{e^{-\gamma^2}}{2} \\ \qquad + \frac{2g-3}{2}\cdot\frac{2g-5}{2}\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^\gamma du\,e^{-u^2},$$

qui s'écrira aussi, à cause de $\Gamma\left(\frac{2g-1}{2}\right) = \frac{2g-3}{2}\cdot\frac{2g-5}{2}\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}$,

$$\int_0^\gamma u^{2g-2}\,du\,e^{-u^2} = \Gamma\left(\frac{2g-1}{2}\right)$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\gamma du\,e^{-u^2} - \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{2g-1}{2}\right)e^{\gamma^2}\left[\frac{\gamma^{2g-2}}{\Gamma\left(\frac{2g-1}{2}\right)} + \frac{\gamma^{2g-4}}{\Gamma\left(\frac{2g-3}{2}\right)} + \ldots + \frac{\gamma}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\right].$$

On aura donc enfin

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{l} p_{2g-1} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\gamma du\,e^{-u^2} - e^{-\gamma^2}\left[\frac{\gamma^{2g-3}}{\Gamma\left(\frac{2g-1}{2}\right)} + \frac{\gamma^{2g-5}}{\Gamma\left(\frac{2g-3}{2}\right)} + \ldots + \frac{\gamma}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} + \frac{\gamma}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\right], \\ p_{2g} = 1 - e^{-\gamma^2}\left[\frac{\gamma^{2g-2}}{\Gamma\left(\frac{2g}{2}\right)} + \frac{\gamma^{2g-4}}{\Gamma\left(\frac{2g-2}{2}\right)} + \ldots + \frac{\gamma}{\Gamma\left(\frac{4}{2}\right)} + \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2}{2}\right)}\right]. \end{array}\right.$$

Telles sont les expressions approchées de la probabilité que les

erreurs ρ_i (10), exprimées en fonctions des variables t_i, ne peuvent pas s'étendre au delà des limites assignées par la condition

$$(12) \qquad t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_m^2 < \gamma^2.$$

S'il n'y avait que trois variables, on pourrait exprimer cette condition en disant que les points qu'elles déterminent, quand on les regarde comme des coordonnées rectangulaires, ne sortent pas de la sphère de rayon γ. L'analogie conduit donc à dire que les variables t ne peuvent sortir de l'étendue de la relation analytique

$$t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_m^2 = \gamma^2,$$

qui ne permet à aucune d'excéder $\pm\gamma$.

On reconnaît sans doute déjà, dans les formes générales de la probabilité (11), combien elle sera différente selon le nombre des éléments; on voit qu'elle diminue pour une même valeur γ, à mesure que le nombre m des éléments s'accroît, et c'est ce qui doit être, conformément aux principes du calcul des probabilités rappelés au commencement de ce travail.

C'était là le but principal qu'il s'agissait d'atteindre; et, jusqu'à certain degré, il serait loisible de s'y arrêter. Car on reconnaît sans peine que les coefficients $K_{i,h}$ peuvent être ceux que donne la méthode des moindres carrés, puisque ceux-ci satisfont aux conditions peu nombreuses (3), qui seules sont imposées à ces facteurs $K_{i,h}$, pour qu'il en résulte des valeurs des inconnues.

Mais, comme les expressions des erreurs de ces éléments sont ici différentes de celles qui se trouvent répandues dans plusieurs ouvrages depuis les théories de M. Gauss et de Laplace, on se demanderait, sans nul doute, si les résultats de l'analyse précédente rendent ou non nécessaires les facteurs $K_{i,h}$ particuliers à la méthode des moindres carrés. Il semble donc indispensable de prouver que, sous les conditions posées, la valeur de la probabilité, ou plutôt les expressions des erreurs dans lesquelles toutes les difficultés de la question sont réunies, puisque la probabilité n'est qu'une pure constante qu'on peut calculer d'avance et dont on a des Tables, auxquelles il ne s'agit que d'appliquer des erreurs de grandeur donnée; il

semble indispensable de prouver que les erreurs ne seront les plus petites possible que quand on emploiera à l'élimination des inconnues les facteurs $K_{i,h}$ assignés par la méthode des moindres carrés. On verra alors clairement que l'omission commise sur la valeur de la probabilité des erreurs n'altérait que cette probabilité, et que la modification qui la répare (formules 11) n'apporte aucun changement au mode d'élimination prescrit par la méthode. C'est ce qui va être fait, avant de procéder à quelques applications numériques.

Mais dès à présent il convient de le redire, les formules (11) et (10) réparent l'omission complétement. On reconnaît, de plus, qu'elles s'appliquent à tous les systèmes d'élimination au moyen de facteurs ou de combinaisons linéaires des équations données par l'observation. Elles permettent ainsi de calculer l'erreur et la probabilité dans nombre de cas où l'on ne veut pas prendre toutes les peines qu'exige la méthode des moindres carrés.

Elles renferment effectivement le calcul de la probabilité d'un système de fonctions linéaires r_i (4) d'erreurs ε_h soumises à une loi de probabilité $\varphi(\varepsilon)$, quelle que soit l'origine de ces fonctions, et quelles que puissent être les déterminations des facteurs $K_{i,h}$. Ces formules offrent donc la solution d'une classe de problèmes assez étendue, dans lesquels la coexistence de plusieurs fonctions est nécessaire, et où l'on ne saurait dès lors avoir en vue que la probabilité de leur ensemble. Il est d'ailleurs assez digne de remarque que les expressions de la probabilité soient les mêmes que si les fonctions r_i ou ρ_i étaient indépendantes, et qu'il ne se fût agi que de faire le produit de leurs probabilités particulières, puis d'en déterminer la valeur sous la condition (12); il est bien entendu que, dans ce cas, les relations (10) ne subsisteraient pas. Mais il faut s'arrêter dans ces indications, et revenir à la méthode des moindres carrés.

§ III.

Il s'agit de rechercher quelles sont les valeurs des facteurs arbitraires $K_{i,h}$ qui donneront les plus étroites limites aux erreurs ρ_i pour une probabilité déterminée par la constante γ.

La question ne saurait se résoudre sans la connaissance de l'étendue

des valeurs que peut prendre une erreur ρ_i dépendant des t_i, selon les formules (10), quand les t_i sont soumises à la condition (12),

$$t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_m^2 < \gamma^2.$$

Qu'on suppose d'abord les variables t_i liées par la relation

$$t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t^2 = u,$$

et qu'on cherche la plus grande valeur que puisse recevoir

$$\rho_i = t_1 h_{1,i} + t_2 h_{2,i} + \ldots + t_i h_{i,i}$$

qui ne contient que i des m variables t. On pourra considérer ces i variables, quelles que soient d'ailleurs les $m - i$ restantes comme liées par l'équation

$$t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_i^2 = u - t_{i+1}^2 - t_{i+2}^2 - \ldots - t_m^2 = v.$$

Partant, on aura, pour la plus grande valeur de ρ_i, les conditions

$$\frac{d\rho_i}{dt_{i'}} = h_{i',i} + h_{i,i}\frac{dt_i}{dt_{i'}} = 0,$$

$$t_{i'}\,dt_{i'} + t_i\,dt_i = 0,$$

$t_{i'}$ étant l'une quelconque des i premières variables, v étant regardée comme constante relativement à ces variables, et t_i se trouvant fonction des $i - 1$ qui la précèdent. On déduit de là

$$h_{i',i} - h_{i,i}\frac{t_{i'}}{t_i} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{t_{i'}}{t_i} = \frac{h_{i',i}}{h_{i,i}}.$$

Il faudra donc que les $t_{i'}$ soient proportionnels aux $h_{i',i}$ correspondants. Posant

$$t_{i'} = f\,h_{i',i},$$

on en conclut

$$f^2(h_{1,i}^2 + h_{2,i}^2 + h_{3,i}^2 + \ldots + h_{i,i}^2) = v.$$

Or, en vertu de la dernière des relations (9), la somme qui multiplie f^2 est précisément égale au coefficient $b_{i,i}$; on a donc

$$f^2 b_{i,i} = v \quad \text{et} \quad f = \sqrt{\frac{v}{b_{i,i}}}.$$

La valeur la plus grande de ρ_i sera donc

$$\rho_i = f(h_{1,i}^2 + h_{2,i}^2 + \ldots + h_{i,i}^2)$$
$$= b_{i,i}\sqrt{\frac{v}{b_{i,i}}} = \sqrt{vb_{i,i}}.$$

Cette valeur sera, en effet, la plus grande absolument, car on peut s'assurer que le signe de la différentielle seconde totale est négatif ou positif, selon qu'on prend le facteur f positif ou négatif, c'est-à-dire selon qu'on prend ρ_i à sa limite positive ou à sa limite négative. Au lieu de calculer la différentielle seconde, ce qui n'est pas tres-compliqué, on abrégera cependant, en substituant $fh_{i',i} + \delta_{i'}$ dans ρ_i au lieu de $t_{i'}$, ce qui donne

$$\rho_i = f(h_{1,i}^2 + h_{2,i}^2 + \ldots + h_{i,i}^2) + \delta_1 h_{1,i} + \delta_2 h_{2,i} + \ldots + \delta_i h_{i,i}$$
$$= fb_{i,i} + \delta_1 h_{1,i} + \delta_2 h_{2,i} + \ldots + \delta_i h_{i,i}.$$

Faisant la même substitution dans v, il vient

$$v = f^2(h_{1,i}^2 + h_{2,i}^2 + \ldots + h_{i,i}^2)$$
$$+ 2f(\delta_1 h_{1,i} + \delta_2 h_{2,i} + \ldots + \delta_i h_{i,i})$$
$$+ \delta_1^2 + \delta_2^2 + \ldots + \delta_i^2,$$

et, par suite de la valeur de f^2, il ne reste que

$$\delta_1 h_{1,i} + \delta_2 h_{2,i} + \ldots + \delta_i h_{i,i} = -\frac{1}{2f}(\delta_1^2 + \delta_2^2 + \ldots + \delta_i^2)$$

Ainsi

$$\rho_i = f\left[b_{i,i} - \frac{1}{2}(\delta_1^2 + \delta_2^2 + \ldots + \delta_i^2)\right].$$

La valeur de

$$\rho_i = fb_{i,i}$$

est donc un maximum ou un minimum, suivant le signe de f, c'est-à-dire qu'elle est bien la plus grande absolument.

Il ne faut pas oublier, maintenant, que v a pour limite supérieure u, ce qui suppose que tous les t de t_{i+1} à t_m sont nuls. D'après cela, les limites extrêmes de ρ_i sont $\pm\sqrt{ub_{i,i}}$. Puis, comme u doit rester inférieur à γ^2, on voit que, définitivement, pour une probabi-

lité déterminée par la constante γ, cette constante fixe très-simplement l'étendue des limites des erreurs ρ_i sous la forme

$$\rho_i = \pm \gamma \sqrt{b_{i,i}}.$$

Au surplus, cette forme était bien facile à prévoir d'après la première des relations (10) et la symétrie de tout ce calcul. Il y a, en effet, dans les relations (10), une symétrie réelle qui dépend de ce qu'une des erreurs peut occuper, à volonté, un rang quelconque dans les transformations; si bien, qu'il est permis d'affirmer que ce qui peut se reconnaître sur l'erreur exprimée le plus simplement, a lieu nécessairement pour toutes. Mais l'apparence asymétrique des relations posées a fait préférer une preuve plus saisissable.

Si l'on se rappelle actuellement que $b_{i,i}$ n'a fait que remplacer $S.K^2_{i,h}$, on aura, pour les limites de ρ_i,

$$\rho_i = \pm \gamma \sqrt{S.K^2_{i,h}}.$$

Il ne reste, dès lors, pour restreindre le plus possible cette étendue des erreurs ρ_i, qu'à trouver les moyens de rendre un minimum la somme de carrés $S.K^2_{,h}$. Or on sait que c'est là une des propriétés des facteurs par lesquels on effectue l'élimination dans la méthode des moindres carrés.

On ne peut guère, pour le démontrer brièvement, prendre d'autre voie que la comparaison immédiate des coefficients $K_{i,h}$ qui servent à obtenir la valeur

$$x_i = S\omega_h K_{i,h},$$

avec les facteurs qui donneraient la même inconnue, d'après la méthode des moindres carrés.

Appelant ces facteurs $A_{i,h}$, il est clair qu'ils satisferont, comme les $K_{i,h}$, aux équations (3), dans lesquelles il suffirait de substituer une lettre à l'autre, et qu'on trouverait

$$x'_i = S\omega_h A_{i,h}.$$

Mais en même temps, si l'on avait opéré directement selon les prescriptions de la méthode en formant m équations, à l'aide de la multi-

plication successive des n équations (1) par les coefficients de chaque inconnue, ces m équations seraient

$$x_1 Sa_{1,h} a_{1,h} + x_2 Sa_{1,h} a_{2,h} + \ldots + x_t Sa_{1,h} a_{t,h} + \ldots = Sa_{1,h} \omega_h,$$

$$x_1 Sa_{2,h} a_{1,h} + x_2 Sa_{2,h} a_{2,h} + \ldots + x_t Sa_{2,h} a_{t,h} + \ldots = Sa_{2,h} \omega_h,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_1 Sa_{t,h} a_{1,h} + x_2 Sa_{t,h} a_{2,h} + \ldots + x_t Sa_{t,h} a_{t,h} + \ldots = Sa_{t,h} \omega_h,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_1 Sa_{m,h} a_{1,h} + x_2 Sa_{m,h} a_{2,h} + \ldots + x_t Sa_{m,h} a_{t,h} + \ldots = Sa_{m,h} \omega_h.$$

et l'on éliminerait en multipliant par m facteurs B_1, B_2, ..., B_t, ... B_m, qui seraient assujettis à autant de relations, telles que l'on eût

$$x'_t = B_1 Sa_{1,h} \omega_h + B_2 Sa_{2,h} \omega_h + \ldots + B_m Sa_{m,h} \omega_h,$$

ou la même valeur que par les coefficients $A_{t,h}$.

On pourra réunir en facteur commun tout ce qui multiplie ω_1, ω_2, ..., ω_n, et il en résultera

$$x' = \omega_1 \Sigma B_{t'} a_{t',1} + \omega_2 \Sigma B_{t'} a_{t',2} + \omega_3 \Sigma B_{t'} a_{t',3} + \ldots + \omega_h \Sigma B_{t'} a_{t',h} + \ldots$$
$$+ \omega_n \Sigma B_{t'} a_{t',n}.$$

En rapprochant cette forme de la précédente

$$x'_t = S\omega_h A_{t,h},$$

on reconnaît que les coefficients $A_{t,h}$, appliqués directement aux n équations données, sont liés aux facteurs B_1, B_2, etc., par la relation

$$A_{t,h} = \Sigma B_{t'} a_{t',h}.$$

Que maintenant on se reporte aux relations (3) des $K_{t,h}$ et qu'on en retranche un système de relations semblables dans lesquelles on aura mis $A_{t,h}$ à la place de $K_{t,h}$, ainsi que la remarque en a été faite tout à l'heure; la soustraction de deux relations correspondantes

donnera un système de m équations

$$\begin{aligned}
&Sa_{1,h}(K_{i,h} - A_{i,h}) = 0,\\
&Sa_{2,h}(K_{i,h} - A_{i,h}) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&Sa_{i',h}(K_{i,h} - A_{i,h}) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&Sa_{i,h}(K_{i,h} - A_{i,h}) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&Sa_{m,h}(K_{i,h} - A_{i,h}) = 0;
\end{aligned}$$

et il devient manifeste qu'en les multipliant par les facteurs $B_{i'}$ respectivement, puis les ajoutant toutes, elles donneront

$$S[(\Sigma B_{i'} a_{i',h})(K_{i,h} - A_{i,h})] = 0;$$

et, comme $\Sigma B_{i'} a_{i',h}$ n'est autre chose que $A_{i,h}$ dans la méthode des moindres carrés, il en résultera

$$S[A_{i,h}(K_{i,h} - A_{i,h})] = 0,$$

ou bien

$$SA_{i,h}K_{i,h} = SA^2_{i,h},$$

relation singulière entre les facteurs arbitraires $K_{i,h}$ et ceux que nécessite le minimum des carrés. De là rien n'est plus facile que de conclure l'identité

$$SK^2_{i,h} - 2SA_{i,h}K_{i,h} = SK^2_{i,h} - 2SA^2_{i,h},$$

puis

$$SK^2_{i,h} - SA^2_{i,h} = SK^2_{i,h} - 2SK_{i,h}A_{i,h} + SA^2_{i,h},$$

et

$$SK^2_{i,h} = SA^2_{i,h} + S(K_{i,h} - A_{i,h})^2,$$

expression par laquelle M. Gauss a démontré que, sous les relations (3), le minimum de la somme des carrés des facteurs $K_{i,h}$ a lieu quand ces facteurs sont précisément les facteurs $A_{i,h}$ assignés par la méthode de Legendre.

Cette méthode réduit donc les erreurs qui entreront nécessairement

dans les valeurs des x_i, aux plus étroites limites possibles, pour une probabilité donnée. Réciproquement, si un système de limites détermine une probabilité, comme la quantité γ qui sert à la calculer sera liée à toutes les limites par la relation

$$\rho_i = \gamma \sqrt{S.K_{i,h}^2}.$$

il est palpable que γ sera un maximum pour le minimum de $S.K_{i,h}^2$, ou pour le résultat de la méthode des moindres carrés; de sorte qu'un système de limites étant choisi, la probabilité que les erreurs n'en sortiront pas sera la plus grande possible, quand on aura déterminé les inconnues par cette méthode.

Il a déjà été dit effectivement que, dans les formules (11), la valeur de p est croissante avec γ. C'est ce qu'on reconnaîtrait immédiatement par la différentiation de ces formules qui, toutes deux, lorsque m est le nombre $2g$ ou $2g-1$ des éléments, ont pour dérivées la quantité

$$\frac{dp_m}{d\gamma} = 2e^{-\gamma^2}\frac{\gamma^{m-1}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)},$$

expression très-simple qui ne changerait de signe qu'avec la constante γ, ici regardée comme variable.

On peut s'assurer que, pour $m=1$, quand il n'y a qu'un seul élément ou une seule inconnue x, toutes ces formules rentrent complétement dans les relations connues

$$\gamma = \mu_1 S.A_h = \rho\sqrt{2}\sqrt{\mu_2 - \mu_1^2},$$

limites de $\rho = \gamma\sqrt{S.A_h^2}$.

$$p_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\gamma} e^{-t^2}dt.$$

On connaît les procédés simples donnés par Laplace et par M. Gauss pour déduire les quantités μ_1 et μ_2 des observations mêmes. Ces procédés, qui dépendent de ce qu'on a appelé la *théorie des probabilités à posteriori*, ne sont pas modifiés par le changement qui vient d'être développé. Il n'influe heureusement que sur la grandeur de la proba-

bilité, ou plutôt sur l'étendue des erreurs les plus probables. Il ne sera donc pas question ici du calcul de μ_1 ni de μ_2. Mais il a paru nécessaire, sinon de former des Tables des valeurs numériques des formules (11), du moins d'en présenter quelques valeurs intéressantes.

Avant de procéder à cette application, peut-être convient-il de faire observer que si l'expression de la probabilité p donnée généralement (page 5[illegible]),

$$p = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dt_1\, dt_2 \ldots dt_m\, e^{-t_1^2 - t_2^2 - \ldots - t_m^2} \left(1 - \frac{\nu_2}{6} B_2 + \frac{1}{24} B_3 - \frac{1}{72} B_4 \right)$$

avait été intégrée relativement à toutes les variables excepté une, le résultat aurait été la probabilité des limites assignées à l'erreur ρ correspondante, quelque grandes que fussent toutes les autres erreurs : en d'autres termes, la probabilité de cette erreur considérée isolément, et comme si les autres n'existaient pas. On arriverait de cette manière aux formules relatives au cas d'un seul élément, telles qu'elles viennent d'être écrites, c'est-à-dire au mode ordinaire de calcul de la probabilité. Mais, encore une fois, ce mode la donne beaucoup trop grande, puisqu'il compte, dans le calcul, toute la probabilité des combinaisons d'erreurs, dans lesquelles les autres erreurs ont des grandeurs qui ne permettraient même plus de se fier aux équations. On va reconnaître, au surplus, l'extrême différence des deux résultats.

Les mêmes considérations ont empêché d'avoir égard aux valeurs moyennes des erreurs. On sait qu'on appelle ainsi la somme des produits des erreurs, prises toutes positivement, par leurs probabilités respectives. Cette moyenne arithmétique, dans laquelle chaque erreur entre proportionnellement au nombre des chances qui peuvent l'amener, ne peut être un indice exact de l'importance d'une erreur que quand elle est calculée isolément. Si, au contraire, il se rencontrait que les grandeurs les plus considérables de l'erreur d'une inconnue fussent précisément celles qui dépendent de systèmes d'erreurs dont la probabilité est faible, on conçoit que la moyenne pourrait donner une idée erronée de la grandeur la plus ordinaire de l'erreur spéciale à laquelle elle se rapporte. En général, l'emploi des valeurs moyennes

est chose délicate, à moins qu'elles ne fassent l'objet spécial des recherches. On sentira sur-le-champ, par exemple, que même dans le cas le plus simple, la moyenne des erreurs ρ_i, qui se calcule en intégrant

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty dt\, e^{-t^2}\, t\sqrt{S\,K^2_{i,h}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{S.K^2_{i,h}},$$

ne donne pas une idée bien juste, puisque les limites entre lesquelles il y a un contre un à parier que peut tomber la valeur ρ_i sont déterminées par l'équation

$$\int_0^z dt\, e^{-t^2} = \int_z^\infty dt\, e^{-t^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} - \int_0^z dt\, e^{-t^2},$$

ou bien

$$\int_0^z dt\, e^{-t^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi};$$

d'où l'on tire

$$z = 0{,}476\,936.$$

$\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ est, au contraire, égal à 0,564 18.

La moyenne des erreurs est donc loin de se rencontrer parmi les erreurs les plus probables. A la vérité, cette moyenne est celle de toutes les erreurs prises avec le signe +, et la moyenne réelle est 0. Il y aurait plus d'une observation à faire sur l'usage des moyennes; mais il faut ici, pour éviter trop de longueurs, ne pas s'y arrêter, non plus qu'à un grand nombre d'autres points utiles. Il suffit d'avoir montré que les moyennes n'ont pas toujours le sens que les habitudes de l'esprit y font attacher, dans les circonstances les plus ordinaires; et que, en conséquence, elles ne sont point propres à la démonstration de la méthode des moindres carrés. Aussi est-ce de cette évaluation de la moyenne des erreurs, prises avec le signe positif, que M. Gauss forme une espèce d'objection à l'analyse de Laplace (*Theoria Combinationis*, etc.). Le fait est que le résultat ne serait point rigoureux, si cette moyenne ne s'était trouvée proportionnelle aux limites des erreurs. Mais il en est de même de la moyenne des carrés des erreurs que M. Gauss croit pouvoir adopter à priori comme *criterium* de la précision. C'est, au contraire, l'existence de ce criterium

remarquable que démontre l'analyse de Laplace, de même que tout ce qui précède.

§ IV.

Dans les applications, la valeur de la constante γ, la plus difficile à trouver peut-être, sinon la plus utile, est celle pour laquelle la probabilité est égale à $\frac{1}{2}$. Il y a, pour cette valeur, autant à parier que les erreurs tomberont dans les limites qui en résultent, qu'il y a à parier qu'elles excéderont ces limites.

Ainsi, d'abord, dans le cas d'une seule inconnue x, Bessel a donné la valeur

$$\gamma = 0{,}47\,693\,64.$$

La dernière décimale paraît inexacte, et il faut prendre

$$\gamma = 0{,}47\,693\,627\,620.$$

Mais c'est là un véritable luxe de décimales, en fait de probabilités: car il sera bien rare que le terme négligé qui dépend du grand nombre n des observations permette de pousser l'approximation au delà des premières décimales.

On a donc, pour une seule inconnue, la probabilité

$$p_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{0{,}4769\ldots} dt\, e^{-t^2} = \frac{1}{2},$$

que l'erreur r de la valeur de x est entre les limites

$$r = \mu_1 \mathrm{S}.\mathrm{A}_l \pm 0{,}4769\ldots \sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2)\mathrm{S}.\mathrm{A}_l^2},$$

les facteurs A étant ceux qu'indique la méthode des moindres carrés. Quant aux valeurs μ_1 et μ_2, elles doivent être cherchées, soit en dehors des observations, soit par les observations mêmes, et cela, d'après les procédés connus pour les probabilités *à posteriori*, ainsi qu'il a été dit.

Lorsque rien n'empêche d'élever la valeur de γ jusqu'à 3 par exemple, la probabilité que l'erreur est renfermée dans les limites

$$r - \mu_1 \mathrm{S}.\mathrm{A}_l = \pm 3 \sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2)\mathrm{S}.\mathrm{A}^2}$$

est exprimée à peu près par

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^3 dt\, e^{-t^2} = 0{,}99997790.$$

C'est ce que l'on peut voir dans les Tables qui ont été publiées pour les valeurs de l'intégrale $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\gamma} dt\, e^{-t^2}$ (notamment dans l'*Exposition de la Théorie des Chances*, de M. Cournot.)

Ces valeurs sont précisément celles qui ont été appliquées, par omission, aux problèmes qui comprennent plusieurs inconnues. Elles ne sont rapportées ici que pour en faciliter la comparaison avec celles que donnent les formules (11).

S'il y a deux inconnues, il faut employer la deuxième de ces formules, et la probabilité est alors très-simplement

$$p_2 = 1 - e^{-\gamma^2}.$$

Elle devient égale à $\frac{1}{2}$, pour $\frac{1}{2} = e^{-\gamma^2}$, ou $\gamma = \sqrt{\mathrm{l}\,2}$, la lettre l indiquant les logarithmes népériens. On trouvera sans peine

$$\gamma = 0{,}83255461\ldots.$$

Ainsi, dès qu'il y a seulement deux éléments à déduire des observations, les limites comprennent un intervalle presque double, et les erreurs peuvent être bien plus grandes, par conséquent.

On a la probabilité $\frac{1}{2}$ que l'erreur de l'élément x_i est comprise dans les limites

$$r_i - \mu_i \mathrm{S.A}_{i,h} = \pm\, 0{,}83255\ldots \sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2)\,\mathrm{S.A}_{i,h}^2},$$

ou, si l'on veut que les erreurs puissent varier, on dira que $\frac{1}{2}$ est la probabilité de l'ensemble de tous les systèmes pour lesquels

$$r_1 - \mu_1 \mathrm{S.A}_{1,h} = t_1 \sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2)\,\mathrm{S.A}_{1,h}^2},$$

$$r_2 - \mu_1 \mathrm{S.A}_{2,h} = t_1 \sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2)\frac{(\mathrm{S.A}_{1,h}\mathrm{A}_{2,h})^2}{\mathrm{S.A}_{1,h}^2}}$$
$$+\, t_2 \sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2)\left(\mathrm{S.A}_{2,h}^2 - \frac{(\mathrm{S.A}_{1,h}\mathrm{A}_{2,h})^2}{\mathrm{S.A}_{1,h}^2}\right)}.$$

les variables t_1 et t_2 étant assujetties à la condition

$$t_1^2 - t_2^2 < 0.69\,314\,718\ldots;$$

les quantités sous les radicaux étant déterminées d'ailleurs par les relations (9), où les facteurs A de la méthode des moindres carrés remplacent les arbitraires K dans les coefficients

$$b_{i,r} = S.K_{i,s}K_{i,r}.$$

Lorsque dans ce système on voudra atteindre une probabilité 0,99997790... égale à celle que donne $\gamma = 3$ quand il n'y a qu'une inconnue, il faudra résoudre l'équation

$$1 - e^{-\gamma^2} = 0,99\,997\,790\ldots;$$

qui élève la valeur de γ à 3,27419....

Ainsi, pour des probabilités très-grandes, les limites diffèrent moins que pour de faibles probabilités, quand on passe du cas d'une seule inconnue au cas de deux inconnues. C'est ce dont il est facile de se rendre compte, puisqu'il en serait absolument de même si les deux inconnues étaient indépendantes l'une de l'autre.

Voici maintenant (afin d'abréger) le tableau des valeurs de γ qui donnent la probabilité égale à $\frac{1}{2}$ dans les formules (11), depuis $m = 1$ jusqu'à $m = 8$. Il ne serait pas difficile, mais il serait très-long de faire les mêmes calculs pour un plus grand nombre d'éléments :

$$\begin{aligned}
m &= 1, & \gamma_1 &= 0.47\,693, & &\\
m &= 2, & \gamma_2 &= 0.83\,255, & &= 1.74\,56 \times \gamma_1\\
m &= 3, & \gamma_3 &= 1.08\,76, & &= 2.28\,14 \times \gamma_1\\
m &= 4, & \gamma_4 &= 1.29\,551, & &= 2.71\,64 \times \gamma_1\\
m &= 5, & \gamma_5 &= 1.47\,50, & &= 3.09\,27 \times \gamma_1\\
m &= 6, & \gamma_6 &= 1.63\,525, & &= 3.42\,87 \times \gamma_1\\
m &= 7, & \gamma_7 &= 1.78\,12, & &= 3.73\,47 \times \gamma_1\\
m &= 8, & \gamma_8 &= 1.91\,625, & &= 4.01\,78 \times \gamma_1
\end{aligned}$$

Il ne s'agit que de comparer chacun de ces nombres avec le pre-

mer, pour reconnaître sur-le-champ l'étendue réelle des limites de l'erreur probable, déjà calculées dans un système d'observations. Il n'existe, effectivement, aucun changement à faire subir aux calculs ordinaires, sauf celui de la valeur γ. Il est presque inutile de rappeler, de plus, que l'erreur probable est ainsi nommée parce que c'est précisément la valeur de la limite correspondant à la probabilité $\frac{1}{2}$.

Voici un exemple de ce rapprochement. Bessel, dans son Mémoire sur la Comète d'Olbers (*Untersuchungen über die Bahn des Olbers-chen Kometen*), emploie à la correction des éléments de l'orbite trois cent quarante-neuf observations, dont il forme des équations à six inconnues. Il en conclut, pour l'une de ces inconnues, la correction de l'excentricité, une erreur probable de 0,00017127 qu'il évalue en temps à environ 101 jours, sur les 74 ans assignés à la révolution de l'astre.

Dans ce calcul, Bessel a employé le facteur

$$\gamma_1 = 0,47693.$$

Puisqu'il y a six inconnues, il convenait de prendre, au contraire,

$$\gamma_6 = 1,63525 = 3,428\ldots \times \gamma_1,$$

c'est-à-dire plus du triple, et d'élever l'erreur probable à 0,0005872, ce qui entraîne sans doute une erreur probable de près d'une année sur la durée de la révolution.

On peut très-bien ici reconnaître la nécessité d'étendre ainsi les limites de l'erreur probable. On sent, en effet, qu'il faut, pour que les erreurs des autres éléments puissent avoir la même probabilité, tenir compte de toutes les combinaisons dans lesquelles chacune de leurs valeurs sont en droit d'entrer.

Bessel fait observer avec toute raison qu'il est fort à regretter que les circonstances du mouvement géocentrique aient laissé une si grande incertitude sur cet élément, tandis que les autres n'offrent que des erreurs bien moindres comparativement. La comète d'Olbers ne devant revenir au périhélie que le 9 février 1887, ce ne sera pas avant trente-cinq ans que ces calculs pourront offrir un intérêt positif.

Mais on voit, dans le Mémoire de Bessel, qu'il assignait une probabilité de 66,85 contre 1, à la limite d'un an, tandis qu'on ne peut parier beaucoup plus de 1 contre 1 que la comète n'excédera pas cette limite, en avance ou en retard. Pour obtenir 66,85 contre 1, il faudrait résoudre exactement l'équation résultant de la deuxième des formules (11), ce qui donnerait à γ une valeur (2,812) plus que quintuple de la valeur γ_1, et entraînerait une limite d'erreurs possibles, bien que peu probables, d'environ dix-neuf mois.

Il serait presque inutile de faire exactement ce dernier calcul, car le nombre des observations n'étant que de 349, et le nombre des éléments s'élevant à 6, le diviseur des termes négligés n'atteint que 58; de sorte que ces termes pourraient avoir une grande influence sur les premières décimales de la probabilité. Il suffit d'avoir indiqué le sens dans lequel influaient les omissions. Quant aux petites valeurs de γ, il est bien plus difficile que les termes négligés aient un effet capable d'altérer sensiblement la probabilité $\frac{1}{2}$, ou toute autre aussi faible, et c'est par cette raison que le calcul a été fait avec exactitude.

Voici un second et dernier exemple de l'application des formules (11).

Dans le premier Supplément à la *Théorie analytique des Probabilités*, Laplace évalue à 1 000 000 contre 1 la probabilité que la masse de Jupiter, qu'il corrige à l'aide de 129 équations, dans lesquelles il a fait cette masse égale à $\frac{1+z'}{1067,09}$, et qu'il réduit à $\frac{1}{1070,35}$, n'est pas en erreur de $\frac{1}{100}$ de la première valeur. Cependant elle est portée, actuellement, à $\frac{1}{1050}$ dans l'*Annuaire du Bureau des Longitudes*. La différence est d'environ $\frac{1}{51,5}$; ce qui fait à peu près le double des limites assignées avec une si haute probabilité.

Cette différence considérable peut dépendre de la manière dont les 129 équations ont été formées, et peut être même une conséquence toute naturelle du défaut de précision des observations employées, ou des formules de réduction. Mais, si l'on considère que les 129 équa-

tions renferment 6 inconnues, et que, par suite, il ne fallait attacher aux limites de z' que la probabilité de l'ensemble des limites assignées à toutes ces inconnues, et auxquelles elles doivent satisfaire à la fois, on trouve une probabilité bien inférieure à $\frac{1000000}{1000001}$, ou, plus exactement, $1 - 0,00000100 4$, que donnent les valeurs rapportées par Laplace.

La valeur de la correction, telle que la donne Laplace, est

$$z' = 0,00305 + \gamma \sqrt{\frac{1}{(345,885)}}.$$

Le diviseur sous le radical est un peu trop grand, parce qu'il ne fallait prendre, pour 129 observations et 6 inconnues, que 123 fois (ou $129 - 6$) un certain dénominateur. En tenant compte de cette légère rectification, dépendant de ce que 6 n'est pas à négliger auprès de 129, on a, pour z', les limites

$$z' = 0,00305 \pm \gamma \times 0,00296.$$

L'erreur possible de z' devant être telle, que l'erreur de la masse soit au-dessous de $\frac{1}{100}$ de $\frac{1}{1067,09}$, il en résulte

$$\frac{\gamma \times 0,00296}{1067,09} = \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{1067,09},$$

ou bien

$$\gamma = 3,37745.$$

Cette valeur de γ aurait encore donné à Laplace la probabilité $0,999998 21$, ou à peu près 560488 à parier contre 1.

Mais, si on la fait entrer dans la seconde des formules (11), en posant $m = 6$, on trouve

$$p_6 = 1 - e^{-\gamma^2}\left(\frac{1}{2}\gamma^4 + \gamma^2 + 1\right):$$

et, tout calcul fait,

$$p_6 = 0,9991389,$$

ou à peu près $\frac{1160}{1161}$.

Il n'y avait donc que 1160 à parier contre 1, que la masse $\frac{1}{1070,35}$ n'était pas en erreur de $\frac{1}{100}$.

Cette probabilité peut déjà paraître assez grande: mais il ne faut pas perdre de vue que les formules (11), comme celle de Laplace, négligent des termes qui ne disparaissent que quand $\frac{m}{n}$ est assez petit pour permettre d'employer des valeurs de γ aussi grandes que 3,37745. Ces termes, sans nul doute, rendent ici la formule erronée, puisque $\frac{n}{m}$, loin d'être un grand nombre, n'est que

$$\frac{129}{6} = 21,5.$$

La valeur

$$p = 0,9991389$$

résultant de l'approximation, est donc ici très-imparfaite; et lors même qu'on s'en tiendrait à la formule de Laplace, la valeur qu'il a donnée de $\frac{1000000}{1000001}$ ne pourrait être admise à cause de la grandeur certaine des termes négligés par lui.

Il faut reconnaître que 129 équations ne permettent d'employer cette analyse approximative que pour de faibles valeurs de γ. Mais alors, dira-t-on avec M. Gauss, la méthode des moindres carrés n'est donc plus démontrée pour les cas les plus fréquents dans la pratique, pour des nombres d'observations très-grands relativement aux peines qu'ils donnent aux observateurs, mais trop petits pour assurer une grande probabilité: cette méthode, qui paraît précieuse, ne serait donc le plus souvent qu'une règle commode par son uniformité et par les avantages que Legendre avait signalés dès l'origine?

A ces regrets trop fondés, il faut répondre affirmativement sans la moindre hésitation. Il n'est besoin, en effet, que du simple bon sens, destitué de tout calcul, pour reconnaître que des observations affectées d'erreurs ne peuvent donner les valeurs cherchées que quand il se fait des compensations entre les erreurs, et tout le monde sent que ces compensations ne sauraient avoir lieu que sur de grands nombres.

Employer une moyenne quelconque d'un petit nombre de faits, c'est nécessairement courir le risque que les erreurs s'ajoutent. Il en est ainsi dans toutes les circonstances où l'épreuve ne peut être répétée à volonté, et alors la connaissance qu'on acquiert ne doit plus être imprudemment étendue au delà des limites des plus grandes erreurs possibles. Certes, ce serait une véritable aberration de prétendre que la moyenne arithmétique de 10 mesures dont chacune peut être affectée d'une erreur, en plus ou en moins, de 0 à 1 centimètre, aura un grand avantage sur toute autre combinaison de ces 10 mesures. Sans nul doute, il vaudrait mieux pouvoir démontrer qu'elle jouit toujours, même pour de si petits nombres, d'une probabilité supérieure; mais, par la nature seule des choses, la différence serait très-petite. Aussi, est-il superflu de rechercher ce qui se passe dans de petits nombres. A cet égard, on sera toujours et de toute nécessité contraint de revenir à la réflexion de Gibbon : « Les lois de la probabilité, si vraies en général, si trompeuses en particulier. » Il faudra donc, même quand on aurait prouvé que tel ou tel procédé est le plus probable, ne s'en servir qu'en tenant compte, non plus des erreurs moyennes, mais des erreurs les plus grandes possibles; car la probabilité des unes et des autres ne différera jamais assez pour qu'on puisse se permettre de négliger les unes plutôt que les autres. La probabilité n'est fondée que sur la possibilité des choses, et dans un petit nombre d'observations, un événement possible a chance de prendre sa place comme tout autre de même possibilité. Ce n'est que dans les grands nombres que certaines classes de faits, certaines combinaisons deviennent impossibles, ou plutôt très-peu possibles, par conséquent improbables. Et cette condition impérieuse du grand nombre n'a rien de particulier à la méthode des moindres carrés.

Qu'il faille continuer d'appliquer cette méthode à de petits nombres d'observations, c'est ce qui n'est point douteux. L'analyse qui la démontre reste vraie pour de petits nombres de même que celle qui prouve la valeur des résultats moyens de toute espèce. Seulement, les termes négligés ne laissent plus ressortir un maximum absolu de probabilité; mais, reprenant leur influence, ils viennent altérer un peu le résultat de l'approximation, et l'on voit que ce résultat n'est pas fort éloigné du maximum. S'il en diffère, ce n'est que de petites

quantités dont les diviseurs croissent proportionnellement au nombre des observations; si bien que la méthode reprend cette propriété de donner le maximum d'avantage, dès que ce nombre a quelque valeur, et cela bien avant qu'il soit assez grand pour permettre d'appliquer, sans scrupule, les formules d'approximation au calcul de la probabilité. Il y aurait à ajouter à ces motifs, tirés de la marche des calculs, tous ceux que Legendre fit d'abord valoir en faveur de son procédé. Mais ce n'en est point ici le lieu; ils sont connus et appréciés. Il ne s'agissait que de montrer les moyens de combler ce qui avait paru être une lacune fâcheuse dans une théorie si utile. Car rien n'est plus nuisible au progrès vers la vérité que la confiance erronée qui se croit en possession de résultats dont la science est encore éloignée.

DISTRIBUTION DE LA LUMIÈRE

SUR UNE SURFACE ÉCLAIRÉE PAR PLUSIEURS FAISCEAUX DE LUMIÈRE PARALLÈLE;

PAR M. PHILIPPE BRETON,
Ingénieur des Ponts et Chaussées.

1. Les points d'une surface mate et opaque étant rapportés à trois coordonnées rectangulaires, soient i, i', i'', etc., les intensités d'un nombre quelconque de faisceaux de lumière parallèle, et α, α', α'', etc., β, β', β'', etc., γ, γ', γ'', etc., les angles formés respectivement avec les axes des coordonnées positives par les rayons de chaque faisceau.

Le point (x, y, z) de la surface reçoit du premier faisceau un rayon qui fait un angle ω avec la normale à la surface en ce point. En nommant λ, μ, ν les angles que cette normale fait avec les trois axes, on a

$$(1) \qquad \cos\omega = \cos\lambda\cos\alpha + \cos\mu\cos\beta + \cos\nu\cos\gamma,$$

et l'élément de la surface éclairée dont le point (x, y, z) est le centre reçoit du premier faisceau une quantité de lumière par unité superficielle égale à $i\cos\omega$. Pour avoir l'éclairage total de cet élément, il faut ajouter les quantités de lumière qu'il reçoit de tous les faisceaux.

On aura donc, pour l'expression de cet éclairage,

$$(2) \qquad \sum i\cos\omega = \cos\lambda\sum i\cos\alpha + \cos\mu\sum i\cos\beta + \cos\nu\sum i\cos\gamma.$$

Pour divers points de la surface, les sommes désignées par le signe $\sum$ embrassent des systèmes différents de faisceaux de lumière. La composition des systèmes peut varier, entre les diverses parties de

la surface éclairée, par l'effet de plusieurs causes, telles que l'interposition d'un corps opaque étranger, ou l'opacité du corps même sur lequel la lumière tombe.

En combinant l'équation de la surface éclairée avec celle-ci,

$$\cos\omega = 0$$

(dans laquelle on remplace α, β, γ par leurs valeurs données et $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ par leurs valeurs connues en fonction des coefficients différentiels des coordonnées de la surface), on obtiendra la ligne de séparation des parties qui reçoivent la lumière du premier faisceau et de celles où cette lumière est interceptée par l'opacité du corps. Les lignes de séparation analogues relatives à tous les faisceaux de lumière étant tracées sur la surface éclairée, celle-ci se trouvera partagée en un certain nombre de régions, pour chacune desquelles les sommes $\sum$ embrassent un même système de faisceaux éclairants dans toute l'étendue de la région.

Soient I l'intensité et A, B, C les angles de direction d'un faisceau fictif, tel que l'on ait

$$(3)\qquad \begin{cases} I\cos A = \sum i\cos\alpha, \\ I\cos B = \sum i\cos\beta, \\ I\cos C = \sum i\cos\gamma, \end{cases}$$

et, en ajoutant les carrés, à cause de la relation

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1,$$

$$(4)\qquad I = \sqrt{\left(\sum i\cos\alpha\right)^2 + \left(\sum i\cos\beta\right)^2 + \left(\sum i\cos\gamma\right)^2}.$$

Soit Ω l'angle formé par les rayons du faisceau fictif avec la normale à la surface au point (x, y, z). On aura

$$(5)\qquad \cos\Omega = \cos\lambda\cos A + \cos\mu\cos B + \cos\nu\cos C,$$

et ce faisceau donnerait sur cet élément de la surface un éclairage

exprimé par $I \cos \Omega$. Or, en remplaçant $\cos \Omega$ par sa valeur ci-dessus, et en substituant dans celle-ci les valeurs de $I \cos A$, $I \cos B$, $I \cos C$ données par les équations (3), on trouve

$$(6) \qquad I \cos \Omega = \sum i \cos \omega.$$

Ainsi le faisceau fictif donne, sur chaque point de la région que nous considérons, le même éclairage que ce point reçoit réellement des faisceaux qui éclairent la région. Le calcul par lequel I, A, B, C peuvent être déterminés est identique avec celui de la résultante d'un système de forces dont i, i', i'', etc., sont les grandeurs, et dont les directions sont parallèles respectivement aux faisceaux éclairants. Je donnerai à ce faisceau fictif le nom de *faisceau résultant;* il est clair qu'on peut le construire géométriquement par le moyen d'une série de parallélogrammes, comme les résultantes des forces.

2. Dans la région de la surface éclairée par le système de faisceaux i, i', i'', etc., dont le résultant est I, les lignes d'égale teinte sont déterminées par la combinaison de l'équation de la surface éclairée avec l'équation

$$(7) \qquad \cos \Omega = \text{constante},$$

dans laquelle on remplace A, B, C par leurs valeurs tirées des équations (3), et λ, μ, ν par leurs valeurs connues en fonction des coefficients différentiels des coordonnées de la surface éclairée.

Les limites d'une région ne font pas généralement partie des lignes d'égale teinte de la région. Il y a une exception pour les régions éclairées par un seul faisceau, qui ont un côté commun avec celle qui ne reçoit aucune lumière. Ce côté fait partie de la série des lignes d'égale teinte déterminées par l'équation

$$(8) \qquad \cos \omega = \text{constante},$$

dans laquelle on fait passer $\cos \omega$ par une série de valeurs positives commençant par zéro. C'est précisément cette hypothèse.

$$\cos \omega = 0,$$

qui donne en même temps un des côtés de la région éclairée par un seul faisceau, et la première ligne de la série des lignes de teinte de la région. Mais les autres côtés de la région coupent chacun une partie des zones d'égale teinte de la région, et celles-ci passent avec leur teinte dans la région contiguë sans interruption, mais avec un changement brusque de direction.

3. Pour éclaircir ceci par un exemple, considérons une sphère éclairée par trois faisceaux de lumière parallèle. Les trois grands cercles perpendiculaires aux faisceaux éclairants divisent la sphère en huit triangles sphériques, dont un ne reçoit aucune lumière, et est adjacent à trois triangles éclairés chacun par une seule lumière; ce triangle obscur est opposé à un triangle éclairé par la réunion des trois lumières; celui-ci est adjacent à trois triangles éclairés chacun par une combinaison de deux lumières. Nous avons donc un triangle obscur et sept triangles éclairés.

Considérons maintenant un parallélipipède construit sur trois droites représentant en intensité et en direction les trois faisceaux de lumière; on aura les trois arêtes représentant les faisceaux, les diagonales des trois faces représentant les faisceaux résultants de deux lumières, et la diagonale intérieure du solide représentant le faisceau résultant des trois lumières réunies. Si l'on a fait partir les arêtes du parallélipipède du centre de la sphère, ces sept lignes droites sont les axes d'autant de systèmes de petits cercles d'égale teinte distribués chacun dans un des triangles éclairés. Dans le cas où tous ces axes percent la sphère dans l'intérieur des triangles auxquels ils appartiennent respectivement, on a dans chacun de ces triangles une série de petits cercles d'égale teinte qui sont entiers; la teinte s'éclaircit sans interruption d'un cercle à l'autre jusqu'au pôle de la série. L'éclairage est maximum en ce point, que je désigne, pour abréger, sous le nom de *point brillant circulaire*. Les petits cercles d'égale teinte d'une région de plus en plus éloignés de leur pôle commun sont de plus en plus sombres; en continuant à s'éloigner de ce pôle, ils vont successivement toucher, puis couper en deux points les trois côtés du triangle auquel ils appartiennent, excepté dans les triangles éclairés par une seule lumière; dans ceux-ci les cercles d'égale teinte sont parallèles à

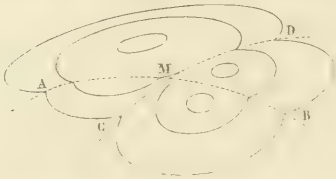
un côté du triangle et ne peuvent toucher et couper que les deux autres côtés.

Dans le cas que nous examinons, c'est-à-dire lorsque les sept points brillants circulaires existent réellement, les trois angles du triangle qui reçoit les trois lumières peuvent présenter une particularité remarquable : c'est qu'ils sont moins éclairés que des points très-voisins pris sur la sphère dans une direction quelconque; ce sont des points autour desquels sont placées des séries de lignes d'égale teinte formant des circuits fermés avec une teinte de plus en plus claire à mesure qu'on s'éloigne du sommet commun à quatre triangles éclairés. Ces circuits sont des quadrilatères ayant pour côtés des arcs de petits cercles appartenant à quatre des séries de cercles d'égale teinte, savoir, à la série normale à une des arêtes du parallélipipède des lumières, à celles qui sont normales respectivement aux diagonales des deux faces du parallélipipède adjacentes à cette arête, et à celle qui est normale à la diagonale intérieure du solide. Les sommets de ces quadrilatères sont situés sur les deux grands cercles qui limitent les quatre triangles auxquels l'angle dont il s'agit est commun. Cet angle forme donc un *point sombre quadrangulaire*. Si l'on voulait construire une image exacte de la sphère ainsi éclairée par un procédé qui a été appliqué à la décoration de certaines poteries, où une terre blanche est recouverte d'un vernis coloré et transparent qui, pendant la cuisson, s'accumule dans les creux pour former les parties sombres du dessin, et reste mince dans les parties que l'artiste veut rendre claires; la surface de la terre blanche présenterait, avant l'application du vernis, un cercle divisé en sept régions par des demi-ellipses, construites sur des diamètres du cercle comme grands axes; dans chacune des régions la surface serait une portion d'ellipsoïde présentant sa convexité en dehors; les trois demi-ellipses limites des régions formeraient des arêtes rentrantes, et à leurs points d'intersection, on aurait l'intersection de quatre surfaces bombées formant un angle rentrant quadrangulaire.

4. Si, sans changer les directions des trois faisceaux composants, on augmente l'intensité de l'un d'eux, on éclaircit les teintes dans les quatre régions qu'il éclaire, et elles restent sans changement dans les trois qui ne sont éclairées que par les deux autres faisceaux. Les

cercles d'égale teinte du triangle éclairé seulement par la lumière augmentée conservent leur pôle; dans les trois triangles éclairés adjacents à celui-là, les points brillants circulaires se rapprochent de celui qui est resté immobile, et dans ce mouvement, le cercle qui possède une teinte déterminée coupe toujours au même point le grand cercle de contact de la sphère et des rayons augmentés. Si l'augmentation est suffisante, les pôles d'une, deux ou trois séries de cercles d'égale teinte peuvent passer dans la région éclairée seulement par la lumière augmentée; alors un, deux ou trois points brillants circulaires sont absorbés par cette région et disparaissent.

Quant aux points sombres quadrangulaires, voici quelle est la marche de leur déformation lorsqu'un des trois faisceaux éclairants augmente d'intensité sans changer de direction. Soient AMB, CMD



deux grands cercles limites de régions qui se coupent en M. Ce point était d'abord un point sombre quadrangulaire; l'angle AMD contient le triangle éclairé par le faisceau augmenté seul. Si cet accroissement se fait successivement par degrés insensibles, il y a un instant où le cercle d'égale teinte dans l'angle AMC qui passe par le point M touche en ce point l'arc MC; alors, le cercle d'égale teinte dans l'angle CMB touche également MC au point M. A cet instant on cesse d'avoir des quadrilatères fermés autour de M. Si l'angle AMC est aigu, le point brillant circulaire de cette région a déjà disparu, tandis que celui de la région CMB subsiste encore; si les angles en M sont droits, les points brillants circulaires des régions AMC et CMB disparaissent ensemble en arrivant sur le cercle limite de ces régions, à l'instant où les petits quadrilatères d'égale teinte autour de M cessent d'être fermés. Dans ce même instant, tous les cercles d'égale teinte des régions AMC, CMB coupent normalement l'arc de grand cercle AMB.

5. En éclairant une sphère par un nombre quelconque n de faisceaux de lumière parallèle, on aurait n grands cercles normaux respectivement à chaque faisceau, partageant la sphère entière en un certain nombre de polygones sphériques, dont les sommets sont en nombre $n(n-1)$. Le nombre de ces polygones a pour limite supérieure 2^n, mais la détermination précise de ce nombre de polygones augmente rapidement de complication avec n. Lorsque $n = 3$, on a

$$2^n = 8,$$

ce qui est, en effet, le nombre des triangles déterminés dans la sphère par trois grands cercles. Mais si l'on fait $n = 4$ en introduisant un grand cercle de plus, le nouveau grand cercle ne peut couper que six des huit triangles qu'on avait en faisant $n = 3$. Ces six triangles sont ainsi partagés chacun en un triangle et un quadrilatère. Ainsi, quatre grands cercles divisent la sphère en huit triangles et six quadrilatères, en tout quatorze polygones. Si donc on a quatre faisceaux éclairants, ce qui donne seize combinaisons, savoir :

Aucune lumière	1 cas.
Une seule des quatre lumières composantes	4
Deux quelconques des quatre	6
Trois quelconques des quatre	4
Les quatre lumières réunies	1
Nombre total des combinaisons	16

les quatre grands cercles diviseront la sphère en quatorze polygones correspondant chacun à une des seize combinaisons ci-dessus; deux de ces combinaisons ne correspondent à aucune région de la sphère. La détermination des quatorze régions ne dépendra que des directions des quatre faisceaux de lumière, quelles que soient leurs intensités. La construction des cercles d'égale teinte dans chaque cas particulier de ce genre n'offre aucune difficulté.

Sans chercher à résoudre complétement la question des nombres de polygones que l'on obtient en menant au hasard n grands cercles sur une sphère, je remarquerai seulement que le nombre des sommets est toujours $n(n-1)$, à moins que plus de deux grands cercles ne se coupent suivant un même diamètre; sous la même restriction, le

nombre des côtés des polygones est double de celui des sommets. Ainsi, en nommant C_3 le nombre des triangles, C_4 celui des quadrilateres, C_5 celui des pentagones, etc., on aura toujours

$$3C_3 + 4C_4 + 5C_5 + \ldots = 2n(n-1).$$

Il est à remarquer encore que tous les nombres C_3, C_4, C_5, etc., des polygones de chaque espece sont toujours pairs, car chaque polygone a son opposé qui lui est égal. Dans le probleme de la distribution de n lumières, si l'un des polygones est éclairé par une certaine combinaison des n faisceaux de lumière qui en embrasse un certain nombre i à l'exclusion des $(n-i)$ autres, le polygone opposé se trouvera éclaire par ces $(n-i)$ faisceaux.

6. Si l'on veut faire une expérience dans laquelle on puisse observer les effets que nous venons d'étudier, on peut exposer au soleil une sphere sur laquelle on dirigera, en outre, la lumière réfléchie par plusieurs miroirs plans. On reconnaîtra que l'œil le plus exercé distingue difficilement dans la nature les dispositions singulieres indiquées par l'analyse dans la distribution de la lumiere.

Si, pour faire cette expérience, on voulait remplacer la lumiere solaire, directe et réfléchie, par celle de plusieurs lampes placées à de petites distances d'une boule, les lignes d'égale teinte présenteraient des raccordements sans changement brusque de direction, et les points sombres quadrangulaires seraient remplacés par des points sombres elliptiques. Pour que l'œil apercoive un changement brusque de direction, il faut que les corps éclairants n'aient que de très-petites dimensions angulaires vues des points de la surface éclairée, afin que les zones de pénombre n'aient que des largeurs tres-petites, ainsi que nous allons l'expliquer.

7. En effet, si une partie de la lumiere est fournie par un corps éclairant qui, vu de la surface éclairée, présente des dimensions angulaires sensibles, on pourra toujours remplacer la lumiere fournie par ce corps par un faisceau unique qui sera un faisceau résultant dont la détermination dépend d'une intégration. Ce faisceau resultant reste le meme pour tous les points de la surface éclairee qui voient le

corps éclairant en entier. Pour les points de cette surface auxquels elle-même cache une partie du corps éclairant, il faut exclure de l'intégration qui donne le faisceau résultant unique toute la partie cachée du corps lumineux. Ainsi, quand on passe de la région qui voit tout ce corps à celle qui n'en voit aucune partie, la lumière de ce corps disparaît par degrés insensibles. De là vient que les régions éclairées par diverses combinaisons de lumière émanée de corps qui ont des dimensions angulaires finies sont séparées, non par des limites linéaires, mais par des zones de largeur finie, dans lesquelles les lignes d'égale teinte se dévient peu à peu sans changement brusque. Par exemple, si l'on éclaire une sphère par la lumière du soleil directe et par cette même lumière réfléchie sur deux miroirs, il faudra concevoir, de part et d'autre des trois grands cercles étudiés ci-dessus, des couples de petits cercles embrassant trois zones dont la largeur angulaire est égale au diamètre du soleil. Ces zones sont des pénombres et se croisent suivant des losanges sphériques. C'est dans leur largeur que le changement de direction des lignes d'égale teinte se fait réellement d'une manière continue; mais, à cause de la petitesse du diamètre apparent du soleil, on ne peut pas voir ce raccordement, et le changement de direction entre deux systèmes de petits cercles d'égale teinte paraît brusque, même à l'œil le plus exercé.

THÈSE DE MÉCANIQUE,

PAR M. A. TISSOT,
Ancien Élève de l'École Polytechnique

Mouvement d'un point matériel pesant sur une sphère.

1. Dans le mouvement d'un point matériel soumis à la seule action de la pesanteur, et assujetti à rester sur une sphère, le temps dépend, par une intégrale elliptique de première espèce, de la distance z du mobile au plan horizontal, qui passe par le centre de la sphère, et l'angle ψ du plan vertical, qui contient ces deux points, avec un plan vertical fixe, s'exprime, au moyen de z, par la somme de deux intégrales de troisième espèce. L'application des principes exposés par M. Jacobi, dans les *Fundamenta nova, etc.*, et l'emploi de la transcendante Θ permettront donc d'obtenir, en fonction du temps, les variables de la question [*]. Ainsi, la solution complète du probleme ne sera plus bornée au cas où, le mobile s'écartant très-peu du point le plus bas de la sphère, on serait autorisé à négliger les quantités très-petites du troisième ordre; de plus, les caracteres de périodicité, qui n'ont été constatés que pour ce cas particulier, et dans les limites de l'approximation indiquée, se trouveront établis d'une manière rigoureuse, quelle que soit l'amplitude du mouvement.

Calcul de z en fonction du temps.

2. Si l'on appelle R le rayon de la sphere, g l'intensité de la pesanteur, et si l'on représente le temps par t, on aura, en prenant l'axe

* Cette application sera analogue à celle qui a été faite par M. Jacobi à la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, dans le cas où il n'y a pas de forces extérieures. Tome XIV du présent Journal; et, pour le Mémoire complet, *Journal de M. Crelle*, tome XXXIX.

des z dans le sens de la pesanteur, et en supposant, pour fixer les idées, que le mouvement ait d'abord lieu de bas en haut [*].

$$dt = \frac{-R\,dz}{\sqrt{(R^2 - z^2)(2gz + G) - G'^2}}.$$

Soient, au point de départ, z_0 la valeur de z, v_0 la vitesse, et ω l'angle que fait la direction de cette vitesse, avec la tangente horizontale menée à la sphère par le même point; les constantes G et G' auront pour expressions

$$G = v_0^2 - 2gz_0, \quad G' = v_0 \cos\omega \sqrt{R^2 - z_0^2},$$

et, si l'on pose

$$G' = c\sqrt{2g}, \quad v_0^2 = 2g(z_0 - h),$$

ce qui donne

$$G = -2gh, \quad c^2 = (R^2 - z_0^2)(z_0 - h)\cos^2\omega,$$

il viendra

$$dt = \frac{R}{\sqrt{2g}} \frac{-dz}{\sqrt{(R^2 - z^2)(z - h) - c^2}}.$$

3. La quantité soumise au radical, lorsqu'on y remplace z successivement par

$$-\infty, \quad -R, \quad z_0, \quad R,$$

prend les signes

$$+, \quad -, \quad +, \quad -;$$

en l'égalant à zéro, on trouverait donc pour z trois racines réelles : la plus grande comprise entre z_0 et R, la seconde entre $-R$ et z_0, la troisième négative et plus grande que R en valeur absolue. Si l'on représente ces racines, dans l'ordre indiqué, par α, β et $-\gamma$, on aura

$$dt = \frac{R}{\sqrt{2g}} \frac{-dz}{\sqrt{(\gamma + z)(\alpha - z)(z - \beta)}}.$$

On voit que, dans le cours du mouvement, z restera compris entre

[*] *Mécanique* de Poisson, tome Ier.

les limites α et β, et passera alternativement de l'une à l'autre, sans que le mobile s'arrête, puisque la vitesse de ce mobile sur la courbe qu'il décrit, savoir

$$v = \sqrt{2g(z-h)},$$

ne devient jamais nulle.

La relation, qui existe entre les racines et le coefficient du troisième terme de l'équation en z, donne

$$(\alpha+\beta)\gamma = R^2 + \alpha\beta,$$

de sorte que la somme $\alpha+\beta$ est positive; par conséquent, il en est de même de α. La courbe décrite par le mobile est donc toujours située, au moins en partie, dans l'hémisphère inférieur. Pour qu'elle coupe la circonférence du grand cercle horizontal, il faut que le point de départ soit situé au-dessus de cette circonférence, ou bien que la vitesse initiale satisfasse à la condition

$$v_0^2 > 2gz_0 \frac{R^2}{R^2\sin^2\omega + z_0^2\cos^2\omega}.$$

4. Pour plus de simplicité, nous compterons le temps à partir de l'une des époques où le point matériel est le plus bas possible: nous aurons, à un instant quelconque,

$$t = \frac{R}{\sqrt{2g}}\int_\alpha^z \frac{-dz}{\sqrt{(\gamma+z)(\alpha-z)(z-\beta)}}.$$

On peut poser

$$z = \alpha\cos^2\varphi + \beta\sin^2\varphi \quad \text{et} \quad k^2 = \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\gamma},$$

k étant une quantité réelle et plus petite que l'unité; alors, si l'on désigne par u l'intégrale elliptique de première espèce dont l'amplitude est φ, et qui a pour module k, il viendra, d'après la notation de M. Jacobi,

$$\alpha - z = (\alpha-\beta)\sin^2 \operatorname{am} u,$$

$$z - \beta = (\alpha-\beta)\cos^2 \operatorname{am} u,$$

$$\gamma + z = (\alpha+\gamma)\Delta^2 \operatorname{am} u;$$

en représentant par K l'intégrale complète, et en posant

$$T = \frac{2R}{\sqrt{2g(\alpha+\gamma)}} \cdot K,$$

on aura donc

$$u = \frac{K}{T} t \quad \text{et} \quad z = \alpha \cos^2 \operatorname{am} u + \beta \sin^2 \operatorname{am} u.$$

5. Appelons k' le complément $\sqrt{1-k^2}$ du module k, K' l'intégrale complète qui a pour module k', et soient

$$q = e^{-\pi \frac{K'}{K}}, \quad x = \frac{\pi}{2K} u = \frac{\pi}{2T} t,$$

si l'on désigne par $\Theta(u)$ et par $H(u)$ les développements très-convergents

$$(1) \quad \Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = 1 - 2q \cos 2x + 2q^4 \cos 4x - 2q^9 \cos 6x + \ldots,$$

$$(2) \quad H\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = 2\sqrt[4]{q} \sin x - 2\sqrt[4]{q^9} \sin 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}} \sin 5x - \ldots,$$

et si l'on fait

$$\Theta(K-u) = \Theta_1(u), \quad H(K-u) = H_1(u),$$

on aura [*]

$$\sin \operatorname{am} u = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H_1(u)}{\Theta(u)},$$

$$\cos \operatorname{am} u = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{H_1(u)}{\Theta(u)},$$

$$\Delta \operatorname{am} u = \sqrt{k'} \frac{\Theta_1(u)}{\Theta(u)},$$

et, par conséquent,

$$z = \frac{\alpha k' H_1^2(u) + \beta H^2(u)}{k \Theta^2(u)};$$

de sorte que z est connu en fonction de t.

6. Le temps que le point matériel emploie pour passer de l'un a

[*] *Fundamenta nova theoriæ Functionum ellipticarum* de M. Jacobi, page 183.

l'autre des deux plans horizontaux, qui limitent le mouvement dans le sens vertical, est T. Toutes les fois que t augmente de $2T$, u augmente de $2K$; or les formules (1) et (2) donnent

$$\Theta(2K+u) = \Theta(u), \qquad H(2K+u) = -H(u);$$

z est donc une fonction périodique du temps, et la période est $2T$.

Les mêmes formules donnent encore

$$\Theta(K+u) = \Theta(K-u), \qquad H(K+u) = H(K-u);$$

par conséquent, z prend la même valeur, à des intervalles de temps égaux, avant et après la fin de chaque demi-période.

Pour

$$\operatorname{am} u = \frac{\pi}{4},$$

on a

$$z = \frac{\alpha+\beta}{2},$$

et pour

$$\sin^2 \operatorname{am} u = \frac{1}{1+k'},$$

on a [*]

$$u = \frac{K}{2} \quad \text{et} \quad z = \frac{\beta + k'\alpha}{1+k'}.$$

Ainsi, au milieu d'une demi-période, le mobile ne se trouve pas à égale distance des deux plans limites, mais au-dessus de cette position.

7. L'expression de z peut être elle-même développée en série; car, si l'on pose

$$A = \frac{q}{(1-q)^2} + \frac{q}{(1-q^3)^2} + \frac{q}{1-q^{5}} + \ldots,$$

$$B = \frac{q}{(1+q)^2} + \frac{q}{(1+q^3)^2} + \frac{q}{(1+q^5)^2} + \ldots,$$

[*] *Traité des Fonctions elliptiques* de Legendre, tome I.

on aura [*]

$$\frac{1}{2}\left(\frac{k\mathrm{K}}{\pi}\right)^2 \sin^2 \mathrm{am}\,\frac{2\mathrm{K}x}{\pi} = \mathrm{A} - \frac{q\cos 2x}{1-q^2} - \frac{2q^2\cos 4x}{1-q^4} - \frac{3q^3\cos 6x}{1-q^6} - \ldots$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{k\mathrm{K}}{\pi}\right)^2 \cos^2 \mathrm{am}\,\frac{2\mathrm{K}x}{\pi} = \mathrm{B} + \frac{q\cos 2x}{1-q^2} + \frac{2q^2\cos 4x}{1-q^4} + \frac{3q^3\cos 6x}{1-q^6} + \ldots,$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{k\mathrm{K}}{\pi}\right)^2 z = \mathrm{A}\beta + \mathrm{B}\alpha + (\alpha - \beta)\left(\frac{q\cos 2x}{1-q^2} + \frac{2q^2\cos 4x}{1-q^4} + \frac{3q^3\cos 6x}{1-q^6} + \ldots\right).$$

8. Ce développement sera d'autant plus convergent, que α différera moins de β, ou que la courbe suivie par le mobile s'écartera moins d'un petit cercle horizontal; mais lorsque c sera voisin de zéro, et h de $-\mathrm{R}$, c'est-à-dire lorsque le mobile décrira sensiblement, d'un mouvement très-lent, le grand cercle vertical qui passe par le point de départ, il sera plus avantageux de développer la valeur de z suivant les puissances de la quantité

$$q' = e^{-\frac{\pi \mathrm{K}'}{\mathrm{K}}} = e^{\frac{\pi^2}{\log q}},$$

qui sera alors peu différente de zéro. Or, à cause de la formule [**]

$$\cos \mathrm{am}(u, k) = \text{séc am}(iu, k'),$$

dans laquelle i représente le radical imaginaire $\sqrt{-1}$, cette valeur de z peut s'écrire

$$z = \beta + (\alpha - \beta)\,\text{séc}^2 \mathrm{am}(iu, k');$$

on a, d'ailleurs [***],

$$\frac{1}{2}\left(\frac{k'\mathrm{K}}{\pi}\right)^2 \text{séc}^2 \mathrm{am}\,\frac{2\mathrm{K}x}{\pi} = -\mathrm{B} + \frac{1}{8\cos^2 x} + \frac{q\cos 2x}{1-q^2} - \frac{2q^2\cos 4x}{1-q^4} - \frac{3q^3\cos 6x}{1-q^6} - \ldots$$

Si l'on combine cette équation avec la précédente, après avoir rem-

[*] *Fundamenta nova, etc.*, page 110.
[**] *Fundamenta nova, etc.*, page 34.
[***] *Fundamenta nova, etc.*, page 113.

place x par $\frac{\pi u}{2K}$, puis u par iu, et k par k', on trouvera, en tenant compte de la relation

$$2\cos\frac{n\pi u}{2K'} = e^{n\frac{\pi u}{2K'}} + e^{-n\frac{\pi u}{2K'}} = q'^{-n\frac{x}{\pi}} + q'^{n\frac{x}{\pi}},$$

et en représentant par B′ ce que devient B, lorsqu'on y met q' au lieu de q,

$$\left(\frac{kK'}{\pi}\right)^2 \frac{z-\beta}{\alpha-\beta} = -2B' + \frac{1}{\left(q'^{-\frac{x}{\pi}} + q'^{\frac{x}{\pi}}\right)^2} + q'^2 \frac{q'^{-\frac{2x}{\pi}} + q'^{\frac{2x}{\pi}}}{1-q'^2}$$

$$-2q'^4 \frac{q'^{-\frac{4x}{\pi}} + q'^{\frac{4x}{\pi}}}{1-q'^4} + 3q'^6 \frac{q'^{-\frac{6x}{\pi}} + q'^{\frac{6x}{\pi}}}{1-q'^6} - \ldots$$

Calcul de l'angle ψ.

9. De l'équation que fournit le principe des aires, appliqué au plan horizontal, savoir,

$$r^2 \frac{d\psi}{dt} = G',$$

on tire, en remplaçant r^2 ou $R^2 - z^2$ et dt par leurs valeurs,

$$d\psi = \frac{c}{\sqrt{\alpha+\gamma}} \frac{2R\,du}{\{R+\alpha-(\alpha-\beta)\sin^2 \operatorname{am} u\}\{R-\alpha+(\alpha-\beta)\sin^2 \operatorname{am} u\}}.$$

Si l'on intègre, après avoir décomposé en fractions simples, on aura donc

$$\psi = \frac{c}{\sqrt{\alpha+\gamma}} \int_0^u \frac{du}{R+\alpha-(\alpha-\beta)\sin^2 \operatorname{am} u}$$

$$+ \frac{c}{\sqrt{\alpha+\gamma}} \int_0^u \frac{du}{R-\alpha+(\alpha-\beta)\sin^2 \operatorname{am} u}.$$

Dans le coefficient de la première intégrale, remplaçons la constante c par sa valeur

$$c = \sqrt{(R-\alpha)(R+\beta)(\gamma-R)}.$$

déduite de l'équation

$$(3) \qquad R^2 - z^2 (z - h) - c^2 = (\gamma + z)(\alpha - z)(z - \beta),$$

en y faisant $z = -R$, et décomposons la fraction, qui est sous le signe somme, en deux autres, dont l'une ait en numérateur $\sin^2 \operatorname{am} u$; cette intégrale deviendra

$$\frac{\sqrt{(\gamma - R)(R + \beta)}}{\sqrt{(\gamma + \gamma)(R + \alpha)}} u + \frac{(\alpha - \beta)\sqrt{(\gamma - R)(R + \beta)}}{(R + \alpha)\sqrt{(\gamma + \alpha)(R + \gamma)}} \int_0^u \frac{\sin^2 \operatorname{am} u \, du}{1 - \frac{\alpha - \beta}{R - \alpha} \sin^2 \operatorname{am} u}.$$

Or, soit μ un angle compris entre o et $\frac{\pi}{2}$, et tel que l'on ait

$$\operatorname{tang} \mu = \sqrt{\frac{\gamma - R}{R + \beta}};$$

si l'on pose

$$a = \int_0^{\mu} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}},$$

on aura

$$\sin \operatorname{am}(a, k') = \sqrt{\frac{\gamma - R}{\beta + \gamma}},$$

$$\cos \operatorname{am}(a, k') = \sqrt{\frac{R + \beta}{\beta + \gamma}},$$

$$\Delta \operatorname{am}(a, k') = \sqrt{\frac{R + \alpha}{\alpha + \gamma}};$$

les formules [*]

$$\sin \operatorname{am}(iu) = i \operatorname{tang} \operatorname{am}(u, k'),$$

$$\cos \operatorname{am}(iu) = \frac{1}{\cos \operatorname{am}(u, k')},$$

$$\Delta \operatorname{am}(iu) = \frac{\Delta \operatorname{am}(u, k')}{\cos \operatorname{am}(u, k')};$$

donneront donc ici

$$\sin \operatorname{am}(ia) = i\sqrt{\frac{\gamma - R}{R + \beta}},$$

$$\cos \operatorname{am}(ia) = \sqrt{\frac{\beta + \gamma}{R + \beta}},$$

$$\Delta \operatorname{am}(ia) = k'\sqrt{\frac{R + \alpha}{R + \beta}}.$$

---

[*] *Fundamenta nova, etc.*, page 34.

D'ailleurs, si l'on applique aux intégrales ia et K les formules d'addition, on trouve

$$\sin \operatorname{am}(ia + K) = \frac{\cos \operatorname{am}(ia)}{\Delta \operatorname{am}(ia)},$$

$$\cos \operatorname{am}(ia + K) = -\frac{k' \sin \operatorname{am}(ia)}{\Delta \operatorname{am}(ia)},$$

$$\Delta \operatorname{am}(ia + K) = \frac{k'}{\Delta \operatorname{am}(ia)};$$

ou bien, en ayant égard aux valeurs précédentes,

$$\sin \operatorname{am}(ia + K) = \sqrt{\frac{\alpha + \gamma}{R + \alpha}},$$

$$\cos \operatorname{am}(ia + K) = i\sqrt{\frac{\gamma - R}{R + \alpha}},$$

$$\Delta \operatorname{am}(ia + K) = \sqrt{\frac{R + \beta}{R + \alpha}}.$$

On a donc

$$\frac{\sqrt{(\gamma - R)(R + \beta)}}{\sqrt{(\alpha - \gamma)(R + \alpha)}} = \frac{i \cos \operatorname{am}(ia + K)\,\Delta \operatorname{am}(ia + K)}{\sin \operatorname{am}(ia + K)},$$

$$\frac{\alpha - \beta}{R + \alpha} = k^2 \sin^2 \operatorname{am}(ia + K),$$

$$\frac{\alpha - \beta}{R + \alpha}\frac{\sqrt{(\gamma - R)(R + \beta)}}{\sqrt{(\alpha - \gamma)(R + \alpha)}} = i k^2 \sin \operatorname{am}(ia + K) \cos \operatorname{am}(ia + K)\,\Delta \operatorname{am}(ia + K);$$

et si l'on pose, avec M. Jacobi,

$$\Pi(u, a) = \int_0^u \frac{k^2 \sin \operatorname{am} a \cos \operatorname{am} a\,\Delta \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} u\,du}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} u},$$

l'intégrale ci-dessus deviendra

$$\frac{\cos \operatorname{am}(ia + K)\,\Delta \operatorname{am}(ia + K)}{\sin \operatorname{am}(ia + K)} = i\,\Pi(u, ia + K).$$

La formule qui exprime les fonctions Π, au moyen de la transcendante Θ, est [*]

$$\Pi(u, a) = \frac{d \log \Theta(a)}{da} u + \frac{1}{2} \log \frac{\Theta(u - a)}{\Theta(u + a)};$$

* *Fundamenta nova*, etc., page 176.

on a d'ailleurs

$$\frac{i\cos\operatorname{am}(ia+K)\,\Delta\operatorname{am}(ia+K)}{\sin\operatorname{am}(ia+K)} = \frac{d\log\sin\operatorname{am}(ia+K)}{da}$$

$$= \frac{d\log H_1(ia)}{da} - \frac{d\log\Theta_1(ia)}{da}.$$

En effectuant les substitutions, on trouvera donc, pour la première intégrale,

$$\frac{d\log H_1(ia)}{da}\,u - \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia)}{\Theta_1(u+ia)}.$$

La seconde intégrale se calcule d'une manière analogue; seulement il faut prendre, pour la constante c, l'expression

$$c = \sqrt{(R-\alpha)(R-\beta)(\gamma+R)},$$

obtenue en faisant $z = R$ dans l'équation (3), et donner au paramètre la forme $-k^2\sin^2\operatorname{am}(ia_1)$; à cet effet, on pose

$$\operatorname{tang}\mu_1 = \sqrt{\frac{\alpha+\gamma}{R-\alpha}}, \qquad a_1 = \int_0^{\mu_1}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}},$$

μ_1 étant un angle compris entre o et $\frac{\pi}{2}$; et l'on obtient pour dernier résultat

$$\frac{d\log H(ia_1)}{da_1}\,u + \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia_1)}{\Theta(u-ia_1)}.$$

L'angle ψ étant la somme des deux intégrales, si l'on pose

$$\frac{\Psi}{K} = \frac{d\log H(ia_1)}{da_1} + \frac{d\log H_1(ia)}{da},$$

$$\psi' = \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia_1)}{\Theta(u-ia_1)} - \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia)}{\Theta_1(u+ia)},$$

on aura

$$\psi = \frac{\Psi}{K}\,u + \psi'.$$

10. Puisque $\Theta(u)$ et $\Theta_1(u)$ conservent leurs valeurs lorsque u augmente de $2K$, ψ' est une fonction périodique du temps. L'angle ψ se compose donc d'une partie proportionnelle au temps et d'une par-

tie périodique; et si l'on imagine que, dans le plan horizontal, sur lequel est projetée la courbe décrite par le mobile, l'axe polaire tourne autour du centre de la sphère avec une vitesse angulaire constante $\frac{\Psi}{T}$, le rayon vecteur de la projection oscillera de part et d'autre de cette droite. Pour $t = 0, T, 2T, 3T$, etc., on a $\psi' = 0$; de plus, pour deux valeurs de t égales à un multiple quelconque de T, augmenté ou diminué de la même quantité, ψ' prend deux valeurs égales et de signes contraires. Ainsi, à la fin de chaque demi-période, le rayon vecteur est revenu coïncider avec l'axe mobile, dont il s'était d'abord écarté, et pendant la demi-période suivante, il exécute le même mouvement, mais de l'autre côté de cette droite, les écarts se reproduisant symétriquement et dans un ordre inverse.

De la fin d'une demi-période au commencement de la demi-période suivante, l'angle décrit réellement par le rayon vecteur est Ψ.

11. Pour obtenir le développement en série de $\frac{\Psi}{K}$, faisons

$$\frac{2Kx}{\pi} = ia,$$

dans la formule [*]

$$H\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)$$

$$= \frac{2\sqrt{q}\,\Theta(0)}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\ldots}\sin x(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\ldots$$

et posons

$$a_1 = b_1 K',$$

b_1 étant un nombre compris entre zéro et l'unité. Nous aurons, en remplaçant les cosinus d'arcs imaginaires par des exponentielles,

$$H(ia_1) = \frac{i\sqrt{q}\,\Theta(0)}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\ldots}\,q^{\frac{b_1}{2}}(1-q^{b_1})(1-q^{2-b_1})(1-q^{2+b_1})(1-q^{4-b_1})(1-q^{4+b_1})\ldots$$

Si l'on prend les logarithmes, et qu'on dérive par rapport à a_1, il

[*] *Fundamenta nova*, etc., page 172.

viendra

$$\frac{d\log \mathrm{H}(ia_1)}{da_1} = \frac{\pi}{\mathrm{K}}\left(\frac{1}{2} + \frac{q^{b_1}}{1-q^{b_1}} - \frac{q^{2-b_1}}{1-q^{2-b_1}} + \frac{q^{2+b_1}}{1-q^{2+b_1}} - \frac{q^{4-b_1}}{1-q^{4-b_1}} + \frac{q^{4+b_1}}{1-q^{4+b_1}} - \ldots\right).$$

De cette expression, on déduit celle de $\frac{d\log \mathrm{H}(ia)}{da}$ en remplaçant ia_1 par $\mathrm{K} - ia$, ou b_1 par $\frac{i\pi}{\log q} - b$; et comme on a

$$\pm i\pi = \log(-1),$$

cela revient à remplacer q^{b_1} par $-q^b$, et q^{-b_1} par $-q^{-b}$. On trouvera donc

$$\frac{d\log \mathrm{H}(ia)}{da} = \frac{\pi}{\mathrm{K}}\left(\frac{1}{2} - \frac{q^b}{1+q^b} + \frac{q^{2-b}}{1+q^{2-b}} - \frac{q^{2+b}}{1+q^{2+b}} + \frac{q^{4-b}}{1+q^{4-b}} - \frac{q^{4+b}}{1+q^{4+b}} + \ldots\right).$$

La somme de ces deux séries surpasse $\frac{\pi}{2\mathrm{K}}$; ainsi, l'angle que nous avons représenté par Ψ est toujours plus grand que $\frac{\pi}{2}$. C'est ce qui a été démontré d'une autre manière par M. Puiseux [*].

12. Outre les développements qui précèdent, il convient d'en avoir d'autres, suivant les puissances de q', pour le cas où le module k serait voisin de l'unité. Les formules [**]

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{H}(iu, k) &= i\sqrt{\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{K}'}}\, e^{\frac{\pi u^2}{4\mathrm{KK}'}}\, \mathrm{H}(u, k'),\\ \mathrm{H}_1(iu, k) &= \sqrt{\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{K}'}}\, e^{\frac{\pi u^2}{4\mathrm{KK}'}}\, \Theta(u, k'), \end{aligned}\right.$$

[*] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, tome VII.

[**] *Fundamenta nova, etc.*, page 175.

jointes à l'équation (4), et à la suivante [*],

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\Theta\left(\frac{2\,\mathrm{K}x}{\pi}\right) \\ &= \frac{\Theta(0)}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots]^2}(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\ldots \end{aligned}\right.$$

permettent d'obtenir ces nouveaux développements, et donnent

$$\frac{d\log \mathrm{H}(ia_1)}{da_1} = \frac{\pi b}{2\mathrm{K}} + \frac{\pi}{2\mathrm{K}'}\cot\frac{\pi b_1}{2}$$

$$+\frac{2\pi}{\mathrm{K}'}\sin\pi b_1\left(\frac{q'^2}{1-2q'^2\cos\pi b_1+q'^4}+\frac{q'^4}{1-2q'^4\cos\pi b_1+q'^8}+\ldots\right),$$

$$\frac{d\log \mathrm{H}_1(ia)}{da} = \frac{\pi b}{2\mathrm{K}}$$

$$-\frac{2\pi}{\mathrm{K}'}\sin\pi b_1\left(\frac{q'}{1-2q'\cos\pi b+q'^2}+\frac{q'}{1-2q'^2\cos\pi b+q'^4}+\ldots\right).$$

13. Chacun des facteurs du second membre de l'équation (6) peut s'écrire

$$1-2q^n\cos 2x+q^{2n} = (1-q^n e^{2ix})(1-q^n e^{-2ix}),$$

n étant un nombre entier quelconque. En remplaçant x par $x+\frac{b_1}{2i}\log q$, pour obtenir $\Theta(u+ia_1)$, et par $x-\frac{b_1}{2i}\log q$, pour obtenir $\Theta(u-ia_1)$, puis, en divisant le premier résultat par le second, on trouve

$$\frac{1-q^{n-b_1}e^{-2ix}}{1-q^{n-b_1}e^{2ix}}\cdot\frac{1-q^{n+b_1}e^{2ix}}{1-q^{n+b_1}e^{-2ix}};$$

or, si on représente la première de ces deux fractions par e^{2iy}, et la seconde par e^{-2iy_1}, il viendra

$$y = \text{arc tang}\,\frac{q^{n-b_1}\sin 2x}{1-q^{n-b_1}\cos 2x},$$

$$y_1 = \text{arc tang}\,\frac{q^{n+b_1}\sin 2x}{1-q^{n+b_1}\cos 2x};$$

[*] *Fundamenta nova, etc.*, page 172.

on a donc

$$\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia_1)}{\Theta(u-ia_1)} = \text{arc tang}\,\frac{q^{1-b_1}\sin 2x}{1-q^{1-b_1}\cos 2x}$$

$$+\,\text{arc tang}\,\frac{q^{3-b_1}\sin 2x}{1-q^{3-b_1}\cos 2x} + \text{arc tang}\,\frac{q^{5-b_1}\sin 2x}{1-q^{5-b_1}\cos 2x} + \ldots$$

$$-\,\text{arc tang}\,\frac{q^{1+b_1}\sin 2x}{1-q^{1+b_1}\cos 2x} - \text{arc tang}\,\frac{q^{3+b_1}\sin 2x}{1-q^{3+b_1}\cos 2x}$$

$$-\,\text{arc tang}\,\frac{q^{5+b_1}\sin 2x}{1-q^{5+b_1}\cos 2x} - \ldots.$$

L'autre développement peut se déduire de celui-ci, en y remplaçant u par $K-u$, ou x par $\frac{\pi}{2}-x$, ce qui donne

$$\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia_1)}{\Theta_1(u+ia_1)} = \text{arc tang}\,\frac{q^{1-b}\sin 2x}{1+q^{1-b}\cos 2x}$$

$$+\,\text{arc tang}\,\frac{q^{3-b}\sin 2x}{1+q^{3-b}\cos 2x} + \text{arc tang}\,\frac{q^{5-b}\sin 2x}{1+q^{5-b}\cos 2x} + \ldots$$

$$-\,\text{arc tang}\,\frac{q^{1+b}\sin 2x}{1+q^{1+b}\cos 2x} - \text{arc tang}\,\frac{q^{3+b}\sin 2x}{1+q^{3+b}\cos 2x}$$

$$-\,\text{arc tang}\,\frac{q^{5+b}\sin 2x}{1+q^{5+b}\cos 2x} - \ldots.$$

Comme on a, à l'origine du temps, $x=0$ et $\psi'=0$, on peut prendre pour chacun des arcs qui entrent dans ces formules, celui qui s'annule en même temps que x.

14. Si l'on calcule $\tang^2\mu_1 - \tang^2\mu$, en ayant égard à la valeur $\frac{R^2+\alpha^2}{\alpha+\beta}$ de γ, on obtient un résultat qui est évidemment positif; on a donc toujours $\mu_1 > \mu$, et, par conséquent, $b_1 > b$. De là on conclut que la première des deux séries du numéro précédent l'emporte sur la seconde, lorsque t, abstraction faite des périodes, est compris entre zéro et $\frac{T}{2}$: l'angle ψ', qui est la différence entre les deux séries, est alors positif. Ainsi, pendant la première moitié du temps que le corps emploie à monter, le grand cercle vertical qui le contient est en avance sur le plan qui tournerait autour de l'axe des z avec la vitesse angulaire constante $\frac{\eta}{T}$: le contraire a lieu pendant la seconde moitié du temps que le corps emploie à descendre. Dans l'intervalle, si le sommet le plus élevé de la courbe décrite par le mobile appartient à l'hémisphère inférieur, l'écart ne changera de sens qu'au moment où ce

sommet sera atteint; c'est ce qu'on peut établir par des considérations géométriques.

Le premier terme de la première série atteint son maximum lorsqu'on a $\cos 2x = q^{1-b_1}$, et devient alors arc sin q^{1-b_1}; l'écart est donc toujours moindre que arc sin q^{1-b_1}, et, à plus forte raison, que $\frac{\pi}{2}$.

En prenant la dérivée de ψ' par rapport à t, on obtiendrait la vitesse angulaire du mouvement d'oscillation; cette dérivée est négative pour $x = \frac{\pi}{4}$: par conséquent, au milieu de la première demi-période, l'écart va déjà en décroissant. Elle est aussi négative pour $x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$, mais, comme alors ψ' est lui-même négatif, ce signe indique qu'au milieu de la seconde demi-période, l'écart n'a pas encore atteint son *maximum*.

15. On peut trouver, au moyen de la seconde des équations (5), les séries dont il faudrait se servir pour calculer ψ', si k était voisin de l'unité. On tire de cette équation

$$\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia_1)}{\Theta(u-ia_1)} = -\frac{\pi a_1 u}{2KK} + \frac{1}{2i}\log\frac{H_1(a_1-iu, k')}{H_1(a_1+iu, k')},$$

et il vient, en développant,

$$\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia_1)}{\Theta(u-ia_1)} = \text{arc tang}\left(\frac{q^{-\frac{x}{\pi}} - q^{\frac{x}{\pi}}}{q^{-\frac{x}{\pi}} + q^{\frac{x}{\pi}}}\,\text{tang}\,\frac{\pi b}{2}\right)$$

$$- b_1 x + \sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\text{arc tang}\,\frac{\sin\pi b_1 . q^{2n-\frac{2x}{\pi}}}{1+\cos\pi b_1 . q^{2n-\frac{2x}{\pi}}} - \text{arc tang}\,\frac{\sin\pi b_1 . q^{2n+\frac{2x}{\pi}}}{1+\cos\pi b_1 . q^{2n+\frac{2x}{\pi}}}\right).$$

En remplaçant, dans cette formule, x par $\frac{\pi}{2} - x$, et a_1 par a, on aura aussi

$$\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u-ia)}{\Theta(u+ia)}$$

$$b_1 x - \sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\text{arc tang}\,\frac{\sin\pi b q^{2n+1-\frac{2x}{\pi}}}{1+\cos\pi b q^{2n+1-\frac{2x}{\pi}}} - \text{arc tang}\,\frac{\sin\pi b q^{2n+1+\frac{2x}{\pi}}}{1+\cos\pi b q^{2n+1+\frac{2x}{\pi}}}\right).$$

16. De la valeur trouvée pour l'angle ψ', on déduit

$$e^{2i\psi'} = \frac{\Theta(u+ia_1)\Theta_1(u+ia)}{\Theta(u-ia_1)\Theta_1(u-ia)};$$

si l'on pose

$$R^2 = \Theta(u+ia_1)\Theta(u-ia_1)\Theta_1(u+ia)\Theta_1(u-ia),$$

il viendra donc, pour les lignes trigonométriques de cet angle,

$$\sin\psi' = \frac{\Theta(u+ia_1)\Theta_1(u+ia) - \Theta(u-ia_1)\Theta_1(u-ia)}{2iR},$$

$$\cos\psi' = \frac{\Theta_1(u+ia_1)\Theta_1(u+ia) + \Theta(u-ia_1)\Theta_1(u-ia)}{2R},$$

$$\operatorname{tang}\psi' = \frac{1}{i}\,\frac{\Theta(u+ia_1)\Theta_1(u+ia) - \Theta(u-ia_1)\Theta_1(u-ia)}{\Theta(u+ia_1)\Theta_1(u+ia) + \Theta(u-ia_1)\Theta_1(u-ia)}.$$

En appliquant la formule (1) aux fonctions (Θ), qui entrent dans ces expressions, et en posant

$$\begin{aligned} P_1 = 1 - q^{1-b_1}(1+q^{2b_1})\cos 2x + q^{1-2b_1}(1+q^{4b_1})\cos 4x \\ - q^{9-3b_1}(1+q^{6b_1})\cos 6x + \ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_1 = q^{1-b_1}(1-q^{2b_1})\sin 2x - q^{1-2b_1}(1-q^{4b_1})\sin 4x \\ - q^{9-3b_1}(1-q^{6b_1})\sin 6x - \ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P = 1 + q^{1-b}(1+q^{2b})\cos 2x + q^{1-2b}(1+q^{4b})\cos 4x \\ + q^{9-3b}(1+q^{6b})\sin 6x + \ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q = q^{1-b}(1-q^{2b})\sin 2x + q^{1-2b}(1+q^{4b})\sin 4x \\ - q^{9-3b}(1-q^{6b})\sin 6x + \ldots \end{aligned}$$

on trouvera

$$R^2 = (P^2+Q^2)(P_1^2+Q_1^2), \quad \sin\psi' = \frac{PQ_1 - QP_1}{R},$$

$$\cos\psi' = \frac{PP_1 + QQ_1}{R}, \qquad \operatorname{tang}\psi' = \frac{PQ_1 - QP_1}{PP_1 + QQ_1}.$$

On obtiendrait des développements suivant les puissances de q', pour le cas où q serait voisin de l'unité, en partant de la double for-

mule

$$\Theta(u \pm ia, k) = \sqrt{\frac{K}{K'}}\, e^{-\pi \frac{u \pm ia^2}{4KK'}}\, H_1(a \pm iu, k'),$$

qui est donnée par l'équation (5).

17. Le mobile étant rapporté à l'axe des z et à deux axes horizontaux des x' et des y' perpendiculaires entre eux, et passant par le centre de la sphère, on aurait

$$x' = r\cos\psi', \quad y' = r\sin\psi',$$

et les trois coordonnées seraient des fonctions périodiques du temps, si les deux derniers axes tournaient autour de l'origine avec la vitesse angulaire $\frac{4}{T}$. L'abscisse et l'ordonnée seraient

$$x = x'\cos\frac{4}{T}t - y'\sin\frac{4}{T}t, \quad y = y'\cos\frac{4}{T}t + x'\sin\frac{4}{T}t,$$

si l'on prenait deux axes fixes, dont le premier fût situé dans le plan du grand cercle vertical qui passe par le point de départ.

Calcul de l'arc s.

18. La vitesse du mobile, à un instant quelconque, est, en fonction de u,

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2g}\sqrt{\gamma - \beta - (\alpha - \beta)\sin^2 \operatorname{am} u};$$

de cette équation on tire, en remplaçant dt par sa valeur proportionnelle à du, et en intégrant,

$$s = R\sqrt{\frac{\gamma - \beta}{\alpha + \gamma}} \int_0^u \sqrt{1 - \frac{\alpha - \beta}{\gamma - \beta}\sin^2 \operatorname{am} u}\, du.$$

Pour ramener cette expression aux fonctions elliptiques, posons

$$l^2 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\gamma^2 - \beta^2}$$

et

$$(7) \qquad \operatorname{am}(v, l) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{coam}(u, k).$$

nous aurons, en différentiant,

$$\Delta \operatorname{coam}(u, k)\, du = \Delta \operatorname{am}(\mathrm{v}, l)\, d\mathrm{v}.$$

D'ailleurs, les formules d'addition appliquées aux deux fonctions k et $u - k$ donnent

$$\sin \operatorname{am} u = \frac{\cos \operatorname{coam} u}{\Delta \operatorname{coam} u};$$

on peut donc obtenir $\sin \operatorname{am} u$ et du, en fonction de v, au moyen de l'équation (7). Si l'on effectue les substitutions dans la valeur de $\frac{s}{2\mathrm{R}}$, on trouvera

$$\frac{s}{2\mathrm{R}} = \frac{kk'}{\sqrt{k^2 + k'^2 l^2}} \int_0^{\mathrm{v}} \frac{\Delta^2 \operatorname{am}(\mathrm{v}, l)}{k'^2 + k^2 \sin^2 \operatorname{am}(\mathrm{v}, l)}\, d\mathrm{v};$$

puis, en posant

$$l'^2 = 1 - l^2, \quad \operatorname{tang} \nu = \frac{k}{k' l}, \quad \varepsilon = \int_0^{\nu} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - l'^2 \sin^2 \varphi}},$$

et en appliquant la formule relative aux fonctions Π,

$$\frac{s}{2\mathrm{R}} = \frac{d \log \mathrm{H}_1(i\varepsilon)}{d\varepsilon}\, \mathrm{v} + \frac{1}{2i} \log \frac{\Theta(\mathrm{v} + i\varepsilon)}{\Theta(\mathrm{v} - i\varepsilon)}.$$

19. La quantité auxiliaire v n'est pas, comme u, proportionnelle au temps; mais c'est une intégrale elliptique de première espèce, dont on connaît le module l, et dont l'amplitude est donnée par l'équation (7). En vertu de cette équation, le développement de $\operatorname{am}(\mathrm{v}, l)$ s'obtiendra, en remplaçant dans la formule[*]

$$\operatorname{am} \frac{(2\mathrm{K}x)}{\pi} = x + \frac{2q \sin 2x}{1 + q^2} + \frac{2q^2 \sin 4x}{2(1 + q^4)} + \frac{2q^3 \sin 6x}{3(1 + q^6)} + \ldots$$

x par $x - \frac{\pi}{2}$, et en ajoutant $\frac{\pi}{2}$ au second membre, ce qui donnera

$$\operatorname{am}(\mathrm{v}, l) = x - \frac{2q \sin 2x}{1 + q^2} - \frac{2q^2 \sin 4x}{2(1 + q^4)} - \frac{2q^3 \sin 6x}{3(1 + q^6)} - \ldots$$

[*] *Fundamenta nova, etc.*, page 102.

20. On a en même temps $u = 0$ et $v = 0$, $u = K$ et $v = L$, L représentant la fonction complète dont le module est l; de plus, si u augmente de $2K$, v augmentera de $2L$, de sorte que l'expression $\frac{v}{L} - \frac{u}{K}$ ne change pas, lorsque le temps augmente de $2T$. On a donc

$$v = \frac{L}{K} u + v',$$

v' étant une fonction périodique du temps. Pour la même raison, la valeur de $\frac{1}{2i} \log \frac{\Theta(v + i\varepsilon)}{\Theta(v - i\varepsilon)}$ ne change pas, lorsque t augmente de $2T$; par conséquent, si on pose

$$S = 2RL \frac{d \log H(i\varepsilon)}{d\varepsilon}, \qquad s = \frac{S}{L} v' + \frac{R}{i} \log \frac{\Theta(v + i\varepsilon)}{\Theta(v - i\varepsilon)},$$

d'où il résulte

$$s = \frac{S}{K} u + s'.$$

on aura décomposé s en deux parties, l'une proportionnelle au temps, et l'autre périodique. Ainsi, le mouvement du point matériel, sur la courbe qu'il décrit, est un mouvement d'oscillation périodique, effectué de part et d'autre, d'un point fictif qui glisserait sur cette courbe avec la vitesse constante $\frac{S}{T}$. S représente la longueur de l'arc compris entre deux sommets.

Cette longueur est toujours inférieure à πR, et plus grande que

$$\pi R \frac{e^{\frac{\pi\varepsilon}{L}} - 1}{e^{\frac{\pi\varepsilon}{L}} + 1}.$$

Cas particuliers du mouvement.

21. Les formules précédemment obtenues s'appliquent aux cas limites.

Supposons d'abord, comme dans le cas traité par Huyghens, que

la vitesse initiale soit dirigée horizontalement et ait pour valeur

$$v_0 = \sqrt{\frac{g(R^2 - z_0^2)}{z_0}},$$

ce qui suppose que le point de départ appartienne à l'hémisphère inférieur ; il viendra

$$\alpha = z_0 = \beta, \quad k = 0, \quad K = \frac{\pi}{2}, \quad K' = \infty, \quad q = 0;$$

le développement de z, dans lequel on a

$$A + B = \frac{1}{2}\left(\frac{kK}{\pi}\right)^2,$$

donnera donc

$$z = \alpha,$$

comme on devait s'y attendre.

Il vient aussi

$$b = 0, \quad b_1 = 0;$$

d'où il résulte

$$\psi' = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\Psi}{K} = \lim \frac{1 - q^b}{1 + q^b} + \lim \frac{1 + q^b}{1 - q^b};$$

or, pour $k = 0$, on a

$$\frac{1 - q^b}{1 + q^b} = \frac{e^a - e^{-a}}{e^a + e^{-a}} = \frac{1}{i}\,\text{tang}\,(ia) = \frac{1}{i}\,\text{tang am}\,(ia).$$

Cette dernière expression peut être remplacée par $\sin \text{am}\,(a, k')$, ou par $\sin \mu$; on aura donc

$$\lim \frac{1 - q^b}{1 + q^b} = \sqrt{\frac{\gamma - R}{\gamma + \alpha}}.$$

On trouvera de même

$$\lim \frac{1 + q^{b_1}}{1 - q^{b_1}} = \frac{1}{\sin \mu_1} = \sqrt{\frac{\gamma + R}{\gamma + \alpha}};$$

d'où il résulte

$$\frac{\Psi}{K} = \frac{2R}{\sqrt{2\alpha(\gamma + \alpha)}} \quad \text{et} \quad \psi = \sqrt{\frac{g}{\alpha}}\,t;$$

ce qui s'accorde avec les résultats connus [*].

[*] *Mécanique analytique*, tome II, page 205.

Pour $\alpha = \beta$, on a aussi

$$l = 0,$$

et, par conséquent,

$$v = u;$$

il vient, de plus,

$$\frac{d \log H_1(i\varepsilon)}{d\varepsilon} = \sin\nu = \frac{\sqrt{R^2 - \alpha^2}}{\sqrt{2\alpha(\gamma + \alpha)}}, \quad \text{et} \quad s = \sqrt{\frac{g}{\alpha}(R^2 - \alpha^2)}\, t.$$

22. Si la vitesse initiale est nulle, ou si elle est tangente à un grand cercle vertical, le mouvement s'effectuera sur la circonférence de ce cercle, et l'on aura

$$\alpha = \gamma = R, \quad \beta = h;$$

d'où

$$T = K\sqrt{\frac{R}{g}}, \quad u = \sqrt{\frac{g}{R}}\, t, \quad z = R - (R - h)\sin^2 \operatorname{am} u;$$

c'est le cas du pendule circulaire. Il n'y a pas lieu alors à chercher l'angle ψ.

L'arc s se calculera en faisant $l' = 0$ dans les développements qui ont été donnés pour le cas où le module serait voisin de l'unité; ces développements deviendront

$$\frac{d \log H_1(i\varepsilon)}{d\varepsilon} = 0, \quad \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(v + i\varepsilon)}{\Theta(v - i\varepsilon)} = \lim \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}} \operatorname{tang}\frac{\pi\varepsilon}{2L'}\right).$$

Or, on a ici

$$\operatorname{tang}\frac{\pi\varepsilon}{2L'} = \frac{k}{k'}, \quad v = \log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\operatorname{am} v}{2}\right) = \log \cot\frac{\operatorname{coam} u}{2},$$

d'où l'on tire

$$\frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}} = \cos \operatorname{coam} u = \frac{k' \sin \operatorname{am} u}{\Delta \operatorname{am} u};$$

il viendra donc, par la substitution,

$$s = 2R \arcsin(k \sin \operatorname{am} u) = 2R \operatorname{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right).$$

23. Soit, de plus, $h = -R$; on aura $k = 1$, $T = \infty$, de sorte que le mobile s'approchera indéfiniment du point le plus haut de la sphère, où sa vitesse serait nulle, sans jamais l'atteindre; c'est le seul cas où

la périodicité disparaisse : alors la quantité auxiliaire v est nulle, mais le rapport de $\frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}}$ à k' reste déterminé en fonction de u, et il vient

$$z = \mathrm{R}\left[1 - 2\left(\frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}\right)^2\right], \quad s = 2\,\mathrm{R} \arcsin \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}.$$

Mouvement d'une ligne matérielle pesante autour d'un de ces points.

24. Le mouvement d'un point matériel pesant sur une sphere serait réalisé en supposant ce point fixé au centre par une ligne inflexible et sans masse. Si l'on ne fait plus abstraction de la masse de cette ligne, les formules données plus haut ne seront pas immédiatement applicables, mais on pourra toujours déterminer sur la tige un point dont le mouvement sera le même que celui d'un pendule simple [*].

Soient m la masse d'un point quelconque de la tige, w sa vitesse, ρ sa distance au point de suspension, ζ la projection sur une verticale de cette distance, comptée dans le sens de la pesanteur ; si l'on appelle w_0 et ζ_0 les valeurs initiales de w et de ζ, le principe des forces vives donnera

$$(8) \qquad \Sigma\, m(w^2 - w_0^2) = 2g\, \Sigma\, m(\zeta - \zeta_0).$$

Considérons un point particulier de la tige, pour lequel les quantités ρ, ζ, w, ζ_0 et w_0 soient respectivement égales à R, z, v, z_0 et v_0 : nous aurons

$$\frac{w}{v} = \frac{w_0}{v_0} = \frac{\zeta}{z} = \frac{\zeta_0}{z_0} = \frac{\rho}{\mathrm{R}} ;$$

de sorte que l'équation (8) deviendra

$$(v^2 - v_0^2)\, \Sigma\, m\rho^2 = 2g\,\mathrm{R}\,(z - z_0)\, \Sigma\, m\rho.$$

Or, si l'on désigne par f la distance du centre de gravité de la tige au point de suspension, par M la masse de cette tige, et par $\mathrm{M}\lambda^2$ son

[*] Je dois cette remarque à M. Sturm.

moment d'inertie par rapport au centre de gravité, on a

$$\Sigma m\rho^2 = M(f^2 + \lambda^2), \quad \Sigma m\rho = Mf;$$

il vient donc, par la substitution,

$$v^2 = v_0^2 + \frac{2gRf}{f^2 + \lambda^2}(z - z_0).$$

Pour le pendule simple, dont le point considéré formerait l'extrémité, on aurait

$$v^2 = v_0^2 + 2g(z - z_0),$$

et, comme le principe des aires appliqué au point horizontal fournit la même équation dans l'un et l'autre cas, il suffit de prendre, pour satisfaire à la condition énoncée,

$$R = f + \frac{\lambda^2}{f}.$$

On pourra donc appliquer les formules ci-dessus au mouvement du point ainsi déterminé, en y remplaçant R par $f + \frac{\lambda^2}{f}$. Ainsi, dans le plan vertical qui se meut avec lui, le pendule oscille continuellement entre les deux droites qui passent par le point de suspension, et qui font avec la verticale, des angles ayant pour cosinus $\frac{\alpha}{R}$ et $\frac{\beta}{R}$; à des intervalles de temps égaux, avant et après le moment où il coïncide avec l'une de ces droites, il se trouve occuper la même position. Enfin, la projection de la tige, sur le plan horizontal qui passe par le point fixe, et la tige elle-même, dans un des plans tangents au cône décrit par elle, et sur lequel on aurait fait le développement de la surface, sont animées chacune d'un mouvement d'oscillation périodique, de part et d'autre d'une droite tournant, avec une vitesse angulaire constante, autour du point de suspension.

Mouvement d'un point matériel pesant sur une surface de révolution dont l'axe est vertical.

25. Le mouvement d'un point matériel soumis à la seule action de

la pesanteur, et assujetti à rester sur une surface de révolution qui a son axe vertical, présente des caractères de périodicité, dont l'existence est subordonnée toutefois à la forme de la surface et à la nature des circonstances initiales. Lorsque le mouvement a lieu sur une sphère, la question dépend, comme on l'a vu, des fonctions elliptiques, et les formules auxquelles on est conduit mettent d'elles-mêmes en évidence la périodicité. Mais on peut déterminer les cas dans lesquels elle se produit, et l'établir pour tous ces cas, sans particulariser la surface.

L'axe des z étant pris sur l'axe de révolution, dans le sens de la pesanteur, et l'axe des x sur l'une des droites horizontales du méridien qui passe par le point de départ, soient, au bout du temps t, v la vitesse du mobile, r la projection du rayon vecteur sur le plan des xy, ψ l'angle décrit par cette projection ou par le plan vertical qui tourne avec elle autour de l'axe des z, θ l'angle que fait dans ce plan, avec une ligne horizontale, la tangente au méridien menée par la position du mobile. Appelons v_0, z_0, r_0 les valeurs initiales de v, de z et de r, et représentons par ω l'angle de la direction de la vitesse initiale avec la tangente au parallèle mené par le point de départ. Si, dans l'équation

$$dz^2 + dr^2 + r^2\,d\psi^2 = v^2\,dt^2,$$

nous remplaçons dr et $d\psi$ par les expressions

$$dr = \cot\theta\,dz, \quad d\psi = \frac{r_0 v_0 \cos\omega}{r^2}\,dt,$$

dont la dernière résulte du principe des aires appliqué au plan des xy, nous aurons

$$(9) \qquad \frac{dz}{dt} = \pm\frac{\sin\theta}{r}\sqrt{r^2 v^2 - r_0^2 v_0^2 \cos^2\omega}.$$

Or, soit

$$x = \varphi(z)$$

l'équation du méridien qui est dans le plan des zx; celle de la surface de révolution sera

$$r = \varphi(z);$$

de plus, si l'on pose

$$h = z_0 - \frac{v_0^2}{2g},$$

le principe des forces vives donnera

$$v^2 = 2g(z - h).$$

Le second membre de l'équation (9) peut donc s'exprimer au moyen de z seulement, et, par une quadrature, on obtiendra t en fonction de cette variable; l'équation des aires fournira l'angle ψ par une nouvelle intégration.

26. L'expression ci-dessus de $\frac{dz}{dt}$, ne renfermant pas l'angle ψ, permet de considérer le mouvement du point matériel, sur le méridien qui tourne avec lui autour de l'axe des z, indépendamment de ce mouvement de rotation. Si l'on pose

$$c^2 = r_0^2(z_0 - h)\cos^2\omega,$$

cette expression devient

$$\frac{dz}{dt} = \pm\sqrt{2g\frac{\sin\theta}{r}\sqrt{r^2(z-h)^2 - c^2}}.$$

Imaginons que, dans le plan des zx, on construise la courbe qui a pour équation

$$x^2(z - h) = c^2;$$

cette courbe se composera de deux branches E et E' symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe des z, tournant leur convexité vers l'origine, et ayant pour asymptotes l'axe des z et une parallèle H à l'axe des x, menée à la distance h, au-dessous de laquelle elles seront situées. Puisque l'on a

$$r_0^2(z_0 - h) - c^2 > 0,$$

le point de départ du mobile se trouve dans la concavité de l'une des deux branches, de E par exemple; cela posé, il faut considérer trois cas :

1°. La portion du méridien, à laquelle appartient le point de

départ, sera une courbe fermée, tracée tout entière dans l'intérieur de E.

2°. Cette courbe, fermée ou non, coupera E en deux points M et N.

3°. On bien enfin, elle s'étendra jusqu'à l'infini, sans rencontrer E, soit d'un seul côté, soit des deux côtés du point de départ.

27. 1°. Dans le premier cas, la vitesse du mobile sur le méridien, savoir :

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\sqrt{2g}}{r}\sqrt{r^2(z-h)-c^2},$$

ne devient jamais nulle, de sorte que ce méridien est décrit tout entier, et toujours dans le même sens, un nombre de fois indéfini. Le temps que le point matériel emploie pour parcourir un arc déterminé σ est, en appelant z_1 et z_2 les valeurs de z pour les deux extrémités de cet arc,

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{z_1}^{z_2}\frac{\pm r\,dz}{\sin\psi\sqrt{r^2(z-h)-c^2}},$$

ou une somme d'intégrales analogues, si l'arc σ présente des sommets pour lesquels la tangente soit horizontale. Ces intégrales ont la même valeur à chaque révolution, et, en particulier, le temps employé par le point matériel, pour décrire le méridien tout entier, est une quantité constante 2T. Ce point reprenant donc sur le méridien la même position, après chaque intervalle de temps égal à 2T, on voit que z et r sont des fonctions périodiques de t.

28. L'angle ψ est donné par l'intégrale

$$\psi = c\sqrt{2g}\int_0^t\frac{dt}{r^2},$$

ou par l'aire de la courbe, dont les points ont pour abscisses les diverses valeurs de t, et pour ordonnées les valeurs correspondantes de $\frac{c\sqrt{2g}}{r^2}$: par conséquent, si l'on mène une parallèle à l'axe des abscisses, à une distance $\frac{\Psi}{T}$ telle, que les deux aires situées, l'une au-dessus, l'autre au-dessous de cette parallèle, et comprises entre elle et la

courbe, soient équivalentes, on aura

$$\psi = \frac{\Psi}{T} t + \psi',$$

ψ' prenant la même valeur toutes les fois que t augmente de $2T$. L'angle ψ se compose donc d'une partie proportionnelle au temps et d'une partie périodique. Cette dernière devient nulle pour $t = 0, 2T, 4T$, etc., et au moins une fois pendant chaque intervalle; de sorte que le rayon vecteur de la projection du mobile, sur le plan des xy, exécute des oscillations périodiques de part et d'autre de la ligne, qui tournerait dans ce plan, et autour de l'origine, avec la vitesse angulaire constante $\frac{\Psi}{T}$. L'angle décrit réellement par ce rayon vecteur, pendant la durée d'une période, est

$$2\Psi = c\sqrt{2g}\int_0^{2T} \frac{dt}{r^2}.$$

De même, si l'on pose

$$2S = \sqrt{2g}\int_0^{2T} \sqrt{z - h}\,dt,$$

la longueur de l'arc de courbe parcouru par le mobile, au bout du temps t, sera

$$s = \frac{S}{T} t + s',$$

s' représentant une fonction périodique du temps.

On peut supposer que l'axe des x et l'axe des y participent au mouvement de rotation uniforme qui a pour vitesse angulaire $\frac{\Psi}{T}$: le mouvement du point matériel rapporté à ces axes et à l'axe des z sera alors complétement périodique.

Pour obtenir la courbe tracée sur la surface, il suffirait de faire tourner autour de l'axe de révolution, un nombre de fois indéfini, et chaque fois de l'angle 2Ψ, la portion qui en a été décrite pendant un intervalle de temps égal à $2T$.

29. 2°. Dans le second cas, le point matériel oscille continuellement

entre le point M et le point N, sur le méridien qui tourne avec lui autour de l'axe des z, et le mouvement est encore périodique. De plus, les temps employés à parcourir un arc déterminé de haut en bas, et de bas en haut, sont les mêmes; car, pour passer de l'un à l'autre cas, il faut changer à la fois le signe de dz et l'ordre des limites de chaque intégrale définie. Le mobile se trouve donc au même point du méridien, à des intervalles de temps égaux, avant et après le moment où il a atteint l'une de ses deux positions extrêmes.

Cette symétrie se reproduit sur la courbe dont l'aire a servi à évaluer l'angle ψ; par conséquent, pour deux valeurs de t égales à un multiple quelconque de T augmenté ou diminué de la même quantité, ψ' prend deux valeurs égales et de signes contraires. Ainsi le rayon vecteur de la projection du mobile sur le plan des xy coïncide, à la fin de chaque intervalle de temps égal à T, avec la droite qui tourne autour de l'origine d'un mouvement uniforme, et les écarts qui se sont produits pendant une demi-période, se reproduisent symétriquement pendant la demi-période suivante. L'angle décrit réellement par le rayon vecteur, pendant chacune de ces demi-périodes, est

$$\Psi = c\sqrt{2g}\int_0^T \frac{dt}{r^2}.$$

La courbe tracée sur la surface par le point matériel présentera une suite de sommets correspondants aux positions M et N du mobile sur le méridien, et sera divisée par chacun de ces sommets en deux parties symétriques.

30. Il peut se faire que le méridien et la branche E soient tangents en l'un des points M et N, en M par exemple; alors, en représentant par α la valeur correspondante de z, et en posant

$$F(z) = \varphi(z)^2(z-h) - c^2,$$

on aura

$$F(\alpha) = 0, \quad F'(\alpha) = 0,$$

et, suivant que le contact sera du second ordre au moins, ou seulement du premier,

$$F''(\alpha) = 0,$$

ou

$$F'''(\alpha) = 2c\sqrt{\alpha - h}\,\varphi''(\alpha) - \frac{3}{2}\frac{c^2}{(\alpha - h)^2}.$$

Cette expression ne pourrait devenir infinie qu'autant que l'on aurait

$$\varphi''(\alpha) = \infty ;$$

si donc on fait abstraction du cas où le méridien présenterait en M un point singulier, pour lequel on aurait $\varphi''(z) = \infty$, en même temps que $\varphi(z)$ et $\varphi'(z)$ seraient finis et différents de zéro, le rapport $\frac{F(z)}{z - \alpha}$ restera fini, pour $z = \alpha$, quel que soit l'ordre du contact. On en conclut que T est infiniment grand, par conséquent la périodicité disparaît, et le mobile s'approche continuellement du point M, sur le méridien, sans jamais l'atteindre. Comme d'ailleurs l'angle φ croît au delà de toute limite, la courbe tracée sur la surface forme une infinité de spires, qui tendent à se confondre avec le parallèle mené par ce point.

Lorsque le méridien est extérieur à la branche E, et la touche seulement au point de départ, le mobile décrit un parallèle d'un mouvement uniforme.

31. 3°. Dans le troisième cas, le mouvement n'offre plus aucun caractère de périodicité, et le point matériel s'éloigne jusqu'à l'infini

SUR LES INTÉGRALES TRANSCENDANTES

$$\int \frac{e^{-x^2}\,dx}{\sqrt{\alpha+\beta x^2}}, \quad \int \frac{e^{-x^2}x^2\,dx}{\sqrt{\alpha+\beta x^2}}, \quad \int \frac{e^{-x^2}\,dx}{(\gamma+\delta x^2)\sqrt{\alpha+\beta x^2}}.$$

PAR M. WILLIAM ROBERTS.

1. Dans une petite Note insérée dans ce Recueil (janvier 1851), je suis parvenu à un cas particulier d'une formule d'Abel, en me servant d'une application simple des coordonnées elliptiques.

Il est évident que la même méthode conduira au théorème dont il s'agit, dans toute sa généralité. En effet, transformons l'intégrale double

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\mu^2+\nu^2)} x^{2p-1} y^{2q-1}\,dx\,dy.$$

en posant

$$bx = \mu\nu, \quad by = \sqrt{(\mu^2-b^2)(b^2-\nu^2)};$$

cela donnera

$$\frac{1}{4} e^{-b^2} b^{2p+2q-1} \Gamma(p)\Gamma(q)$$

$$= \int_b^\infty e^{-\mu^2} (\mu^2-b^2)^{q-1} \mu^{2p+1}\,d\mu \cdot \int_0^b e^{-\nu^2} (b^2-\nu^2)^{q-1} \nu^{2p-1}\,d\nu$$

$$- \int_b^\infty e^{-\mu^2} (\mu^2-b^2)^{q-1} \mu^{2p-1}\,d\mu \cdot \int_0^b e^{-\nu^2} (b^2-\nu^2)^{q-1} \nu^{2p+1}\,d\nu,$$

formule qu'on peut facilement rendre identique avec celle d'Abel, savoir

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \int_0^1 e^{-ax}\,dx\,x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \cdot \int_0^\infty e^{-x}\,dx\,x^{\beta-1}(a+x)^{\alpha}$$

$$- a\int_0^1 e^{-ax}\,dx\,x^{\alpha}(1-x)^{\beta-1} \cdot \int_0^\infty e^{-x}\,dx\,x^{\beta-1}(a+x)^{\alpha-1}.$$

qu'on trouve au tome Ier de ses Œuvres, page 100.

Je ne m'arrêterai pas ici pour développer la formule qui résulterait du changement analogue des variables dans l'intégrale multiple

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2+\ldots+z^2)} x^{2p-1} y^{2q-1} \ldots z^{2r-1} \, dx \, dy \ldots dz$$

Je veux plutôt démontrer quelques relations qui se rapportent non-seulement aux valeurs complètes des transcendantes de l'espèce que cette méthode suggère, mais aussi aux valeurs indéfinies des mêmes intégrales. En effet, considérons la valeur (V) de l'intégrale double

$$\iint e^{-(x^2+y^2)} \, dx \, dy,$$

qu'on étend à tous les éléments de l'espace terminé par le quart de l'ellipse

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} = 1$$

et par ses demi-axes. On aura évidemment, en exprimant V par des coordonnées elliptiques,

$$V e^{-b^2} = \int_b^\mu \frac{e^{-\mu^2} \mu^2 d\mu}{\sqrt{\mu^2 - b^2}} \cdot \int_0^b \frac{e^{-\nu^2} d\nu}{\sqrt{b^2 - \nu^2}} - \int_b^\mu \frac{e^{-\mu^2} d\mu}{\sqrt{\mu^2 - b^2}} \cdot \int_0^b \frac{e^{-\nu^2} \nu \, d\nu}{\sqrt{b^2 - \nu^2}}.$$

Mais si l'on fait $x = r \cos \omega$, $y = r \sin \omega$, on a

$$V = \int^\mu \int_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{-r^2} r dr d\omega = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (1 - e^{-r^2}) \, d\omega.$$

d'où l'on déduit, en vertu de l'équation de l'ellipse,

$$V = \frac{1}{4}\pi - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{-\frac{\mu^2 \mu^2 - b^2}{\mu^2 - b^2 \cos^2 \omega}} d\omega.$$

En posant

$$z^2 = \frac{b^2(\mu^2 - b^2)\cos^2\omega}{\mu^2 - b^2 \cos^2 \omega},$$

il viendra donc

$$V = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2} \mu \sqrt{\mu^2 - b^2} \, e^{-(\mu^2 - b^2)} \int_0^b \frac{e^{-z^2} dz}{(\mu^2 - b^2 + z^2)\sqrt{b^2 - z^2}}.$$

Ecrivons maintenant ν pour z dans cette dernière intégrale définie et nous obtiendrons la formule suivante, en identifiant les deux va-

leurs de V,

$$(\mathrm{I})\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{4}\pi e^{-b^2} - \frac{1}{2}\mu\sqrt{\mu^2-b^2}\, e^{-\mu^2}\int_0^b \frac{e^{-\nu^2}d\nu}{(\mu^2-b^2+\nu^2)\sqrt{b^2-\nu^2}} \\ &= \int_b^\mu \frac{e^{-\mu^2}\mu^2 d\mu}{\sqrt{\mu^2-b^2}}\cdot\int_0^b \frac{e^{-\nu^2}\mu^2 d\nu}{\sqrt{b^2-\nu^2}} - \int_b^\mu \frac{e^{-\mu^2}d\mu}{\sqrt{\mu^2-b^2}}\cdot\int_0^b \frac{e^{-\nu^2}\nu^2 d\nu}{\sqrt{b^2-\nu^2}}. \end{aligned}\right.$$

2. Considérons encore la même intégrale double, étendue à tous les éléments de l'espace infini terminé par le quart de l'hyperbole

$$\frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{b^2-\nu^2} = 1$$

et par son axe réel, prolongé indéfiniment. On aura, dans ce cas,

$$V = \int_r^\infty \int_0^{\omega_0} e^{-r^2} r\,dr\,d\omega = \frac{1}{2}\int_0^{\omega_0} e^{-r^2} d\omega,$$

ω_0 étant l'angle fait par l'asymptote avec l'axe réel ; et, par conséquent,

$$V = \frac{1}{2}\int_0^{\operatorname{arc}\left(\cos=\frac{\nu}{b}\right)} e^{-\frac{\nu^2(b^2-\nu^2)}{b^2\cos^2\omega-\nu^2}} d\omega.$$

Faisons

$$z^2 = \frac{b^2(b^2-\nu^2)\cos^2\omega}{b^2\cos^2\omega-\nu^2},$$

ce qui nous donnera

$$V = \frac{1}{2}\nu\sqrt{b^2-\nu^2}\, e^{b^2-\nu^2}\int_b^\infty \frac{e^{-z^2}dz}{(z^2-b^2+\nu^2)\sqrt{z^2-b^2}}.$$

En écrivant μ pour z dans cette expression, et identifiant le résultat avec la valeur de V, exprimée en coordonnées elliptiques, on en déduira la formule que voici :

$$(\mathrm{II})\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2}\nu\sqrt{b^2-\nu^2}\, e^{-\nu^2}\int_b^\infty \frac{e^{-\mu^2}d\mu}{(\mu^2-b^2+\nu^2)\sqrt{\mu^2-b^2}} \\ &= \int_b^\infty \frac{e^{-\mu^2}\mu^2 d\mu}{\sqrt{\mu^2-b^2}}\cdot\int_\nu^b \frac{e^{-\nu^2}d\nu}{\sqrt{b^2-\nu^2}} - \int_b^\infty \frac{e^{-\mu^2}d\mu}{\sqrt{\mu^2-b^2}}\cdot\int_\nu^b \frac{e^{-\nu^2}\nu\,d\nu}{\sqrt{b^2-\nu^2}}. \end{aligned}\right.$$

On doit observer qu'il n'est pas permis de faire $\nu = 0$, dans cette formule, parce qu'alors la quantité auxiliaire z cesse d'être fonction

de ω et devient égale à b. Dans ce cas, reportons-nous à la valeur de V, exprimée en ω, et nous trouverons

$$\text{(III)}\quad \frac{1}{2}\pi e^{-b^2} = \int_b^\infty \frac{e^{-\mu^2}\mu^2 d\mu}{\sqrt{\mu^2-b^2}} \cdot \int_0^b \frac{e^{-\nu^2} d\nu}{\sqrt{b^2-\nu^2}} - \int_b^\infty \frac{e^{-\mu^2} d\mu}{\sqrt{\mu^2-b^2}} \cdot \int_0^b \frac{e^{-\nu^2}\nu^2 d\nu}{\sqrt{b^2-\nu^2}},$$

comme nous l'avons obtenu déjà. On tombera aussi sur cette équation en posant dans l'équation (I) $\mu = \infty$.

7. En résumé donc, on voit comment la valeur complète de l'intégrale

$$\int \frac{e^{-x^2} dx}{(\gamma + \delta x^2)\sqrt{\alpha + \beta x}}$$

s'exprime en vertu des équations (I) et (II), à l'aide des valeurs indéfinies et complètes des transcendantes ayant pour type

$$\int \frac{e^{-x^2} dx}{\sqrt{a+bx^2}}, \quad \int \frac{e^{-x^2} x^2 dx}{\sqrt{a+bx^2}}.$$

La formule (III) peut être regardée comme analogue à la relation bien connue entre les fonctions elliptiques complètes des deux premières espèces, à modules complémentaires; et, pareillement, les théorèmes qui sont exprimés par les équations (I) et (II) répondent à la réduction, effectuée par Legendre, des fonctions complètes de troisième espèce à celles de première et de seconde espèce. L'équation (III) est due à Abel, comme je l'ai remarqué. Quant aux formules (I) et (II), je crois qu'elles n'avaient pas encore été déjà données.

Dublin, le 10 février 1850.

MÉMOIRE

Sur les intégrales communes à plusieurs problèmes de Mécanique;

PAR M. J. BERTRAND.

(Présenté à l'Académie des Sciences, le 12 Mai 1851.)

Les théorèmes généraux de la Mécanique peuvent se partager en deux classes. Les uns, comme le principe des forces vives, sont des propriétés générales dans leur énoncé, mais variables dans leur expression analytique avec les forces qui agissent sur le système. Les autres, comme le principe des aires et le principe du mouvement du centre de gravité, exigent seulement que les forces remplissent certaines conditions et fournissent alors des intégrales indépendantes de leur expression précise. Il m'a semblé intéressant d'examiner quelle est, entre ces deux classes d'intégrales, celle que l'on doit regarder comme exceptionnelle. Pour y parvenir, j'ai résolu le problème suivant :

Étant connue une intégrale d'un problème de Mécanique, trouver l'expression des forces qui produisent le mouvement, c'est-à-dire trouver quel est le problème.

La solution suppose seulement que les composantes des forces puissent s'exprimer en fonction des coordonnées des points du système : elle fait connaître une équation différentielle partielle du second ordre à laquelle doivent satisfaire toutes les intégrales des équations du mouvement, quelle que soit l'expression des forces en fonction des coordonnées des différents points.

Mais il arrive que, dans certains cas, la méthode générale est en défaut et conduit, pour les forces, à des expressions indéterminées. Ces cas sont les seuls dans lesquels l'intégrale puisse convenir à plu-

sieurs problèmes différents. La méthode fait connaître les conditions nécessaires pour que ces cas se présentent.

J'étudie particulièrement le cas où le système se réduit à un point unique. En supposant que le mouvement s'exécute dans un plan, je fais voir que les intégrales qui peuvent convenir à plusieurs problèmes différents sont au nombre de deux, qui, l'une et l'autre, comprennent le principe des aires comme cas particulier. En supposant ensuite que le point soit placé sur une surface, je suis conduit à cette proposition remarquable : *Pour que les équations du mouvement d'un point placé sur une surface aient une intégrale indépendante du temps, et commune à plusieurs problèmes, il faut que la surface soit de révolution, ou applicable sur une surface de révolution.* En supposant cette condition remplie, je donne la forme de l'intégrale, et l'expression générale des forces dans les problèmes auxquels elle s'applique. J'examine, enfin, le cas plus général, où un point peut se mouvoir librement dans l'espace. Le nombre des intégrales communes à plusieurs problèmes devient alors infini. Après avoir fait connaître une forme générale qui les comprend toutes, je montre comment on pourra obtenir autant de cas particuliers qu'on le voudra. Il suffit, en effet, de résoudre un problème quelconque relatif au mouvement dans un plan, et de faire subir à ses intégrales une transformation très-simple; on obtient ainsi une intégrale nouvelle qui convient à un nombre infini de problèmes différents relatifs au mouvement dans l'espace.

I.

Considérons un système de points complétement libres et sollicités par des forces dont les composantes dépendent de leurs diverses coordonnées. En désignant par X_i, Y_i, Z_i les composantes des forces accélératrices qui sollicitent le point x_i, y_i, z_i, les équations différentielles du mouvement sont

$$(1)\qquad \frac{d^2 x_i}{dt^2} = X_i, \quad \frac{d^2 y_i}{dt^2} = Y_i, \quad \frac{d^2 z_i}{dt^2} = Z_i,$$

l'indice i devant prendre autant de valeurs qu'il y a de points dans le

système. Soit

$$(2) \qquad \alpha = F(x_i, y_i, z_i, \ldots, x'_i, y'_i, z'_i \ldots, t)$$

une intégrale contenant une constante arbitraire α, et résolue par rapport à cette constante; nous allons montrer que l'on peut, en général, de cette seule intégrale, déduire l'expression de toutes les forces. Différentions, en effet, l'équation (2) par rapport à t; nous obtiendrons, après avoir remplacé $\frac{dx'_i}{dt}$, $\frac{dy'_i}{dt}$, $\frac{dz'_i}{dt}$ par X_i, Y_i, Z_i,

$$(3) \quad 0 = \frac{d\alpha}{dt} + \sum \frac{d\alpha}{dx_i} x'_i + \frac{d\alpha}{dy'_i} y'_i + \frac{d\alpha}{dz_i} z'_i + \sum \frac{d\alpha}{dx'_i} X_i + \frac{d\alpha}{dy'_i} Y_i + \frac{d\alpha}{dz'} Z_i.$$

le signe $\sum$ s'étendant à toutes les valeurs entières de i, comprises entre l'unité et le nombre n des points considérés; or il est facile de voir que cette équation (3) doit être une identité, car on peut évidemment, à une époque donnée, assigner des valeurs arbitraires aux coordonnées des différents points et aux composantes de leurs vitesses, c'est-à-dire aux seules quantités qui figurent dans cette équation. L'équation (3) étant identique, on peut la différentier par rapport à x'_i, y'_i, z'_i, et former ainsi des équations nouvelles, en nombre égal à celui des coordonnées des points du système. Ces équations, toutes du premier degré par rapport aux composantes des forces, permettent, *en général*, d'en déterminer la valeur, et nous pouvons, par conséquent, énoncer le théorème suivant :

Connaissant une intégrale des équations du mouvement d'un système libre, on peut, en général, en déduire l'expression des composantes des forces accélératrices et trouver, par suite, quel est le problème qui a conduit à cette intégrale.

Le calcul que nous venons d'indiquer rapidement conduirait presque toujours à des contradictions, si l'on se donnait au hasard l'intégrale dont on veut déduire l'expression des forces. Il arriverait en effet, en général, que les composantes X_i, Y_i, Z_i renfermeraient, dans leur expression, le temps et les composantes des vitesses, tandis que le contraire a été supposé. De plus, les valeurs des composantes ayant

été déduites des équations obtenues par la différentiation de l'équation (3), ne satisferaient pas, en général, à cette équation (3) elle-même, et seraient par conséquent inadmissibles. On voit, d'après cela, que, sans connaître l'expression des forces, on peut assigner un grand nombre de conditions que doivent remplir les intégrales des équations du mouvement. On peut aussi rattacher l'une à l'autre deux intégrales d'un même probleme, en écrivant que toutes deux conduisent à assigner aux forces la même expression. Je me borne à indiquer ici ces remarques, dont le développement présenterait peut-être quelque intérêt.

II.

La méthode exposée pour obtenir l'expression des forces à l'aide d'une seule intégrale donne lieu à une seconde remarque. Les équations du premier degré, auxquelles satisfont les composantes des forces accélératrices, peuvent rentrer les unes dans les autres, et les valeurs de celles-ci devenir, par suite, indéterminées. Dans ce cas, l'intégrale proposée ne suffit pas à la détermination des forces et peut convenir à plusieurs problèmes différents.

L'examen de ces cas remarquables fait l'objet du présent Mémoire. Je m'occuperai spécialement, dans ce premier travail, du cas où le système se réduit à un point unique.

III.

Avant d'aller plus loin, il est essentiel de préciser la nature des intégrales dont nous voulons nous occuper. Si le système considéré se compose de n points, les intégrales complètes doivent contenir $6n$ constantes arbitraires en fonction desquelles et du temps, on peut exprimer les coordonnées des différents points et les composantes des vitesses, ce qui fera en tout $6n$ équations. Si l'on conçoit que ces $6n$ équations soient résolues par rapport aux constantes, on obtiendra des relations contenant chacune une constante arbitraire : ce sont les intégrales que nous considérons. On peut faire, au sujet de la forme de ces intégrales, une observation importante. Le temps, ne

figurant dans les équations du mouvement que par sa différentielle, doit entrer, dans les intégrales, ajouté à une constante; en sorte que, dans les équations qui font connaître, en fonction du temps, les coordonnées et les vitesses des points du système, l'une des $6n$ constantes est combinée au temps par voie d'addition. Lors donc qu'on résoudra ces équations par rapport aux constantes, en éliminant pour cela toutes les constantes excepté une, le temps ne pourra subsister dans le résultat que si la constante non éliminée est celle dont il est inséparable, et, dans ce cas, en cherchant la valeur de cette constante α, le calcul devra donner $\alpha + t$, et, par suite, la valeur de α sera de la forme

$$\alpha = \varphi - t,$$

φ ne contenant pas t. D'après cela, nous admettrons dans les intégrales que nous allons étudier, et qui, par hypothèse, sont résolues par rapport à la constante qu'elles renferment, que le second membre est ou indépendant du temps ou de la forme $\varphi + t$; en sorte que, en désignant l'intégrale par

$$\alpha = \psi,$$

$\frac{d\alpha}{dt}$ soit égal à 0 ou à -1.

IV.

Supposons d'abord que le mouvement se fasse dans un plan et que la position du point mobile dépende, par conséquent, de deux coordonnées x et y. Les équations du mouvement sont alors

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y,$$

X et Y désignant des fonctions quelconques de x et de y.

Soit

$$(2) \qquad \alpha = \varphi(x, y, x', y', t)$$

une intégrale du système, on aura identiquement, comme nous l'avons

remarqué plus haut,

$$(3)\qquad \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\alpha}{dx}x' + \frac{d\alpha}{dy}y' + \frac{d\alpha}{dx'}X + \frac{d\alpha}{dy'}Y = 0;$$

en différentiant l'équation (3) par rapport à x', puis par rapport à y', on obtient les deux suivantes :

$$(4)\qquad \frac{d^2\alpha}{dx\,dx'}x' + \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d^2\alpha}{dy\,dx'}y' + \frac{d^2\alpha}{dx'^2}X + \frac{d^2\alpha}{dy'\,dx'}Y = 0,$$

$$(5)\qquad \frac{d^2\alpha}{dx\,dy'}x' + \frac{d^2\alpha}{dy\,dy'}y' + \frac{d\alpha}{dy} + \frac{d^2\alpha}{dx'\,dy'}X + \frac{d^2\alpha}{dy'^2}Y = 0.$$

X et Y devant satisfaire aux équations (3), (4), (5), leur valeur sera déterminée, à moins que deux de ces équations ne rentrent dans la troisième. On en conclut que le seul cas où l'intégrale α puisse convenir à plusieurs questions est celui où les coefficients de X et Y, dans les équations (3), (4), (5), sont proportionnels, c'est-à-dire le cas où l'on a

$$(6)\qquad \frac{\dfrac{d^2\alpha}{dx'^2}}{\dfrac{d\alpha}{dx'}} = \frac{\dfrac{d^2\alpha}{dx'\,dy'}}{\dfrac{d\alpha}{dy'}}, \qquad \frac{\dfrac{d^2\alpha}{dx'\,dy'}}{\dfrac{d\alpha}{dx'}} = \frac{\dfrac{d^2\alpha}{dy'^2}}{\dfrac{d\alpha}{dy}}.$$

Les équations (6) s'intègrent facilement; elles prouvent que $\log\frac{d\alpha}{dx'}$, $\log\frac{d\alpha}{dy'}$ ont les mêmes dérivées par rapport à x' et à y'. La différence de ces deux logarithmes dépend donc des seules variables x et y, et l'on a, par suite,

$$(7)\qquad \frac{d\alpha}{dx'} = \varphi(x, y)\frac{d\alpha}{dy},$$

équation qui s'intègre facilement et de laquelle on conclut

$$\alpha = F[y' + x'\varphi(x, y', x, y, t)].$$

Telle est donc la forme la plus générale que puisse avoir une intégrale commune à plusieurs problèmes. Il est facile de vérifier que, réciproquement, toutes les fois qu'une intégrale aura cette forme, la méthode indiquée pour en déduire les forces sera en défaut. En répétant même

plusieurs fois la différentiation par rapport à x' et a y' des résultats obtenus, les équations ainsi formées rentreraient toutes les unes dans les autres.

V.

Nous allons chercher maintenant dans quel cas les équations différentielles du mouvement peuvent avoir une intégrale de la forme

$$(1) \qquad \alpha = F[y' + x'\varphi(x, y), x, y, t];$$

de cette équation on conclut, comme il a été dit, l'identité

$$(2) \qquad \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\alpha}{dx}x' + \frac{d\alpha}{dy}y' + \frac{d\alpha}{du}\left(Y + X\varphi + x'^2\frac{d\varphi}{dx} + x'y'\frac{d\varphi}{dy}\right) = 0,$$

dans laquelle, pour abréger, nous représentons par u la somme $y' + \varphi x'$.

En remplaçant, dans l'équation (2), y' par $u - x'\varphi$, nous aurons

$$\frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\alpha}{dx}x' + \frac{d\alpha}{dy}(u - x'\varphi$$

$$+ \frac{d\alpha}{du}\left[Y + X\varphi + x'^2\frac{d\varphi}{dx} + x'(u - x'\varphi)\frac{d\varphi}{dy}\right] = 0.$$

Cette équation étant identique, on peut égaler à zéro le coefficient de x'^2 : on a ainsi

$$0 = \frac{d\varphi}{dx} - \varphi\frac{d\varphi}{dy},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\varphi = \frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{d\varphi}{dy}},$$

et, par suite,

$$u = y' + \varphi . x' = y' + x'\frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{d\varphi}{dy}} = \frac{\frac{d\varphi}{dy}y' + \frac{d\varphi}{dx}x'}{\frac{d\varphi}{dy}} = \frac{\frac{d\varphi}{dt}}{\frac{d\varphi}{dy}} = \frac{\varphi'}{\frac{d\varphi}{dy}}.$$

d'où l'on conclut, en remarquant que $\frac{d\varphi}{dy}$ est une fonction de x et de y, que l'intégrale

$$\alpha = F(y' + x'\varphi, x, y, t)$$

peut s'écrire

$$\alpha = F(\varphi', x, y, t),$$

φ' désignant la dérivée, par rapport à t, d'une fonction $\varphi(x, y)$ qui satisfait à l'équation

$$\frac{d\varphi}{dx} - \varphi\frac{d\varphi}{dy} = 0.$$

Or cette dernière équation s'intègre sans difficulté, et l'on en conclut

$$y = x\varphi + F(\varphi),$$

en sorte que l'équation

$$\varphi = \text{constante}$$

représente une série de lignes droites.

Nous pouvons donc, en résumant les résultats obtenus jusqu'ici, énoncer le théorème suivant :

Si une intégrale des équations du mouvement d'un point dans un plan convient à deux problèmes différents, elle est de la forme

$$\alpha = F(\varphi', x, y, t),$$

φ' étant la dérivée d'une fonction qui, égalée à une constante, représente les équations d'une série de lignes droites.

VI.

Pour déterminer plus complètement la forme de l'intégrale que nous étudions, substituons aux coordonnées x et y deux variables q_1 et q_2, dont l'une soit précisément la fonction φ dont la dérivée figure dans notre intégrale, et dont l'autre soit telle, que les courbes dont l'équation est

$$q_2 = \text{constante}$$

soient orthogonales aux droites

$$q_1 = \text{constante}.$$

L'intégrale

$$(1) \qquad z = F(z', x, y, t)$$

prendra alors la forme

$$(2) \qquad z = F(q'_1, q_1, q_2, t).$$

Pour former les équations du mouvement, par rapport à ces nouvelles variables, nous ferons usage des formules générales données par Lagrange. Soit

$$(3) \qquad ds^2 = A\,dq_1^2 + B\,dq_2^2$$

l'expression du carré de la distance de deux points infiniment voisins: l'expression de la demi-force vive sera alors

$$(4) \qquad T = \tfrac{1}{2}(x'^2 + y'^2) = \tfrac{1}{2}(A\,q'^2_1 + B\,q'^2_2).$$

Or les équations du mouvement sont, d'après les formules générales de la *Mécanique analytique*,

$$(5) \qquad \frac{d}{dt}\frac{dT}{dq'_1} - \frac{dT}{dq_1} = Q_1, \quad Q_1 = X\frac{dx}{dq_1} + Y\frac{dy}{dq_1},$$

$$(6) \qquad \frac{d}{dt}\frac{dT}{dq'_2} - \frac{dT}{dq_2} = Q_2, \quad Q_2 = X\frac{dx}{dq_2} + Y\frac{dy}{dq};$$

en développant l'équation (5), on la met sous la forme

$$(7) \qquad A\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{2}\frac{dA}{dq_1}q'^2_1 - \frac{1}{2}\frac{dB}{dq}q'^2_2 + q'_1 q'_2\frac{dA}{dq} - Q_1 = 0.$$

Les lignes représentées par l'équation $q_1 =$ constante étant droites, leurs trajectoires orthogonales ont toutes mêmes développées et sont des courbes parallèles. La distance de celles qui correspondent aux valeurs q_2 et $q_2 + dq_2$ de la variable q_2 est donc indépendante de q_1, et, par suite, le coefficient B ne contient pas cette variable. On peut donc supprimer, dans l'équation (7), le terme en $\frac{dB}{dq_1}$; il reste alors

$$(8) \qquad A\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{2}\frac{dA}{dq_1}q'^2_1 + \frac{dA}{dq_1}q'_1 q'_2 - Q_1 = 0.$$

En différentiant l'intégrale

$$z = F(q'_1, q_1, q_2, t),$$

on obtient

$$(9) \qquad 0 = \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\alpha}{dq_1} q'_1 + \frac{d\alpha}{dq_2} q'_2 + \frac{d\alpha}{dq'_1} \frac{d^2 q}{dt^2},$$

et, par suite, en remplaçant, dans cette équation (9), $\frac{d^2 q}{dt}$ par sa valeur déduite de l'équation (8), on obtient l'identité

$$(10) \quad \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\alpha}{dq_1} q'_1 + \frac{d\alpha}{dq} q'_2 - \frac{1}{A} \frac{d\alpha}{dq'_1} \left(\frac{1}{2} \frac{dA}{dq_1} q'^2_1 + \frac{dA}{dq_2} q'_1 q'_2 - Q_1 \right) = 0.$$

Cette équation devant être identique, on peut égaler à zéro le coefficient de q'_2; on obtient ainsi

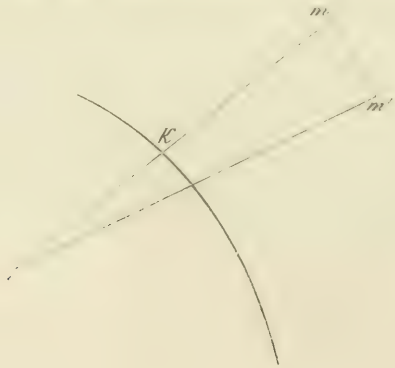
$$\frac{d\alpha}{dq_2} - \frac{1}{A} \frac{d\alpha}{dq'_1} \frac{dA}{dq_2} q'_1 = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$\alpha = \varphi(A q'_1, q_1, t).$$

VII.

Il est essentiel, avant d'aller plus loin, de rechercher la forme du coefficient A qui figure dans notre intégrale. A est, on s'en souvient, le coefficient de dq_1^2 dans l'expression du carré de la distance de deux points infiniment voisins. $A\,dq_1^2$ est, par conséquent, le carré de la distance de deux points qui correspondent à une même valeur de q_2, c'est-à-dire le carré de l'arc infiniment petit, intercepté par les droites q_1 et $q_1 + dq_1$, sur leur trajectoire orthogonale qui correspond à la



valeur q_2. Or, en désignant cet arc par mm', par $d\omega$ l'angle des deux droites, et par l la distance qui sépare l'élément mm' du point o où concourent les deux normales, on a

$$mm' = l\,d\omega.$$

$d\omega$ est, évidemment, de la forme $\varphi(q_1)\,dq_1$; quant à l, on peut le décomposer en deux parties, en nommant k le point où la droite om perce une trajectoire orthogonale déterminée; on a

$$oM = ok + km.$$

Or, ok est fonction de la seule variable q_1, et km peut être considéré comme étant la variable q_2 elle-même, car les points pour lesquels km a la même valeur, forment une trajectoire orthogonale des droites

$$q_1 = \text{constante};$$

nous pouvons donc écrire

$$l = om = \psi(q_1) + q_2.$$

D'après ces valeurs de l et de $d\omega$, on voit que la distance mm' est de la forme

$$[F_1(q_1) + q_2 F_2(q_1)]\,dq_1,$$

et, par suite, son carré $A\,dq_1^2$ est égal à

$$[F_1(q_1) + q_2 F_2(q_1)]^2\,dq_1^2;$$

on a donc, enfin,

$$[F_1(q_1) + q_2 F_2(q_1)]^2 = A.$$

VIII.

En différentiant, par rapport au temps, l'intégrale

$$(1) \qquad \alpha = \varphi(Aq'_1, q_1, t),$$

on obtient, en posant $Aq'_1 = u$,

$$\frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\alpha}{dq_1}q'_1 + \frac{d\alpha}{du}\left(A\frac{d^2q_1}{dt^2} + q'^2_1\frac{dA}{dq_1} + q'_1 q'_2\frac{dA}{dq_2}\right) = 0.$$

ou, en remplaçant $\frac{d^2 q_1}{dt^2}$ par sa valeur fournie par l'équation (8) (§ VI).

$$(3) \qquad \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\alpha}{dq_1} q'_1 + \frac{d\alpha}{du}\left(Q_1 - \frac{1}{2}\frac{dA}{dq_1} q'^2_1\right) = 0.$$

Si, dans cette équation identique, on substitue à q'_1 sa valeur $\frac{u}{A}$, et à A, l'expression trouvée plus haut,

$$A = [F_1(q_1) + q_2 F_2(q_1)]^2,$$

il vient

$$(4) \quad \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\alpha}{dq_1}\frac{u}{[F_1(q_1) + q_2 F_2(q_1)]^2} + \frac{d\alpha}{du}\left\{Q_1 - \frac{u^2[F'_1(q_1) + F'_2(q_1) q_2]}{[F_1(q_1) + q_2 F_2(q_1)]^3}\right\} = 0.$$

Dans cette équation, $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d\alpha}{dq_1}$, $\frac{d\alpha}{du}$ ne contiennent pas q_2, car α est fonction de u, q_1 et t. De plus, Q_1 est indépendant de u, et fonction seulement de q_1 et q_2 : il ne peut donc y avoir aucune réduction entre les termes Q_1 et $\frac{u^2[F'_1(q_1) + F'_2(q_1) q_2]}{[F_1(q_1) + q_2 F_2(q_1)]^3}$, en sorte que q_2 ne peut disparaître de l'équation (4), et celle-ci ne peut, par conséquent, être identique, que si les deux fractions qui contiennent q_2 se détruisent l'une par l'autre. Cela n'arrivera, évidemment, que si la fraction

$$\frac{F'_1(q_1) + F'_2(q_1) q_2}{[F_1(q_1) + q_2 F_2(q_1)]}$$

se réduit à ne plus avoir en dénominateur que le carré de la somme

$$F_1(q_1) + q_2 F_2(q_1).$$

Pour qu'il en soit ainsi, il faut que

$$\frac{F'_1(q_1)}{F_1(q_1)} = \frac{F'_2(q_1)}{F_2(q_1)},$$

d'où l'on conclut, par l'intégration,

$$F_1(q_1) = C F_2(q_1);$$

la valeur de A devient, d'après cela,

$$[F_1(q_1)]^2 (C + q_2)^2,$$

et, par suite, la distance désignée par mm' (§ VII) est égale à

$$F_1(q_1)(C + q_2)\,dq_1.$$

Cette distance est donc, pour une même valeur de q_1, proportionnelle à $C + q_2$, mais elle est aussi, comme on le voit sur la figure du § VII, proportionnelle à $oK + q_2$, et ces deux résultats ne peuvent s'accorder que si l'on a

$$oK = C.$$

La distance oK étant constante, la courbe lieu des points K a son rayon de courbure constant et est, par conséquent, un cercle. Les droites dont l'équation est

$$q_1 = \text{constante},$$

étant normales à cette courbe, passent toutes par un même point; en sorte que les variables q_1 et q_2 forment un système de coordonnées polaires. Posons donc, en adoptant la notation ordinaire,

$$q_1 = \omega,$$
$$q_2 = r;$$

le carré de la distance de deux points infiniment voisins sera, comme on sait,

$$d\rho^2 = dr^2 + r^2\,d\omega^2,$$

et, par suite, l'intégrale prend la forme

$$\alpha = \varphi\left(r^2\frac{d\omega}{dt},\ \omega,\ t\right).$$

IX.

En différentiant l'intégrale

$$(1)\qquad \alpha = \varphi\left(r^2\frac{d\omega}{dt},\ \omega,\ t\right),$$

on obtient, en posant, pour simplifier $r^2\frac{d\omega}{dt} = u$,

$$(2)\qquad \frac{d\alpha}{dt} - \frac{d\alpha}{d\omega}\frac{d\omega}{dt} + \frac{d\alpha}{du}\left(2r\frac{dr}{dt}\frac{d\omega}{dt} + r^2\frac{d^2\omega}{dt^2}\right) = 0;$$

mais l'une des équations du mouvement est, dans le cas actuel,

$$(3)\qquad 2r\frac{dr}{dt}\frac{d\omega}{dt} + r^2\frac{d^2\omega}{dt^2} = Q_1.$$

Par suite, on doit avoir identiquement

$$(4)\qquad \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\alpha}{d\omega}\frac{d\omega}{dt} + \frac{d\alpha}{du}Q_1 = 0.$$

et, en remplaçant $\frac{d\omega}{dt}$ par $\frac{u}{r^2}$,

$$(5)\qquad \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\alpha}{d\omega}\frac{u}{r^2} + \frac{d\alpha}{du}Q_1 = 0.$$

$\frac{d\alpha}{dt}$ est, nous l'avons dit (§ III), égal à 0 ou à -1; faisons successivement ces deux hypothèses.

Si $\frac{d\alpha}{dt}$ est nul, l'équation (5) se réduit à

$$(6)\qquad \frac{d\alpha}{d\omega}\frac{u}{r^2} + \frac{d\alpha}{du}Q_1 = 0.$$

r, u, ω étant trois variables indépendantes, et $\frac{d\alpha}{d\omega}$, $\frac{d\alpha}{du}$ ne contenant pas r, cette équation exige que l'on ait

$$Q_1 = \frac{\varphi(\omega)}{r^2}.$$

et, par suite,

$$(7)\qquad \frac{d\alpha}{d\omega}u - \frac{d\alpha}{du}\varphi(\omega) = 0,$$

dont l'intégrale est

$$(8)\qquad \alpha = F\left[\frac{u^2}{2} + \int\varphi(\omega)\,d\omega\right].$$

Telle est donc la forme de l'intégrale cherchée; elle équivaut à

$$(9)\qquad \text{constante} = \frac{u^2}{2} + \int\varphi(\omega)\,d\omega.$$

et elle convient à tous les problèmes dans lesquels la quantité désignée par Q_1 est égale à $\frac{\varphi(\omega)}{r^2}$.

Cette quantité Q_1 est définie par l'équation

$$Q_1 = X\frac{dx}{d\omega} + Y\frac{dy}{d\omega} = r(Y\cos\omega - X\sin\omega);$$

il suffit donc, pour que les équations d'un probleme admettent l'intégrale (9), que l'on ait, en désignant par X et Y les composantes de la force accélératrice,

$$(10)\qquad Y\cos\omega - X\sin\omega = \frac{\varphi(\omega)}{r} = \frac{\varphi\left(\frac{y}{x}\right)}{r};$$

l'intégrale (9), exprimée en coordonnées rectilignes, prend alors la forme

$$(11)\qquad \text{constante} = F\left(\frac{y}{x}\right) + (yx' - xy')^2.$$

Supposons, en second lieu, que $\frac{d\alpha}{dt}$ soit égal à -1, l'équation (5) devient

$$(12)\qquad -1 + \frac{d\alpha}{d\omega}\frac{u}{r^2} + \frac{d\alpha}{du}Q_1 = 0;$$

$\frac{d\alpha}{du}$ et $\frac{d\alpha}{d\omega}$ ne contenant pas r, Q_1 est évidemment de la forme

$$Q_1 = f(\omega) + \frac{\psi(\omega)}{r^2}.$$

Cette valeur, substituée dans l'équation (12), lui fait prendre la forme

$$-1 + \frac{d\alpha}{d\omega}\frac{u}{r^2} + \frac{d\alpha}{du}f(\omega) + \frac{d\alpha}{du}\frac{\psi(\omega)}{r^2} = 0,$$

et, comme elle doit être identique, elle entraîne les deux suivantes :

$$-1 + \frac{d\alpha}{du}f(\omega) = 0,$$

$$\frac{d\alpha}{d\omega}u + \frac{d\alpha}{du}\psi(\omega) = 0.$$

La première de ces équations prouve que α doit être de la forme

$$\alpha = \frac{u}{f(\omega)} + F_1(\omega) - t;$$

cette valeur, substituée dans la seconde, donne

$$-u^2 \frac{d}{d\omega} \frac{1}{f(\omega)} + F'_1(\omega) u - \frac{\psi(\omega)}{f(\omega)} = 0,$$

ce qui exige, puisque u et ω sont indépendants,

$$\frac{d \frac{1}{f(\omega)}}{d\omega} = 0, \qquad F'_1(\omega) = 0, \qquad \frac{\psi(\omega)}{f(\omega)} = 0.$$

$\frac{1}{f(\omega)}$ ne pouvant évidemment pas être nul, car alors u disparaîtrait de l'intégrale; la dernière de ces équations se réduit à

$$\psi(\omega) = 0.$$

Les deux autres prouvent que les fonctions f et F_1 sont des constantes, en sorte que

$$\alpha = Cu - t = Cr^2 \frac{d\omega}{dt} - t,$$

C étant une constante.

La valeur de Q_1 devient, en y remplaçant $\frac{1}{f(\omega)}$ par C, et $\psi(\omega)$ par 0,

$$Q_1 = \frac{1}{C}.$$

c'est-à-dire que l'on doit avoir

$$r(Y \cos\omega - X \sin\omega) = \text{constante};$$

et toutes les fois que les forces rempliront cette condition, les équations différentielles du problème auront pour intégrale

$$\alpha = Cr^2 \frac{d\omega}{dt} - t.$$

Nous avons donc trouvé les seules intégrales qui conviennent à plusieurs problèmes différents relatifs au mouvement d'un point libre dans un plan.

X.

La méthode générale à l'aide de laquelle nous trouvons les forces

accélératrices, lorsqu'une seule intégrale nous est donnée, s'applique sans modification, au cas d'un système dont les points ne sont pas libres. Si nous nommons $q_1, q_2, \ldots, q_p$ les p variables indépendantes, en fonction desquelles les liaisons permettent d'exprimer toutes les coordonnées, les équations du mouvement sont de la forme

$$(1)\quad \frac{d}{dt}\frac{dT}{dq'_1} - \frac{dT}{dq_1} = Q_1,\quad \frac{d}{dt}\frac{dT}{dq'_2} - \frac{dT}{dq_2} = Q_2, \ldots,\quad \frac{d}{dt}\frac{dT}{dq'_p} - \frac{dT}{dq_p} = Q_p.$$

T désignant la demi-force vive qui est une fonction homogène du second degré de $q'_1, q'_2, \ldots, q'_p$, et $Q_1, Q_2, \ldots, Q_p$ étant des fonctions de $q_1, q_2, \ldots, q_p$, qui dépendent des forces accélératrices. Soit

$$(2)\qquad \alpha = \varphi(t, q_1, q_2, \ldots, q_p, \quad q'_1, q'_2, \ldots, q'_p)$$

une intégrale du système (1); on obtiendra, en la différentiant,

$$(3)\qquad 0 = \frac{d\alpha}{dt} + \sum \frac{d\alpha}{dq_i} q'_i + \sum \frac{d\alpha}{dq'_i}\frac{d^2 q_i}{dt^2},$$

le signe $\sum$ s'étendant aux valeurs entières de i, moindres que p. En remettant dans cette équation (3), pour $\frac{d^2 q_1}{dt^2}, \frac{d^2 q_2}{dt^2}, \ldots$, leurs valeurs déduites des équations (1), on obtiendra une relation dans laquelle Q_1, $Q_2, \ldots, Q_p$ entreront au premier degré. Cette relation ne contenant plus que les quantités $t, q_1, q_2, \ldots, q_p, q'_1, q'_2, \ldots, q'_p$, auxquelles on peut attribuer des valeurs arbitraires et indépendantes les unes des autres, devra être une identité : on pourra, par conséquent, la différentier par rapport à $q'_1, q'_2, \ldots, q'_p$, et l'on formera ainsi p équations nouvelles qui, contenant aussi $Q_1, Q_2, \ldots, Q_p$ au premier degré, permettront, en général, de déterminer la valeur de ces inconnues. Ces cas, dans lesquels cette méthode est en défaut, sont évidemment les seuls dans lesquels une même intégrale puisse convenir à plusieurs problèmes différents. Il est intéressant de les étudier. Nous nous bornerons ici au cas d'un point unique, que d'abord nous supposerons assujetti à rester sur une surface donnée.

XI.

Soient q_1 et q_2 les paramètres de deux systèmes de courbes orthogo-

nales tracées sur la surface que le point ne doit pas quitter; le carré de la distance de deux points infiniment voisins aura une expression de la forme

$$ds^2 = A\,dq_1^2 + B\,dq_2^2;$$

l'expression de la demi-force vive est, par suite,

$$T = \frac{1}{2}\,(A q_1'^2 + B q_2'^2),$$

d'où l'on conclut que les deux équations du mouvement sont

$$A\frac{d^2 q_1}{dt^2} + \frac{1}{2}\frac{dA}{dq_1}q_1'^2 + \frac{dA}{dq_2}q_1' q_2' - \frac{1}{2}\frac{dB}{dq_1}q_2'^2 = Q_1,$$

$$B\frac{d^2 q_2}{dt^2} + \frac{1}{2}\frac{dB}{dq_2}q_1'^2 + \frac{dB}{dq_1}q_1' q_1' - \frac{1}{2}\frac{dA}{dq_2}q_1'^2 = Q_2.$$

En procédant absolument comme on l'a fait au § IV, on verra qu'une intégrale

$$\alpha = \varphi(t,\ q_2,\ q^2,\ q_1',\ q_2')$$

suffit à la détermination de Q_1 et Q_2, à moins qu'elle ne soit de la forme

$$\alpha = \varphi[t,\ q_1,\ q_2,\ q_1' + \varphi(q_1,\ q_2)\,q_2'].$$

Il nous reste donc à chercher dans quels cas une intégrale peut présenter cette forme.

XII.

La somme $q_1' + \psi(q_1, q_2)\,q_2'$, multipliée par un facteur convenable, peut toujours devenir une dérivée exacte m'. Prenons pour variables indépendantes la valeur de m, et le paramètre n des trajectoires orthogonales aux courbes représentées par $m =$ constante; l'intégrale considérée prendra, comme on le voit bien facilement, la forme

$$(1)\qquad \alpha = \varphi(t,\ m,\ n,\ m').$$

Si nous supposons que l'on ait, dans ce nouveau système de coordonnées,

$$(2)\qquad ds^2 = a\,dm^2 + b\,dn^2,$$

les équations du mouvement ne différeront de celles du paragraphe précédent que par le changement de A, B, q_1, q_2, en a, b, m, n. On aura, en différentiant l'intégrale (1), et remplaçant $\frac{d^2 m}{dt^2}$ par sa valeur,

$$(3)\quad 0 = \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\alpha}{dm} m' + \frac{d\alpha}{dn} n' + \frac{1}{a}\frac{d\alpha}{dm'}\left(\begin{array}{l} \frac{1}{2}\frac{da}{dm} m'^2 - \frac{1}{2}\frac{da}{dn} m' n' \\ \qquad - \frac{1}{2}\frac{db}{dm} n'^2 - Q_1 \end{array}\right) = 0.$$

Cette équation devant être identique, le coefficient de n'^2 et celui de n' peuvent être égalés séparément à zéro. On a donc

$$(4)\qquad \frac{db}{dm} = 0,$$

$$(5)\qquad \frac{d\alpha}{dn} - \frac{1}{a}\frac{d\alpha}{dm'} m' \frac{da}{dn} = 0.$$

L'équation (5) peut s'intégrer; on en conclut facilement

$$(6)\qquad \alpha = \varphi(am', m, t).$$

Quant à l'équation (4), elle prouve que le produit $b\,dn^2$, c'est-à-dire le carré de la distance des courbes qui correspondent aux valeurs n et $n + dn$ du paramètre n, est indépendant de m. Ces deux courbes sont donc partout également distantes : or on prouve facilement que si une série de courbes tracées sur une surface sont telles, que la distance de deux courbes infiniment voisines soit constante, leurs trajectoires orthogonales sont des lignes géodésiques. Par conséquent, dans le cas actuel, les lignes représentées par $m =$ constante sont des lignes géodésiques. En supprimant dans l'équation (3) les termes en n' et en n'^2, et en remarquant en outre que l'on a, en posant $am' = u$, et considérant α comme fonction de m, n et U,

$$(7)\qquad \frac{d\alpha}{dm} = \frac{d\alpha}{dm} + \frac{d\alpha}{du} m' \frac{da}{dm}.$$

$$(8)\qquad \frac{d\alpha}{dm'} = \frac{d\alpha}{du} \cdot a;$$

cette équation (3) devient

$$(9)\qquad \frac{d\alpha}{dt} + \left(\frac{d\alpha}{dm} + \frac{d\alpha}{du}\frac{da}{dm}\frac{u}{a}\right)\frac{u}{a} + \frac{d\alpha}{du}\left(\frac{1}{2}\frac{da}{dm}\frac{u^2}{a^2} - Q_1\right) = 0.$$

ou, en réduisant et divisant par $\frac{d\alpha}{du}$,

$$(10)\qquad \frac{\frac{d\alpha}{dt}}{\frac{d\alpha}{du}} + \frac{\frac{d\alpha}{dm}}{\frac{d\alpha}{du}}\frac{u}{a} + \frac{1}{2}\frac{da}{dm}\frac{u^2}{a^2} + Q_1 = 0.$$

Si nous supposons d'abord $\frac{d\alpha}{dt} = 0$, cette équation se réduit à

$$(11)\qquad \frac{\frac{d\alpha}{dm}}{\frac{d\alpha}{du}}\frac{u}{a} + \frac{1}{2}\frac{da}{dm}\frac{u^2}{a^2} + Q_1 = 0;$$

$\frac{d\alpha}{dm}$, a et Q_1 étant indépendants de u, on conclut de cette équation que $\frac{\frac{d\alpha}{dm}}{\frac{d\alpha}{du}}$ doit être de la forme $u\psi_1(m) + \frac{\psi_2(m)}{u}$,

$$(12)\qquad \frac{\frac{d\alpha}{dm}}{\frac{d\alpha}{du}} = u\psi_1(m) + \frac{\psi_2(m)}{u}.$$

Pour intégrer cette équation, il faut d'abord considérer le systeme d'équations simultanées

$$(13)\qquad dm = \frac{-du}{u\psi_1(m) + \frac{\psi_2(m)}{u}} = \frac{d\alpha}{0}.$$

L'une des intégrales est

$$\alpha = \text{constante};$$

pour trouver l'autre, mettons l'équation (13) sous la forme

$$(14)\qquad \frac{1}{2}\frac{d(u^2)}{dm} + u^2\psi_1(m) + \psi_2(m) = 0.$$

Comme elle est linéaire par rapport à u^2, son intégrale est de la forme

$$(15)\qquad u^2 = CF_1(m) + F_2(m), \quad C = \frac{u^2 - F_2(m)}{F_1(m)}.$$

par suite, l'intégrale générale de l'équation (12) est

$$(16)\qquad \alpha = \varphi\left[\frac{u^2 - F_2(m)}{F_1(m)}\right].$$

Or cette intégrale équivaut évidemment à

$$(17)\qquad \alpha = \frac{u^2 - F_2(m)}{F_1(m)} = u^2 f_1(m) + f_2(m) = a^2 m'^2 f_1(m) + f_2(m);$$

car il revient au même d'écrire qu'une expression est constante ou qu'une fonction de cette expression est constante.

En substituant, dans l'équation (11), la valeur de α fournie par l'équation (17), on trouve facilement

$$(18)\qquad \frac{f_1'(m)}{f_1(m)} + \frac{da}{\frac{dm}{a}} = 0,$$

$$(19)\qquad Q_1 + \frac{f_2(m)}{2f(m)} = 0;$$

l'équation (18) s'intègre et prouve que a est de la forme

$$(20)\qquad a = \frac{F(n)}{f_1(m)}.$$

m désigne, on s'en souvient, le paramètre d'une série de lignes géodésiques, et n celui de leurs trajectoires orthogonales. Or M. Liouville a prouvé, dans ses Notes à la *Géométrie analytique* de Monge, que le coefficient a ne peut prendre cette forme que dans le cas où la surface que l'on considère est applicable sur une surface de révolution (page 596). Nous pouvons donc énoncer ce théorème remarquable :

Les surfaces applicables sur les surfaces de révolution sont les seules sur lesquelles deux points mobiles sollicités par des forces différentes puissent avoir une intégrale commune indépendante du temps, pour les équations différentielles de leur mouvement.

La forme la plus générale de cette intégrale, et les conditions que doivent remplir les forces, sont exprimées par les équations (17) et (19).

Il nous reste enfin à considérer le cas où l'intégrale cherchée contenant le temps, on doit supposer $\frac{d\alpha}{dt} = -1$. L'équation (10) devient alors

$$(21)\qquad \frac{-1}{\frac{d\alpha}{du}} + \frac{\frac{d\alpha}{dm}}{\frac{d\alpha}{du}}\frac{u}{a} + \frac{1}{2}\frac{da}{dm}\frac{u^2}{a^2} + Q_1 = 0.$$

$\frac{da}{dm}$, a et Q_1 ne contenant pas u, cette équation prouve que la somme

$$(22)\qquad \frac{-1}{\frac{d\alpha}{du}} + \frac{\frac{d\alpha}{dm}}{\frac{d\alpha}{du}}\frac{u}{a}$$

est de la forme $H + Ku^2$, H et K étant indépendants de u. Mais, en considérant a et m comme deux variables indépendantes, que l'on peut évidemment substituer à m et u, $\frac{d\alpha}{du}$ et $\frac{d\alpha}{dm}$ sont indépendants de a, et il n'y a, par conséquent, aucune réduction possible entre les deux termes de l'expression (22). Chacun d'eux doit donc être, séparément, de la forme $H + Ku^2$; on a donc

$$(23)\qquad \frac{1}{\frac{d\alpha}{du}} = \varphi_1(m) + u^2\varphi_2(m),$$

$$(24)\qquad \frac{\frac{d\alpha}{dm}}{\frac{d\alpha}{du}}\frac{u}{a} = \psi_1(m) + u^2\psi_2(m).$$

L'équation (24) ne diffère pas de l'équation (12), à laquelle nous avons été conduit plus haut; on en conclura donc, absolument comme on l'a déjà fait, que α est de la forme

$$(25)\qquad \alpha = \psi[u^2 f_1(m) + f_2(m)] - t;$$

en substituant cette valeur de α dans l'équation (23), il vient

$$(26)\qquad \frac{1}{F'[u^2 f_1(m) + f_2(m)]\,2u f_1(m)} = u^2\varphi_2(m) + \varphi_1(m)$$

Le premier membre de cette équation devient infini pour $u = 0$, quelle que soit la valeur correspondante de m; et, comme il n'en est pas de même du second, cette équation est impossible, à moins que l'on n'ait

$$F'[f_2(m)] = \infty;$$

ce qui ne peut avoir lieu que si $f_2(m)$ se réduit à une constante. Dans ce cas, $\psi[u^2 f_1(m) + f_2(m)]$ équivaut à une fonction de $u^2 f_1(m)$, et l'intégrale (25) peut s'écrire :

$$\alpha = \psi[u^2 f_1(m)] - t.$$

Mais une fonction du produit $u^2 f_1(m)$ est aussi une fonction de $u\sqrt{f_1(m)}$ ou de $u\varpi(m)$ [en posant $\varpi(m) = \sqrt{f_1(m)}$]; nous pouvons donc poser

$$\alpha = F_1[u\varpi(m)] - t.$$

L'équation (23) devient alors

$$\frac{1}{\varpi(m)\, F'_1[u\varpi(m)]} = \varphi_1(m) + u^2 \varphi_2(m);$$

d'où l'on conclut, en posant $u\varpi(m) = z$,

$$\frac{1}{F'_1(z)} = \varphi_1(m)\,\varpi(m) + \frac{z^2}{[\varpi(m)]^2}\,\varphi_2(m).$$

équation impossible si l'on n'a pas

$$\varphi_1(m)\,\varpi(m) = 0,$$

$$\frac{\varphi_1(m)}{[\varpi_2(m)]^2} = \text{constante}.$$

$\varpi(m)$ ne pouvant pas être nul, $\varphi_1(m)$ doit être égal à zéro, et, par suite,

$$\frac{1}{F'_1(z)} = C z^2,$$

$$F'_1(z) = \frac{1}{C z^2},$$

$$F_1(z) = -\frac{1}{C z} + C_1.$$

Si C était égal à zéro, on trouverait pour $F_1(z)$ une valeur de la

forme $C_1 z$; les seules formes possibles de l'intégrale α sont donc

$$(27)\qquad \alpha = -\frac{1}{u\varpi_1(m)} + t = -\frac{1}{a\varpi_1(m)\frac{dm}{dt}} - t,$$

$$(28)\qquad \alpha = u\varpi_1(m) - t = a\varpi_1(m)\frac{dm}{dt} - t.$$

Si nous substituons, dans l'équation (10), la valeur de α fournie par l'équation (28), il viendra

$$(29)\qquad \frac{-1}{\varpi_1(m)} + \frac{u\varpi'_1(m)}{\varpi_1(m)}\frac{u}{a} + \frac{1}{2}\frac{du}{dm}\frac{u^2}{a^2} + Q_1 = 0,$$

équation qui se décompose en deux autres :

$$(30)\qquad \frac{-1}{\varpi_1(m)} + Q_1 = 0,$$

$$(31)\qquad \frac{\varpi'_1(m)}{\varpi_1(m)}\frac{1}{a} + \frac{1}{2}\frac{da}{dm}\frac{1}{a^2} = 0.$$

Or l'équation (31) peut s'intégrer; on en déduit

$$a^2 = \varpi(m)\,F(n),$$

et, par suite, d'après la remarque de M. Liouville, dont nous avons déjà fait usage plus haut, *la surface est applicable sur une surface de révolution.*

Considérons enfin l'équation (27). En substituant cette valeur de α dans l'équation (10), il vient

$$\frac{-u^2}{\varpi_1(m)} + \frac{u^2\varpi'_1(m)}{\varpi_1(m)}\frac{u}{a} + \frac{1}{2}\frac{da}{dm}\frac{u^2}{a^2} - Q_1 = 0.$$

u, a et m pouvant être considérées comme trois variables indépendantes, on déduit de cette équation

$$Q_1 = 0$$

et

$$(32)\qquad \frac{-1}{\varpi_1(m)} + \frac{\varpi'_1(m)}{\varpi_1(m)^2}\frac{1}{a} + \frac{1}{2}\frac{da}{dm}\frac{1}{a^2} = 0.$$

Cette équation (32) étant linéaire en $\frac{1}{a}$, on en déduira

$$\frac{1}{a} = \psi_1(m) + F(n)\psi_2(m)$$

ou

$$a = \frac{1}{\psi_1(m) + F(n)\psi_2(m)}.$$

Telle est donc la forme que doit avoir le coefficient de dm^2 dans l'expression du carré de la distance de deux points, pour qu'il puisse exister une intégrale commune à deux problèmes différents. L'équation

$$Q_1 = 0$$

prouve d'ailleurs que, dans ce cas, la composante de la force accélératrice, perpendiculaire à la ligne géodésique

$$m = \text{constante},$$

doit être égale à zéro, ou, en d'autres termes, la composante de la force accélératrice dans le plan tangent de la surface doit être tangente à la ligne géodésique dont l'équation est

$$m = \text{constante}.$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Pour qu'il existe une intégrale de la forme (27), *commune à deux problèmes relatifs au mouvement d'un point sur une surface, il faut et il suffit que les forces accélératrices soient tangentes à une série de lignes géodésiques tracées sur la surface, et que, en prenant pour coordonnées le paramètre m de ces lignes géodésiques et le paramètre n de leurs trajectoires orthogonales, le carré de la distance de deux points infiniment voisins soit de la forme*

$$ds^2 = adm^2 + bdn^2.$$

a étant lui-même de la forme

$$a = \frac{1}{\psi_1(m) + F(n)\psi_2(m)}.$$

Quelles sont les surfaces sur lesquelles cette condition peut être

remplie? C'est là un problème de géométrie qui n'a pas un rapport direct avec le sujet de ce Mémoire.

XIII.

Considérons maintenant le cas général où le point peut se mouvoir librement dans l'espace.

Les équations différentielles du mouvement sont alors

$$(1)\qquad \frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = Z.$$

Soit

$$(2)\qquad \alpha = \varphi(x, y, z, x', y', z', t)$$

une intégrale du système (1); on doit avoir, identiquement,

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\alpha}{dx}x' + \frac{d\alpha}{dy}y' + \frac{d\alpha}{dz}z' \\ &\quad + \frac{d\alpha}{dx'}X + \frac{d\alpha}{dy'}Y + \frac{d\alpha}{dz'}Z = 0. \end{aligned}\right.$$

Pour que l'intégrale (2) convienne à plusieurs problèmes différents, il faut que les équations du premier degré en X, Y, Z, obtenues en différentiant une ou plusieurs fois l'équation (3), par rapport à x', y', z', rentrent les unes dans les autres et se réduisent, au plus, à deux distinctes. En différentiant une fois l'équation (3), par rapport à chacune des variables x', y', z', et se rappelant que $\frac{d\alpha}{dt}$ est égal à 0 ou à -1, il vient

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d^2\alpha}{dx\,dx'}x' + \frac{d^2\alpha}{dy\,dx'}y' + \frac{d^2\alpha}{dz\,dx'}z' \\ &\quad + \frac{d^2\alpha}{dx'^2}X + \frac{d^2\alpha}{dx'\,dy'}Y + \frac{d^2\alpha}{dx'\,dz'}Z = 0, \end{aligned}\right.$$

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\alpha}{dy} + \frac{d^2\alpha}{dx\,dy'}x' + \frac{d^2\alpha}{dy\,dy'}y' + \frac{d^2\alpha}{dz\,dy'}z' \\ &\quad + \frac{d^2\alpha}{dx'\,dy'}X + \frac{d^2\alpha}{dy'^2}Y + \frac{d^2\alpha}{dy'\,dz'}Z = 0. \end{aligned}\right.$$

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\alpha}{dz} + \frac{d^2\alpha}{dx\,dz'}x' + \frac{d^2\alpha}{dy\,dz'}y' + \frac{d^2\alpha}{dz\,dz'}z' \\ &\quad + \frac{d^2\alpha}{dx'\,dz'}X + \frac{d^2\alpha}{dz'\,dy'}Y + \frac{d^2\alpha}{dz'^2}Z = 0. \end{aligned}\right.$$

Les équations (3), (4), (5), (6) doivent rentrer les unes dans les autres, lorsque l'intégrale α convient à plusieurs questions. Nous examinerons successivement le cas où elles se réduisent à une seule ou à deux distinctes.

XIV.

Supposons d'abord que les équations (3), (4), (5), (6) se réduisent à une seule. Il faut alors que les coefficients des inconnues soient proportionnels. On aura alors, puisque les équations (3) et (4) rentrent l'une dans l'autre,

$$(7)\qquad \frac{\dfrac{d^2\alpha}{dx'^2}}{\dfrac{d\alpha}{dx'}} = \frac{\dfrac{d^2\alpha}{dx'\,dy'}}{\dfrac{d\alpha}{dy'}} = \frac{\dfrac{d^2\alpha}{dx'\,dz'}}{\dfrac{d\alpha}{dz'}},$$

ce que l'on peut écrire

$$(8)\qquad \frac{d.\log\dfrac{d\alpha}{dx'}}{dx'} = \frac{d.\log\dfrac{d\alpha}{dy'}}{dx'} = \frac{d.\log\dfrac{d\alpha}{dz}}{dx'}:$$

d'où l'on conclut que $\log\dfrac{d\alpha}{dx'}$, $\log\dfrac{d\alpha}{dy'}$, $\log\dfrac{d\alpha}{dz'}$ ont des différences indépendantes de x'. On verra de même que ces différences sont indépendantes de y' et de z'; par suite, les rapports

$$\frac{\dfrac{d\alpha}{dy'}}{\dfrac{d\alpha}{dx'}},\quad \frac{\dfrac{d\alpha}{dz'}}{\dfrac{d\alpha}{dx'}},$$

ne dépendent que de x, y, z. Nous pouvons donc poser

$$(9)\qquad \frac{\dfrac{d\alpha}{dx'}}{\mathrm{M}} = \frac{\dfrac{d\alpha}{dy'}}{\mathrm{N}} = \frac{\dfrac{d\alpha}{dz'}}{\mathrm{P}},$$

M, N, P ne contenant pas x', y', z'. On en conclut, par une intégration facile, que α est de la forme

$$(10)\qquad \alpha = \mathrm{F}(\mathrm{M}x' + \mathrm{N}y' + \mathrm{P}z',\ x,\ y,\ z,\ t).$$

XV.

Supposons, actuellement, que les équations (3), (4), (5), (6), ainsi que celles que l'on en peut déduire par la différentiation, se réduisent à deux distinctes. Nous subdiviserons ce cas en deux autres :

1°. Les équations (4), (5), (6) se réduisent à une seule, qui est distincte de l'équation (3).

On a alors, en écrivant que les coefficients des inconnues sont proportionnels dans les équations (4) et (5),

$$(11)\qquad \frac{\dfrac{d\alpha}{dx'}}{\dfrac{d^2\alpha}{dx'\,dy'}} = \frac{\dfrac{d^2\alpha}{dx'\,dy'}}{\dfrac{d^2\alpha}{dy'^2}} = \frac{\dfrac{d\alpha}{dx'}}{\dfrac{d\alpha}{dy'}}\,\frac{dz'}{dz'},$$

c'est-à-dire

$$(12)\qquad \frac{\dfrac{d}{dx'}\dfrac{d\alpha}{dx'}}{\dfrac{d}{dx'}\dfrac{d\alpha}{dy'}} = \frac{\dfrac{d}{dy'}\dfrac{d\alpha}{dx'}}{\dfrac{d}{dy'}\dfrac{d\alpha}{dy'}} = \frac{\dfrac{d}{dz'}\dfrac{d\alpha}{dx'}}{\dfrac{d}{dz'}\dfrac{d\alpha}{dz'}}.$$

Les dérivées partielles de $\frac{d\alpha}{dx'}$, $\frac{d\alpha}{dy'}$ étant proportionnelles, les différentielles de ces deux fonctions s'annulent en même temps, et l'on peut, par conséquent, les considérer comme fonctions l'une de l'autre, ou, ce qui revient au même, comme fonctions d'une même quantité u. On verra de même que les équations (5) et (6) rentrant l'une dans l'autre, $\frac{d\alpha}{dz'}$ doit être aussi fonction de u. Écrivons donc

$$\frac{d\alpha}{dx'} = \varphi_1(u, x, y, z, t),$$

$$\frac{d\alpha}{dy'} = \varphi_2(u, x, y, z, t),$$

$$\frac{d\alpha}{dz'} = \varphi_3(u, x, y, z, t);$$

les coefficients de X, Y, Z dans l'équation (4) peuvent s'écrire, d'après cela,

$$\frac{d\varphi_1}{du}\frac{du}{dx'}, \qquad \frac{d\varphi_2}{du}\frac{du}{dy'}, \qquad \frac{d\varphi_3}{du}\frac{du}{dz'} = \frac{d\alpha}{dx'\,dz'} = \frac{d}{du}\frac{du}{dx'}$$

Si donc nous différentions cette équations (4) par rapport à x', après l'avoir divisée par $\frac{du}{dx'}$, nous obtiendrons une nouvelle équation entre X, Y, Z, dans laquelle les coefficients de ces inconnues seront

$$\frac{d^2\varphi_1}{du^2}\frac{du}{dx'}, \qquad \frac{d^2\varphi_2}{du^2}\frac{du}{dx'}, \qquad \frac{d^2\varphi_3}{du^2}\frac{du}{dx'}.$$

et, comme X, Y, Z doivent rester indéterminés, quoique satisfaisant aux équations (3) et (4) et à cette équation nouvelle, il faut que le déterminant du système

$$\begin{matrix} \varphi_1, & \varphi_2, & \varphi_3, \\ \frac{d\varphi_1}{du}, & \frac{d\varphi_2}{du}, & \frac{d\varphi_3}{du}, \\ \frac{d^2\varphi_1}{du^2}, & \frac{d^2\varphi_2}{du^2}, & \frac{d^2\varphi_3}{du^2}, \end{matrix}$$

soit égal à zéro, et que, par suite, φ_1, φ_2, φ_3 satisfassent à une même équation de la forme

$$A\frac{d^2\varphi_1}{du^2} + B\frac{d\varphi_1}{du} + C\varphi_1 = 0.$$

Or, cette équation étant linéaire, on sait qu'il existe, entre trois quelconques de ses solutions, une relation de la forme

$$C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + C_3\varphi_3 = 0,$$

C_1, C_2, C_3 étant indépendants de u. On doit donc avoir, en substituant à φ_1, φ_2, φ_3 leurs valeurs,

$$C_1\frac{dz}{dx'} + C_2\frac{dz}{dy'} + C_3\frac{dz}{dz'} = 0,$$

et l'on en conclut, par une intégrale facile,

$$z = F\left(\frac{x'}{C_1} - \frac{y'}{C_2}, \quad \frac{y'}{C_2} - \frac{z'}{C_3}, \quad x, y, z, t\right).$$

2°. Supposons maintenant que les équations (3), (4), (5), (6) se réduisent à deux distinctes, parce que les équations (4), (5), (6) se réduisent à deux qui entraînent l'équation (3), ainsi que toutes celles que l'on peut en déduire, en la différentiant par rapport à x', y', z'

Pour que les équations (4), (5), (6) se réduisent à deux, il faut qu'il existe une même relation linéaire entre les coefficients des inconnues dans ces équations, c'est-à-dire que l'on doit avoir

$$(16)\qquad M\frac{d^2\alpha}{dx'^2}+N\frac{d^2\alpha}{dx'\,dy'}+P\frac{d^2\alpha}{dz'\,dx'}=0,$$

$$(17)\qquad M\frac{d^2\alpha}{dx'\,dy'}+N\frac{d^2\alpha}{dy'^2}+P\frac{d^2\alpha}{dy'\,dz'}=0,$$

$$(18)\qquad M\frac{d^2\alpha}{dz'\,dx'}+N\frac{d^2\alpha}{dz'\,dy'}+P\frac{d^2\alpha}{dz'^2}=0,$$

M, N, P étant des fonctions quelconques de x, y, z, x', y', z'. Il faut, d'ailleurs, pour que l'équation (3) rentre dans les trois autres, que l'on ait aussi

$$(19)\qquad M\frac{d\alpha}{dx'}+N\frac{d\alpha}{dy'}+P\frac{d\alpha}{dz'}=0.$$

En différentiant l'équation (19) par rapport à x', y', z', et en ayant égard aux équations (16), (17), (18), il vient

$$(20)\qquad \frac{dM}{dx'}\frac{d\alpha}{dx'}+\frac{dN}{dx'}\frac{d\alpha}{dy'}+\frac{dP}{dx'}\frac{d\alpha}{dz'}=0,$$

$$(21)\qquad \frac{dM}{dy'}\frac{d\alpha}{dx'}+\frac{dN}{dy'}\frac{d\alpha}{dy'}+\frac{dP}{dy'}\frac{d\alpha}{dz'}=0,$$

$$(22)\qquad \frac{dM}{dz'}\frac{d\alpha}{dx'}+\frac{dN}{dz'}\frac{d\alpha}{dy'}+\frac{dP}{dz'}\frac{d\alpha}{dz'}=0.$$

Si maintenant on différentie l'équation (4) par rapport à x', on formera une nouvelle équation du premier degré en X, Y, Z, et, pour que cette nouvelle équation, combinée avec les précédentes, laisse ces inconnues indéterminées, il faut qu'il existe, entre les coefficients, la même relation qu'entre ceux des équations précédentes, et que l'on ait

$$(23)\qquad M\frac{d^3\alpha}{dx'^3}+N\frac{d^3\alpha}{dx'^2\,dy'}+P\frac{d^3\alpha}{dx'^2\,dz'}=0.$$

Si l'on compare cette équation (23) avec celle que l'on déduit de l'équation (16), en la différentiant par rapport à x', il vient

$$(24)\qquad \frac{dM}{dx'}\frac{d^2\alpha}{dx'^2}+\frac{dN}{dx'}\frac{d^2\alpha}{dx'\,dy'}+\frac{dP}{dx'}\frac{d^2\alpha}{dx'\,dz'}=0;$$

on trouverait, de la même manière,

$$(25)\qquad \frac{dM}{dx'}\frac{d^2\alpha}{dx'\,dy'} + \frac{dN}{dx'}\frac{d^2\alpha}{dy'^2} + \frac{dP}{dx'}\frac{d^2\alpha}{dy'\,dz'} = 0.$$

$$(26)\qquad \frac{dM}{dx}\frac{d^2\alpha}{dx'\,dz'} + \frac{dN}{dx'}\frac{d^2\alpha}{dy'\,dz'} + \frac{dP}{dx'}\frac{d^2\alpha}{dz'^2} = 0.$$

Or les équations (24), (25), (26), rapprochées des équations (16), (17), (18), prouvent que l'on a

$$\frac{\frac{dM}{dx'}}{M} = \frac{\frac{dN}{dx'}}{N} = \frac{\frac{dP}{dx'}}{P}.$$

On prouverait de même que l'on a

$$(28)\qquad \frac{\frac{dM}{dy'}}{M} = \frac{\frac{dN}{dy'}}{N} = \frac{\frac{dP}{dy'}}{P},$$

$$(29)\qquad \frac{\frac{dM}{dz'}}{M} = \frac{\frac{dN}{dz'}}{N} = \frac{\frac{dP}{dz'}}{P},$$

et l'on en conclut que $\log M$, $\log N$, $\log P$ ont les mêmes dérivées par rapport à x', y', z', et que, par suite, les rapports $\frac{M}{P}$, $\frac{N}{P}$ sont indépendants de ces variables; et comme, dans l'équation (19), M, N, P peuvent être remplacées par des quantités proportionnelles, on peut écrire

$$(30)\qquad A\frac{d\alpha}{dx'} + B\frac{d\alpha}{dy'} + C\frac{d\alpha}{dz'} = 0,$$

A, B, C étant indépendants de x', y', z'. Or cette équation (30) peut s'intégrer, et donne

$$\alpha = F\left(\frac{x'}{A} - \frac{y'}{B},\ \frac{x'}{A} - \frac{z'}{C},\ x, y, z, t\right).$$

XVI.

D'après les résultats obtenus dans le paragraphe précédent, nous voyons que l'intégrale cherchée est nécessairement de la forme

$$(1)\qquad \alpha = F(Mx' + Ny' + Pz',\ x, y, z, t).$$

ou

$$(2)\qquad \alpha = F\left(\frac{x'}{M} - \frac{y'}{N},\ \frac{x'}{M} - \frac{z'}{P},\ x, y, z, t\right),$$

M, N, P désignant des fonctions de x, y, z seulement.

Nous nous occuperons d'abord de la seconde forme, qui comprend évidemment la première.

En différentiant l'équation (2), et posant, pour plus de simplicité,

$$\frac{x'}{M} - \frac{y'}{N} = u,\quad \frac{x'}{M} - \frac{z'}{P} = v,$$

il vient, après substitution de X, Y, Z, à $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$, $\frac{dz'}{dt}$,

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\alpha}{dx}x' + \frac{d\alpha}{dy}y' + \frac{d\alpha}{dz}z' \\ &+ \frac{d\alpha}{du}\left(x'^2\frac{d\frac{1}{M}}{dx} + x'y'\frac{d\frac{1}{M}}{dy} + x'z'\frac{d\frac{1}{M}}{dz} - y'x'\frac{d\frac{1}{N}}{dx} - y'^2\frac{d\frac{1}{N}}{dy} - y'z'\frac{d\frac{1}{N}}{dz}\right) \\ &+ \frac{d\alpha}{dv}\left(x'^2\frac{d\frac{1}{M}}{dx} + x'y'\frac{d\frac{1}{M}}{dy} + x'z'\frac{d\frac{1}{M}}{dz} - x'z'\frac{d\frac{1}{P}}{dz} - z'y'\frac{d\frac{1}{P}}{dy} - z'^2\frac{d\frac{1}{P}}{dz}\right) \\ &+ \frac{d\alpha}{du}\left(\frac{X}{M} - \frac{Y}{N}\right) + \frac{d\alpha}{dv}\left(\frac{X}{M} - \frac{Z}{P}\right). \end{aligned}\right.$$

Si, dans cette équation identique, on remplace y' par $N\left(\frac{x'}{M} - u\right)$ et z' par $P\left(\frac{x'}{M} - v\right)$, le coefficient de x'^2 devra être nul dans le résultat, nous aurons donc

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\alpha}{du}\left(\frac{d\frac{1}{M}}{dx} + \frac{N}{M}\frac{d\frac{1}{M}}{dy} + \frac{P}{M}\frac{d\frac{1}{M}}{dz} - \frac{N}{M}\frac{d\frac{1}{N}}{dx} - \frac{N^2}{M^2}\frac{d\frac{1}{N}}{dy} - \frac{NP}{M}\frac{d\frac{1}{N}}{dz}\right) \\ &- \frac{d\alpha}{dv}\left(\frac{d\frac{1}{M}}{dx} + \frac{N}{M}\frac{d\frac{1}{M}}{dy} + \frac{P}{M}\frac{d\frac{1}{M}}{dz} - \frac{P}{M}\frac{d\frac{1}{P}}{dx} - \frac{P}{M^2}\frac{d\frac{1}{P}}{dz} + \frac{NP}{M^2}\frac{d\frac{1}{P}}{dy}\right). \end{aligned}\right.$$

Il peut se présenter deux cas, que nous examinerons successivement.

1°. Les coefficients de $\frac{d\alpha}{du}$, $\frac{d\alpha}{dv}$, dans l'équation (4), ne sont pas l'un et l'autre égaux à zéro.

Dans ce cas, cette équation (4) prouve que le rapport $\frac{\frac{d\alpha}{du}}{\frac{d\alpha}{dv}}$ est indépendant de u et de v. En désignant par k ce rapport, on voit sans peine que α doit être, pour cela, une fonction de la somme $v - ku$. Mais $v + ku$ est une fonction linéaire de x', y', z' que nous pouvons désigner par $ax' + by' + cz'$; dans ce cas, α est donc de la forme

$$\alpha = \mathrm{F}(ax' + by' + cz',\ x,\ y,\ z,\ t),$$

c'est-à-dire que l'intégrale cherchée rentre dans la forme (1).

2°. Les coefficients de $\frac{d\alpha}{du}$, $\frac{d\alpha}{dv}$ sont nuls.

En égalant ces coefficients à zéro et développant les calculs, on trouve

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} 0 = \mathrm{M}\left(\mathrm{M}\frac{d\mathrm{N}}{dx} - \mathrm{N}\frac{d\mathrm{M}}{dx}\right) &+ \mathrm{P}\left(\mathrm{M}\frac{d\mathrm{N}}{dz} - \mathrm{N}\frac{d\mathrm{M}}{dz}\right) \\ &+ \mathrm{N}\left(\mathrm{M}\frac{d\mathrm{N}}{dy} - \mathrm{N}\frac{d\mathrm{M}}{dy}\right), \end{aligned}\right.$$

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} 0 = \mathrm{M}\left(\mathrm{M}\frac{d\mathrm{P}}{dx} - \mathrm{P}\frac{d\mathrm{M}}{dx}\right) &+ \mathrm{N}\left(\mathrm{M}\frac{d\mathrm{P}}{dy} - \mathrm{P}\frac{d\mathrm{M}}{dy}\right) \\ &+ \mathrm{P}\left(\mathrm{M}\frac{d\mathrm{P}}{dz} - \mathrm{P}\frac{d\mathrm{M}}{dz}\right). \end{aligned}\right.$$

Or les équations (5) et (6) équivalent à

$$(7)\quad \mathrm{M}\frac{d\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}}}{dx} + \mathrm{P}\frac{d\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}}}{dz} + \mathrm{N}\frac{d\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}}}{dy} = 0.$$

$$(8)\quad \mathrm{M}\frac{d\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{N}}}{dx} + \mathrm{P}\frac{d\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{M}}}{dz} + \mathrm{N}\frac{d\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{M}}}{dy} = 0,$$

et celles-ci prouvent qu'en égalant $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}}$ et $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{M}}$ à des constantes, on obtient les équations d'une série de lignes droites. Si, en effet, on pose

$$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}} = \mathrm{C}, \quad \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{N}} = \mathrm{C}',$$

on en déduit, par la différentiation,

$$(9)\qquad \frac{d\frac{N}{M}}{dx} + \frac{d\frac{N}{M}}{dz}\frac{dz}{dx} + \frac{d\frac{N}{M}}{dy}\frac{dy}{dx} = 0,$$

$$(10)\qquad \frac{d\frac{P}{M}}{dx} + \frac{d\frac{P}{M}}{dz}\frac{dz}{dx} + \frac{d\frac{P}{M}}{dy}\frac{dy}{dx} = 0;$$

et ces deux équations (9) et (10), comparées aux deux précédentes (7) et (8), prouvent que l'on a

$$\frac{dz}{dx} = \frac{P}{M}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{N}{M}.$$

$\frac{dz}{dy}$ et $\frac{dy}{dx}$ sont donc constants, et, par suite, la ligne considérée est droite.

Nous devons néanmoins signaler un cas d'exception au raisonnement précédent. Si l'on avait

$$\frac{N}{M} = F\left(\frac{P}{M}\right),$$

les lignes dont nous parlons deviendraient indéterminées. Dans ce cas, les deux équations (7) et (8) rentrent l'une dans l'autre; elles deviennent, en supposant $M = 1$ (ce qui est permis, puisque les quantités M, N, P ne figurent que par leurs rapports),

$$\frac{dN}{dx} + N\frac{dN}{dz} + F(N)\frac{dN}{dy} = 0,$$

dont l'intégrale est

$$y = xF(N) + \varphi(z - Nx, N),$$

équation qui prouve que

$$N = \text{constante}$$

représente une surface réglée. Ainsi donc, en résumant les résultats que nous venons d'obtenir, nous voyons que α doit avoir l'une des formes :

1°. $\qquad \alpha = F(ax + by' + cz', x, y, z, t),$

2°. $\qquad \alpha = F(y' - Nx', z' - Px', x, y, z, t).$

N et P étant deux fonctions de x, y, z qui, égalées à deux constantes, représentent les équations d'une ligne droite:

3°. $$\alpha = F[y' - Nx', z' - \varphi(N)x', x, y, z, t],$$

N étant une fonction de x, y, z qui, égalée à une constante, représente une surface réglée.

XVII.

Les trois formes possibles d'une intégrale commune à plusieurs problèmes sont renfermées dans la suivante,

(1) $$\alpha = F(y' - Nx', z' - Px', x, y, z, t),$$

dans laquelle N et P désignent des fonctions de x, y, z.

En différentiant l'équation (1) et posant

$$y' - Nx' = u, \quad z' - Px' = v,$$

on obtient

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\alpha}{dx}x' + \frac{d\alpha}{dy}y' + \frac{d\alpha}{dz}z' &+ \frac{d\alpha}{du}\left(-x'^2\frac{dN}{dx} - x'y'\frac{dN}{dy} - x'z'\frac{dN}{dz}\right)\\ &+ \frac{d\alpha}{dv}\left(-x'^2\frac{dP}{dx} - x'y'\frac{dP}{dy} - x'z'\frac{dP}{dz}\right)\\ &+ \frac{d\alpha}{du}(Y - NX) + \frac{d\alpha}{dv}(Z - PX) = 0.\end{aligned}$$

Si, dans cette équation, nous remplaçons y' et z' par leurs valeurs $u - Nx'$, $v + Px'$, nous pourrons, dans le résultat, considérer x, y, z, x', u, v comme six variables indépendantes, et égaler à zéro les coefficients des diverses puissances de x'. En considérant, en particulier, les termes indépendants de x', nous aurons

$$\frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\alpha}{dy}u + \frac{d\alpha}{dz}v + \frac{d\alpha}{du}(Y - NX) + \frac{d\alpha}{dv}(Z - PX).$$

Or cette équation prouve qu'en considérant dans la fonction α, x comme un paramètre constant, et les lettres u et v comme les vitesses $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, l'équation

$$\alpha = F(u, v, x, y, z, t),$$

serait une intégrale générale des équations du mouvement d'un point sollicité, dans le plan des yz, par des forces ayant pour composantes parallèles aux x et aux z, $Y - NX$ et $Z - PX$.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Toute intégrale commune à deux problèmes relatifs au mouvement d'un point libre dans l'espace peut se déduire d'une intégrale relative au mouvement d'un point dans un plan.

Si l'on désigne par

$$\alpha = F(t, x, y, z, y', z')$$

cette seconde intégrale dans laquelle x peut entrer comme paramètre, pour en déduire l'intégrale cherchée, il faut remplacer y' et z' par $y' - Nx'$ et $z' - Px'$, N et P étant des fonctions de x, y, z, qui devront être ultérieurement déterminées.

XVIII.

Le théorème précédent permet de trouver toutes les intégrales communes à plusieurs problèmes et comprises dans la première forme

$$(1) \qquad \alpha = F(ax' + by' + cz', x, y, z, t).$$

Il est clair, en effet, qu'en la considérant comme cas particulier de celle qui a été examinée au paragraphe précédent, il faut considérer que dans cette dernière α ne dépend que d'une fonction linéaire des quantités désignées par u et v, et l'intégrale relative au mouvement dans un plan qui peut lui donner naissance doit, par suite, être de la forme

$$(2) \qquad \alpha = \psi(Ay' + Bz', y, z, x, t).$$

Or il a été démontré (paragraphes IV à IX) que les seules intégrales de cette forme que puissent avoir les problèmes à deux dimensions sont

$$(3) \qquad \alpha = zy' - yz' - ct,$$

$$(4) \qquad \alpha = yz' - zy'^2 + \varphi\left(\frac{y}{z}\right).$$

que nous pouvons représenter, en y introduisant le paramètre x, par les formules plus générales

$$\alpha_1 = F[zy' - yz' - t\varphi(x), x],$$

$$\alpha_1 = F\left[(zy' - yz')^2 - \varphi\left(\frac{y}{z}, x\right), x\right].$$

Si dans ces deux formules nous remplaçons y' et z' par $y' - Nx'$, $z' - Px'$, nous aurons, pour les seules formes possibles de l'intégrale cherchée,

$$(5) \qquad \alpha = F[z(y' - Nx') - y(z' - Px') - t\varphi(x), x],$$

$$(6) \qquad \alpha = F\left\{[z(y' - Nx') - y(z' - Px')]^2 - \varphi\left(\frac{y}{z}, x\right), x\right\}.$$

XIX.

Examinons d'abord la forme (5); en la différentiant, et posant

$$z(y' - Nx') - y(z' - Px') - t\varphi(x) = u,$$

il vient, après avoir remplacé $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$, $\frac{dz'}{dt}$ par X, Y, Z,

$$(7) \qquad \frac{d\alpha}{dx}x' + \frac{d\alpha}{du}\left\{\begin{array}{l} -\varphi(x) - zx'^2\frac{dN}{dx} + yx'^2\frac{dP}{dx} - t\varphi'(x)x' \\ -zx'y'\frac{dN}{dy} + yx'y'\frac{dP}{dy} - zx'z'\frac{dN}{dz} + yx'z'\frac{dP}{dz} \\ +z'(y' - Nx') - y'(z' - Px') + z(y - NX) \\ -y(z - PX) \end{array}\right\}.$$

Si, dans cette équation, nous remplaçons t par sa valeur

$$t = \frac{z(y' - Nx') - y(z' - Px') - u}{\varphi(x)},$$

nous pourrons, après cette substitution, considérer x, y, z, x', y', z' et u comme sept variables indépendantes, et, par suite, décomposer cette équation (7) en plusieurs autres. Écrivons, en particulier, que le coefficient de x' est égal à zéro; nous aurons

$$(8) \qquad \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\alpha}{du}\left[\frac{u\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right] = 0:$$

on en déduit, par une intégration facile,

$$(9) \qquad \alpha = \varphi\left[\frac{u}{\varphi(x)}\right].$$

Mais cette intégrale (9) équivaut évidemment à

$$\alpha_1 = \frac{u}{\varphi(x)},$$

α_1 étant une nouvelle constante arbitraire; nous voyons donc, en posant $\frac{1}{\varphi(x)} = \psi(x)$, que l'intégrale cherchée est de la forme

$$(10) \qquad \alpha = [z(y' - Nx') - y(z' - Px')]\psi(x) - t.$$

Si nous différentions cette intégrale, en remplaçant dans le résultat $\frac{dx'}{dt}, \frac{dy'}{dt}, \frac{dz'}{dt}$ par X, Y, Z, nous devrons obtenir une identité

$$(11) \qquad -1 + \psi(x)\left\{\begin{array}{l} zY - yZ - (zN - Py)X - z'Nx' + y'Px' \\ \quad - z\left(x'^2\frac{dN}{dx} + x'y'\frac{dN}{dy} + x'z'\frac{dN}{dz}\right) \\ \quad + y\left(x'^2\frac{dP}{dx} + x'y'\frac{dP}{dy} + x'z'\frac{dP}{dz}\right) \\ \quad - \psi'(x)x'[z(y' - Nx') - y(z' - Px')] \end{array}\right\} = 0.$$

Si, dans cette identité, nous égalons à zéro le coefficient de x'^2, celui de $x'y'$ et celui de $x'z'$, nous obtiendrons les trois relations suivantes :

$$-z\frac{dN}{dx} + y\frac{dP}{dx} = 0,$$

$$P - z\frac{dN}{dy} + y\frac{dP}{dy} = 0,$$

$$-N - z\frac{dN}{dz} + y\frac{dP}{dz} = 0.$$

En ajoutant ces équations, après avoir multiplié la première par dx, la deuxième par dy et la troisième par dz, il vient

$$(12) \qquad d.Py - d.Nz = 0.$$

le signe d se rapportant à la variation simultanée de x, y et z; on en conclut

$$(13) \qquad Py - Nz = C,$$

C étant une constante. Cette relation, introduite dans l'intégrale (10), lui fait prendre la forme

$$(14)\qquad \alpha = (zy' - yz' + Cx')\psi(x) - t;$$

en différentiant enfin cette équation (14) et remplaçant $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$, $\frac{dz'}{dt}$ par X, Y, Z, il vient

$$(zY - yZ + CX)\psi(x) + \psi'(x)(zy' - yz' + Cx')x' - 1 = 0,$$

équation qui ne peut être identique que si l'on a

$$\psi'(x) = 0,$$

et, par suite,

$$\psi(x) = C_1,$$

C_1 désignant une constante. L'intégrale cherchée est donc enfin

$$(15)\qquad (zy' - yz' + Cx')C_1 - t = \alpha;$$

elle convient à tous les problèmes dans lesquels les forces satisfont à la condition

$$(16)\qquad (zY - yZ + CX)C_1 - 1 = 0.$$

XX.

Examinons enfin les intégrales renfermées dans la forme (6) :

$$(6)\qquad \alpha = F\left\{[z(y' - Nx') - y(z' - Px')]^2 - \varphi\left(\frac{y}{z}, x\right), x\right\}.$$

Si nous différentions cette équation en posant

$$(17)\qquad [z(y' - Nx') - y(z' - Px')]^2 - \varphi\left(\frac{y}{z}, x\right) = u,$$

$$\frac{y}{z} = r,$$

il viendra

$$(18)\qquad \frac{d\alpha}{dx}x' + \frac{d\alpha}{du}\left\{\begin{array}{l} z'(y' - Nx') + z(Y - NX) \\ 2[z(y' - Nx') - y(z' - Px')]\left\{\begin{array}{l} -Z\left(x'^2\frac{dN}{dx} + x'y'\frac{dN}{dy} + x'z'\frac{dN}{dz}\right) \\ -y'(z' - Px') + y(Z - PX) \\ +y\left(x'^2\frac{dP}{dx} + x'y'\frac{dP}{dy} + x'z'\frac{dP}{dz}\right) \end{array}\right\} \\ +\frac{d\varphi}{dr}\frac{yz' - zy'}{z^2} - \frac{d\varphi}{dx}x' \end{array}\right\} = 0$$

Si, dans cette équation, nous remplaçons y' par sa valeur déduite de la relation (17), nous pourrons considérer, dans le résultat, x, y, z, x', z', u, comme six variables indépendantes, et, par suite, décomposer l'équation (18) en plusieurs autres. Nous écrirons, d'abord, que le coefficient de x' est égal à zéro. On obtient ainsi

$$\frac{dz}{dx} - \frac{dz}{du}\left\{2\sqrt{u+\varphi\left(\frac{y}{z}, x\right)}\left\{-\sqrt{u+\varphi\left(\frac{y}{z}, x\right)}\frac{dN}{dy} + \frac{P}{z}\sqrt{u+\varphi\left(\frac{y}{z}, x\right)} + \frac{y}{z}\frac{dP}{dy}\sqrt{u+\varphi\left(\frac{y}{z}, x\right)}\right\} - \frac{yP - zN}{z^2}\frac{d\varphi}{dx} - \frac{d\varphi}{dx}\right\} = 0.$$

En effectuant les multiplications indiquées, on voit que cette équation est de la forme

$$(19) \qquad \frac{dz}{dx} - \frac{dz}{du}(A + Bu) = 0,$$

A et B étant indépendants de u, α ne contenant que les variables x et u, cette équation exige que y et z disparaissent aussi de A et B, et que ces lettres soient fonctions de la seule variable x. Nous pouvons donc écrire

$$(20) \qquad \frac{dz}{dx} + \frac{dz}{du}[\varphi_1(x) + u\varphi_2(x)] = 0.$$

Pour intégrer cette équation, il faut considérer le système

$$(21) \qquad dx = \frac{du}{\varphi_1(x) + u\varphi_2(x)} = \frac{dz}{0},$$

l'une des intégrales est

$$\alpha = \text{constante}.$$

Pour en obtenir une seconde, mettons l'équation (21) sous la forme

$$(22) \qquad \varphi_1(x) + u\varphi_2(x) = \frac{du}{dx}.$$

Cette équation étant linéaire, son intégrale est de la forme

$$u = C\psi_1(x) - \psi_2(x).$$

ou, en résolvant par rapport à la constante,

$$C = \frac{u - \psi_2(x)}{\psi_1(x)},$$

d'où l'on conclut que l'intégrale de l'équation (20) est

$$(23) \qquad \alpha = F\left[\frac{u - \psi_2(x)}{\psi_1(x)}\right],$$

ce qui équivaut évidemment à

$$(24) \qquad \alpha_1 = \frac{u - \psi_2(x)}{\psi_1(x)},$$

α_1 désignant une nouvelle constante. Par conséquent, en remettant pour u sa valeur, on voit que l'intégrale cherchée doit être de la forme

$$(25) \qquad \frac{[(yz' - zy') + x'(Pz - Ny)]^2 - \varphi\left(\frac{y}{z}, x\right) - \psi_2(x)}{\psi_1(x)} = \alpha,$$

ou, en posant

$$\frac{1}{\psi_1(x)} = F(x), \quad \frac{\varphi\left(\frac{y}{z}, x\right) - \psi_2(x)}{\psi_1(x)} = f\left(\frac{y}{z}, x\right),$$

$$(26) \qquad \alpha = [(yz' - zy') + x'(Pz - Ny)]^2 F(x) - f\left(\frac{y}{z}, x\right).$$

En différentiant cette intégrale et remplaçant, dans le résultat, $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$, $\frac{dz'}{dt}$ par X, Y, Z, nous obtiendrons l'identité

$$2F(x)[yz' - zy' + x'(Pz - Ny)]\left\{\begin{array}{l} yZ - zY + X(Pz - Ny) + x'(Pz' - Ny') \\ \quad + z\left(x'^2\frac{dP}{dx} + x'y'\frac{dP}{dy} + x'z'\frac{dP}{dz}\right) \\ \quad - y\left(x'^2\frac{dN}{dx} + x'y'\frac{dN}{dy} + x'z'\frac{dN}{dz}\right) \end{array}\right\} = 0.$$

$$+ F'(x)x'[yz' - zy' + x'(Pz - Ny)]^2$$

$$- \frac{df}{dx}x' - \frac{df}{dr}\frac{zy' - yz'}{z^2}$$

En égalant à zéro le coefficient de x'^2, on obtient

$$2F(x)(Pz - Ny)\left(z\frac{dP}{dx} - y\frac{dN}{dx}\right) + F'(x)(Pz - Ny)^2 = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{\frac{d}{dx}(Pz - Ny)}{Pz - Ny} = -\frac{F'(x)}{2F(x)},$$

et, en intégrant et remarquant que la constante peut être une fonction de z et de y,

$$(Pz - Ny)^2 . F(x) = \varphi(z, y).$$

A l'aide de cette relation et en posant

$$\sqrt{F(x)} = F_1(x), \quad \sqrt{\varphi(y, z)} = \varphi_1(y, z),$$

l'intégrale (26) prend la forme

$$(27) \qquad [(yz - zy')F_1(x) + \varphi_1(y, z)x']^2 - f\left(\frac{y}{z}, x\right) = \alpha.$$

En différentiant cette équation (27), on obtient

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} &2[(yz - zy')F_1(x) + x'\varphi_1(y, z)] \left[\begin{aligned} &(yZ - zY)F_1(x) + (yz' - zy')F_1'(x)x' \\ &+ \frac{d\varphi}{dy}y'x' + \frac{d\varphi}{dz}z'x' + \varphi_1(y, z) \end{aligned} \right] \\ &\qquad - \frac{df}{dr}\frac{y'z - zy'}{z^2} - \frac{df}{dx}x' = 0. \end{aligned} \right.$$

et, en égalant à zéro le coefficient de $x'^2 z'$ et celui de $x'^2 y'$, il vient

$$(29) \qquad \varphi_1(y, z)\left[yF_1'(x) + \frac{d\varphi}{dz}\right] = 0,$$

$$(30) \qquad \varphi_1(y, z)\left[-zF_1'(x) + \frac{d\varphi}{dy}\right] = 0.$$

Or les équations

$$\frac{d\varphi}{dz} = -yF_1'(x),$$

$$\frac{d\varphi}{dy} = zF_1'(x)$$

sont incompatibles: car $F_1'(x)(z\,dy - y\,dz)$ n'est pas une différentielle exacte. On ne peut donc satisfaire aux équations (29) et (30) que par l'une des hypothèses suivantes,

$$\varphi_1(y, z) = 0, \quad \begin{cases} F_1'(x) = 0, \\ \varphi_1(y, z) = \text{constante}. \end{cases}$$

et ces hypothèses, introduites dans l'intégrale (27), lui font prendre les deux formes

$$(31)\qquad [(yz' - zy')F_1(x)]^2 - f\left(\frac{y}{z}, x\right) = \alpha,$$

$$(32)\qquad [(yz' - zy')C + C_1 x']^2 - f\left(\frac{y}{z}, x\right) = \alpha;$$

et en écrivant que, par la différentiation, ces équations conduisent à des identités, on trouve facilement que, dans la première, $F_1(x)$ doit être constant et $f\left(\frac{y}{z}, x\right)$ indépendant de x, et que, dans la seconde, $f\left(\frac{y}{z}, x\right)$ doit être une constante. Les intégrales cherchées sont donc enfin

$$(yz' - zy')^2 - f\left(\frac{y}{z}\right) = \alpha,$$

$$[(yz' - zy')C + C_1 x']^2 = \alpha;$$

elles rentrent l'une et l'autre dans celles que nous avions obtenues précédemment.

XXI.

Revenons actuellement à la forme

$$(1)\qquad \alpha = F(y' - Nx', z' - Px', x, y, z, t).$$

Nous savons (§ XIV) que N et P satisfont aux deux équations

$$\frac{dN}{dx} + N\frac{dN}{dy} + P\frac{dN}{dz} = 0,$$

$$\frac{dP}{dx} + N\frac{dP}{dy} + P\frac{dP}{dz} = 0,$$

et nous en avons conclu que des équations

$$N = \text{constante}, \quad P = \text{constante},$$

on déduirait

$$\frac{dy}{dx} = N, \quad \frac{dz}{dx} = P,$$

et, par suite,

$$y' - Nx' = 0, \quad z' - Px' = 0;$$

les deux différences $y' - Nx'$ et $z' - Px'$ s'annulent donc l'une et l'autre avec dN et dP; on en conclut facilement qu'en désignant par N' et P' les dérivées de N et de P, ces deux différences sont de la forme

$$y' - Nx' = AN' + BP',$$
$$z' - Px' = A_1 N' + B_1 P',$$

A, B, A_1, B_1 étant des fonctions de x, y, z. D'après cela, l'intégrale (1) est de la forme

$$(2) \qquad \alpha = F(N', P', x, y, z, t).$$

Si donc on prend pour coordonnées N et P, et une troisième fonction Q de x, y et z, on pourra considérer x, y, z comme des fonctions de N, P, Q, et écrire

$$\alpha = F(N', P', N, P, Q, t),$$

N et P désignant les paramètres d'un système de droites et Q une fonction quelconque.

XXII.

Je traiterai en particulier le cas où les droites représentées par les équations

$$N = \text{constante}, \quad P = \text{constante},$$

sont normales à une série de surfaces. Nous pouvons supposer, dans ce cas, que Q soit précisément le paramètre de ces surfaces. De plus, on peut évidemment substituer à N et P deux fonctions quelconques de ces variables, et il est aisé de voir que ces fonctions peuvent être choisies de telle sorte que chacune d'elles, égalée à une constante, représente les surfaces développables formées par les normales menées aux différents points d'une ligne de courbure. En désignant par q_1 et q_2 ces deux fonctions de N et P et par q_3 le paramètre des surfaces orthogonales à nos droites, les variables q_1, q_2, q_3 formeront un système de coordonnées curvilignes orthogonales. L'intégrale α conservera d'ailleurs la forme

$$(3) \qquad \alpha = F(q'_1, q'_2, q_1, q_2, q_3, t).$$

Soit

$$ds^2 = A\,dq_1^2 + B\,dq_2^2 + C\,dq_3^2$$

l'expression du carré de la distance de deux points infiniment voisins, en sorte que la demi-force vive T ait pour expression

$$T = \frac{1}{2}(A q_1'^2 + B q_2'^2 + C q_3'^2).$$

D'après les formules générales de Lagrange, deux des équations du mouvement seront

$$(4)\qquad \frac{d}{dt}A q_1' - \frac{1}{2}q_2'^2\frac{dB}{dq_1} - \frac{1}{2}q_3'^2\frac{dC}{dq_1} - \frac{1}{2}q_1'^2\frac{dA}{dq_1} = Q_1,$$

$$(5)\qquad \frac{d}{dt}B q_2' - \frac{1}{2}q_1'^2\frac{dB}{dq_2} - \frac{1}{2}q_3'^2\frac{dC}{dq_2} - \frac{1}{2}q_2'^2\frac{dB}{dq_2} = Q_2,$$

Q_1 et Q_2 étant des fonctions de q_1, q_2, q_3 qui dépendent des forces accélératrices.

Ces équations se simplifient si l'on remarque que les surfaces dont l'équation est

$$q_3 = \text{constante}$$

étant parallèles, le coefficient C est indépendant de q_1 et de q_2, et il reste, en effectuant les différentiations indiquées,

$$(6)\qquad A\frac{d^2q_1}{dt^2} + \frac{1}{2}q_1'^2\frac{dA}{dq_1} - \frac{1}{2}q_2'^2\frac{dB}{dq_1} + q_1'q_2'\frac{dA}{dq_2} + q_1'q_3'\frac{dA}{dq} = Q_1.$$

$$(7)\qquad B\frac{d^2q_2}{dt^2} + \frac{1}{2}q_2'^2\frac{dB}{dq_2} - \frac{1}{2}q_1'^2\frac{dA}{dq_2} + q_1'q_2'\frac{dB}{dq_1} - q_3'q_2'\frac{dB}{dq} = Q_2.$$

En différentiant l'intégrale (3) et remplaçant $\frac{d^2q_1}{dt^2}$, $\frac{d^2q_2}{dt^2}$ par leurs valeurs déduites des équations (6) et (7), il vient

$$\frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\alpha}{dq_1}q_1' + \frac{d\alpha}{dq_2}q_2' + \frac{d\alpha}{dq_3}q_3'$$

$$-\frac{1}{A}\frac{d\alpha}{dq_1'}\left(\frac{1}{2}q_1'^2\frac{dA}{dq_1} - \frac{1}{2}q_2'^2\frac{dB}{dq_1} + q_1'q_2'\frac{dA}{dq_2} + q_1'q_3'\frac{dA}{dq} - Q_1\right)$$

$$-\frac{1}{B}\frac{d\alpha}{dq_2'}\left(\frac{1}{2}q_2'^2\frac{dB}{dq_2} - \frac{1}{2}q_1'^2\frac{dA}{dq_1} + q_1'q_2'\frac{dB}{dq_1} + q_3'q_3'\frac{dB}{dq} - Q_2\right)$$

en égalant à zéro le coefficient de q'_3 dans cette dernière équation, on obtient

$$\frac{d\alpha}{dq_3} - \frac{1}{A}\frac{dA}{dq_3}q'_1\frac{d\alpha}{dq'_1} - \frac{1}{B}\frac{dB}{dq}q'_2\frac{d\alpha}{dq'_2} = 0,$$

équation différentielle partielle du premier ordre, dont on déduit, par l'intégration,

$$\alpha = F(Aq'_1, Bq'_2, q_1, q_2, t).$$

XXIII.

Il est essentiel, avant d'aller plus loin, de chercher la forme des coefficients A et B qui figurent dans notre intégrale. A et B sont, on s'en souvient, les coefficients de dq_1^2 et dq_2^2 dans l'expression du carré de la distance de deux points infiniment voisins. $A\,dq_1^2$ est, par conséquent, le carré de la distance de deux points qui correspondent à des valeurs égales de q_2 et de q_3. Ce produit est, par conséquent, le carré de l'arc que deux normales infiniment voisines, menées par deux points d'une même ligne de courbure, interceptent sur l'une des surfaces qu'elles coupent à angle droit. Or, en supposant que le paramètre q_3 soit précisément la distance des diverses surfaces à l'une d'elles choisie arbitrairement, il est facile de voir que l'arc dont nous parlons croît proportionnellement à q_3, et qu'il est de la forme

$$[\varphi(q_1, q_2) + q_3]\,d\omega,$$

$d\omega$ étant l'angle des deux normales considérées. Cet angle est d'ailleurs de la forme

$$d\omega = \psi(q_1, q_2)\,dq_1,$$

en sorte que la valeur de $A\,dq_1^2$ peut être représentée par

$$(M + Nq_3)^2\,dq_1^2,$$

M et N étant des fonctions de q_1 et de q_2. On a donc enfin

$$A = (M + Nq_3)^2.$$

On verra de même que l'on a

$$B = (M_1 + N_1 q_3)^2,$$

M_1 et N_1 étant, comme M et N, indépendants de q_3.

XXIV.

En différentiant l'intégrale

$$(1)\qquad \alpha = F(Aq'_1, Bq'_2, q_1, q_2, t),$$

et posant, pour abréger, $Aq'_1 = u$, $Bq'_2 = v$, on obtient, après avoir remplacé $\frac{dq'_1}{dt}$ et $\frac{dq'_2}{dt}$ par leurs valeurs,

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\alpha}{dq_1} q'_1 + \frac{d\alpha}{dq_2} q'_2 \\ &\quad + \frac{d\alpha}{du}\left(q'^2_1 \frac{dA}{dq_1} + q'_1 q'_2 \frac{dA}{dq_2} + q'_3 q'_1 \frac{dA}{dq}\right) \\ &\quad + \frac{d\alpha}{dv}\left(q'^2_2 \frac{dB}{dq_2} + q'_1 q'_2 \frac{dB}{dq_1} + q'_3 q'_2 \frac{dB}{dq}\right) \\ &\quad - \frac{d\alpha}{du}\left(\frac{1}{2} q'^2_1 \frac{dA}{dq_1} - \frac{1}{2} q'^2_2 \frac{dB}{dq_1} + q'_1 q'_2 \frac{dA}{dq} + q'_1 q'_3 \frac{dA}{dq} - Q_1\right) \\ &\quad - \frac{d\alpha}{dv}\left(\frac{1}{2} q'^2_2 \frac{dB}{dq_2} - \frac{1}{2} q'^2_1 \frac{dA}{dq_2} + q'_1 q'_2 \frac{dB}{dq_1} + q'_3 q'_2 \frac{dB}{dq} - Q_2\right). \end{aligned}\right.$$

et l'on voit que les termes en q'_3 disparaissent d'eux-mêmes, ainsi qu'on devait s'y attendre. Si l'on fait, en outre, d'autres réductions faciles et que l'on remplace q'_1 et q'_2 par $\frac{u}{A}$, $\frac{v}{B}$ et A et B par leurs valeurs données plus haut, l'équation précédente devient

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\alpha}{dq_1}\frac{u}{(M + Nq_1)^2} + \frac{d\alpha}{dq_2}\frac{v}{(M_1 + N_1 q_1)^2} \\ &\quad + \frac{d\alpha}{du}\left[u^2 \frac{\frac{dM}{dq_1} + q_1 \frac{dN}{dq_1}}{(M + Nq_1)^3} + v^2 \frac{\frac{dM_1}{dq_1} + q_1 \frac{dN_1}{dq_1}}{(M_1 + N_1 q_1)^3} + Q_1\right] \\ &\quad + \frac{d\alpha}{dv}\left[u^2 \frac{\frac{dM}{dq_2} + q_2 \frac{dN}{dq_2}}{(M + Nq_2)^3} + v^2 \frac{\frac{dM_1}{dq_2} + q_2 \frac{dN_1}{dq_2}}{(M_1 + N_1 q_2)^3} + Q_2\right] = 0. \end{aligned}\right.$$

Si nous déduisons de cette équation l'expression de la somme $\frac{d\alpha}{du} Q_1 + \frac{d\alpha}{dv} Q_2$, nous verrons que cette somme, considérée comme

fonction de q_3, est nécessairement de la forme

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{d\alpha}{du} Q_1 + \dfrac{d\alpha}{dv} Q_2 = H + \dfrac{H_1}{(M+Nq_3)^2} + \dfrac{H_2}{(M+Nq_3)} \\ \qquad + \dfrac{G_1}{(M_1+N_1q_3)^2} + \dfrac{G_2}{(M_1+N_1q_3)^2}, \end{cases}$$

H, H_1, H_2, G_1, G_2 étant des fonctions indépendantes de q_3. Si, dans cette équation (4), on remplace u et v par les nouvelles valeurs u_1 et v_1, on formera une équation nouvelle dans laquelle Q_1 et Q_2 conserveront les mêmes valeurs, puisqu'ils sont indépendants de u et de v; et, de cette équation, jointe à la précédente, on pourra déduire les valeurs de Q_1 et Q_2 qui, évidemment, seront de la forme

$$(5)\quad Q_1 = K_1 + \frac{K_2}{(M+Nq_3)^2} + \frac{K}{(M+Nq_3)} + \frac{L_1}{(M_1+N_1q_3)^2} + \frac{L_2}{(M_1+N_1q_3)},$$

$$(6)\quad Q_2 = E_1 + \frac{E_2}{(M+Nq_3)^2} + \frac{E}{(M+Nq_3)} + \frac{F_1}{(M_1+N_1q_3)^2} + \frac{F_2}{(M_1+N_1q_3)};$$

K_1, K_2, K_3, L_1, L_2, E_1, E_2, E_3, F_1, F_2, étant indépendants de q_3, et indépendants aussi de u et de v, puisque ces lettres ne figurent ni dans Q_1 ni dans Q_2.

Le raisonnement précédent ne serait en défaut que si $\frac{d\alpha}{du} : \frac{d\alpha}{dv}$ était indépendant de u et de v. Mais alors, en désignant ce rapport par K, α serait une fonction de $u + Kv$, et nous rentrerions dans un cas déjà traité.

Nous devons maintenant distinguer deux cas :

1°. Le rapport $\frac{M}{N}$ est égal à $\frac{M_1}{N_1}$;

2°. Le rapport $\frac{M}{N}$ est différent de $\frac{M_1}{N_1}$.

Dans le premier de ces cas, les fractions qui ont pour dénominateur une puissance de $M + Nq_3$ peuvent se réduire avec celles qui ont pour dénominateur une puissance de $M_1 + N_1q_3$.

Dans le second, une pareille réduction est évidemment impossible, et les deux groupes de termes doivent se détruire séparément.

En se reportant à la signification des quantités M, N, M_1, N_1,

on voit sans peine que $\frac{M}{N}$ et $\frac{M_1}{N_1}$ sont les deux rayons de courbure de la surface représentée par l'équation

$$q_3 = 0;$$

dans le premier des cas considérés, ces deux rayons étant égaux, *la surface est une sphère, et il en est de même de toutes les surfaces parallèles.*

Examinons actuellement le cas où $\frac{M}{N}$ et $\frac{M_1}{N_1}$ n'auraient pas la même valeur; il faut alors, évidemment, que les termes dont le dénominateur est une puissance de $M + Nq_3$, se détruisent entre eux dans l'équation (3) et qu'il en soit de même de ceux dont le dénominateur est $M_1 + N_1 q_3$. Pour exprimer qu'il en ainsi, nous distinguerons plusieurs cas :

1°. Les fractions

$$\frac{\frac{dM}{dq_1} + q\frac{dN}{dq_1}}{(M+Nq_3)^2}, \quad \frac{\frac{dM}{dq_2} + q_3\frac{dN}{dq_2}}{(M+Nq_3)^3}, \quad \frac{\frac{dM_1}{dq_1} + q_3\frac{dN_1}{dq_1}}{(M_1+N_1q_3)^2}, \quad \frac{\frac{dM_1}{dq_2} + q_3\frac{dN_1}{dq_2}}{(M_1+N_1q_3)^2},$$

ont toutes un facteur fonction de q_3, commun à leurs deux termes, et, toute réduction faite, ne contiennent, en dénominateur, que $(M + Nq_3)^2$, $(M_1 + N_1 q_3)^2$;

2°. Cette réduction se présente pour les fractions dont le dénominateur contient $(M + Nq_3)$ et ne se présente pas pour les deux autres;

3°. Cette réduction ne se présente ni pour les deux fractions qui contiennent $M + Nq_3$ en dénominateur, ni pour les deux autres qui contiennent $M_1 + N_1 q_3$.

Dans le premier des trois cas précédents, on doit avoir évidemment

$$\frac{\frac{dM}{dq_1}}{M} = \frac{\frac{dN}{dq_1}}{N}, \quad \frac{\frac{dM}{dq_2}}{M} = \frac{\frac{dN}{dq}}{N},$$

$$\frac{\frac{dM_1}{dq_1}}{M_1} = \frac{\frac{dN_1}{dq_1}}{N_1}, \quad \frac{\frac{dM_1}{dq_2}}{M_1} = \frac{\frac{dN_1}{dq_2}}{N_1},$$

et de ces équations on conclut sans peine que $\frac{M}{N}$ et $\frac{M_1}{N_1}$ sont l'un et l'autre constants : la surface représentée par l'équation

$$q_3 = 0$$

a donc ses *deux rayons de courbure constants, par conséquent elle est une sphère.*

Dans le second des cas énumérés plus haut, on doit avoir

$$\frac{\frac{dM}{dq_1}}{M} = \frac{\frac{dN}{dq_1}}{N}, \quad \frac{\frac{dM}{dq_2}}{M} = \frac{\frac{dN}{dq_2}}{N},$$

et l'on peut conclure de ces deux équations que le rapport $\frac{M}{N}$ est constant, et que, par conséquent, la surface représentée par l'équation

$$q_3 = 0$$

a l'un de ses *rayons de courbure constants et qu'elle est une surface canal.*

Enfin, dans le troisième cas, nous pouvons égaler séparément à zéro, l'ensemble des termes qui contiennent $(M + Nq_3)^3$ en dénominateur, ainsi que ceux qui contiennent $(M_1 + N_1 q_3)^3$: nous aurons ainsi, en ayant égard aux valeurs de Q_1 et Q_2,

$$(7) \quad 0 = \frac{d\alpha}{du}\left[u^2\left(\frac{dM}{dq_1} + q_3\frac{dN}{dq_1}\right) - K_1\right] + \frac{d\alpha}{dv}\left[u^2\left(\frac{dM}{dq_2} + q_3\frac{dN}{dq_2}\right) - K_2\right],$$

$$(8) \quad 0 = \frac{d\alpha}{du}\left[v^2\left(\frac{dM}{dq_1} + q_3\frac{dN}{dq_1}\right) - L_1\right] + \frac{d\alpha}{dv}\left[v^2\left(\frac{dM}{dq_2} + q_3\frac{dN}{dq_2}\right) - L_2\right].$$

Or la première de ces équations prouve que $\frac{d\alpha}{du} : \frac{d\alpha}{dv}$ est indépendant de v, et la seconde, que ce rapport est indépendant de u : on peut donc en conclure qu'il ne dépend ni de u ni de v : en désignant sa valeur par K, il en résulte, comme on l'a déjà remarqué, que α est une fonction de $u + Kv$, et nous rentrons dans un cas déjà étudié.

Les seuls cas nouveaux que nous ayons à examiner, sont donc ceux *où les surfaces représentées par l'équation*

$$q_3 = \text{constante}$$

sont des sphères concentriques ou des surfaces canaux.

XXV.

Occupons-nous particulièrement du cas où les surfaces représentées par l'équation

$$q_3 = 0$$

sont des sphères concentriques. Le système des coordonnées désignées par q_1, q_2, q_3 se réduit alors, si l'on veut, au système ordinaire de coordonnées polaires que nous représenterons, comme on le fait habituellement, par θ, ψ, ρ. Le carré de la distance de deux points est représenté, comme on sait, par

$$ds^2 = \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2\theta\, d\psi^2 + d\rho^2,$$

en sorte que les quantités désignées par A et B sont, respectivement,

$$A = \rho^2,$$
$$B = \rho^2 \sin^2\theta,$$

et la forme de l'intégrale cherchée est, par conséquent,

$$(1) \qquad \alpha = \varphi\left(\rho^2 \frac{d\theta}{dt},\ \rho^2 \sin^2\theta \frac{d\psi}{dt},\ \theta,\ \psi,\ t\right).$$

Si nous substituons actuellement des coordonnées rectilignes x, y, z, aux coordonnées polaires ρ, θ, ψ, nous trouverons facilement

$$\rho^2 \sin^2\theta \frac{d\psi}{dt} = xy' - yx',$$

$$\rho^2 \frac{d\theta}{dt} = \cos\psi(xz' - zx') + \sin\psi(zy' - yz');$$

ce qui met l'équation (1) sous la forme

$$\alpha = \varphi[xy' - yx',\ \cos\psi(xz' - zx') + \sin\psi(zy' - yz'),\ \theta,\ \psi,\ t],$$

et, en remarquant que l'un des trois binômes, $xy' - yx$, $xz' - zx'$, $yz' - zy'$, est fonction des deux autres et des angles θ et ψ, et que θ et ψ dépendent eux-mêmes de $\frac{z}{x}$, $\frac{y}{x}$, on peut écrire

$$\alpha = F\left(xz' - zx',\ xy' - yx',\ \frac{z}{x},\ \frac{y}{x},\ t\right);$$

telle est la forme la plus simple sous laquelle on puisse mettre l'intégrale cherchée.

XXVI.

La dérivée $\frac{dz}{dt}$ est, comme on l'a rappelé plusieurs fois, égale à 0 ou à -1. L'étude du cas où elle est nulle conduit à un résultat remarquable. L'intégrale obtenue dans le paragraphe précédent prend alors la forme

$$(1) \qquad z = F\left(xz' - zx', \quad xy' - yx', \quad \frac{z}{x}, \quad \frac{y}{x}\right).$$

Différentions cette équation en posant, pour abréger,

$$xz' - zx' = u, \quad xy' - yx' = v, \quad \frac{z}{x} = p, \quad \frac{y}{x} = q,$$

nous obtiendrons, après avoir remplacé $\frac{d^2x}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt^2}$, par X, Y, Z,

$$(2) \qquad \frac{dz}{du}(xZ - zX) + \frac{dz}{dv}(xY - yX) + \frac{dz}{dp}\left(\frac{u}{x} + \frac{dz}{dq}\frac{v}{x}\right) = 0,$$

ou, en multipliant tous les termes par x^2,

$$(3) \qquad \frac{dz}{du}(xZ - zX)x^2 + \frac{dz}{dv}(xY - yX)x^2 + \frac{dz}{dp}u + \frac{dz}{dq}v = 0.$$

Or cette équation (3) exprime qu'en considérant p et q comme les coordonnées rectilignes d'un point dans un plan, et u, v comme les composantes de la vitesse de ce point, parallèlement aux axes,

$$(4) \qquad z = F(u, v, p, q)$$

est une intégrale des équations du mouvement d'un point sollicité par une force accélératrice dont les composantes seraient

$$x^2(xY - yX) \quad \text{et} \quad x^2(xZ - zX),$$

ces composantes étant considérées comme fonctions de p et q et d'une

troisième variable que l'on considérera comme un paramètre constant.

Si donc, réciproquement, on résout un problème quelconque relatif au mouvement dans un plan, en supposant un point sollicité par une force dont les composantes X_p et Y_q soient des fonctions quelconques des coordonnées p et q, si l'on prend une intégrale des équations du mouvement

$$z = F(p, q, u, v);$$

u et v désignant les composantes des vitesses, l'équation

$$z = F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, y'x - x'y, \quad z'x - x'z\right)$$

sera une intégrale commune à tous les problèmes à trois dimensions, dans lesquels les composantes X, Y, Z de la force accélératrice sont liées par les équations

$$x^2(Yx - Xy) = X_p,$$

$$y^2(Zx - Xz) = Y_q.$$

Ce théorème permet évidemment de former autant d'intégrales qu'on le voudra qui soient communes à un nombre infini de problèmes.

XXVII.

La dépendance qui se trouve établie par le théorème précédent entre les intégrales communes à plusieurs problèmes relatifs au mouvement dans l'espace, et les intégrales quelconques des équations du mouvement dans un plan, existe également entre les intégrales communes à plusieurs problèmes à deux dimensions et les intégrales quelconques des équations du mouvement rectiligne. Sans donner ici une démonstration nouvelle, rendue bien facile par ce qui précède, nous allons montrer que l'on peut, de cette manière, obtenir une des solutions trouvées au § IX.

L'équation différentielle du mouvement rectiligne d'un point est,

en effet,

$$\frac{d^2x}{dt} = X \tag{1}$$

X désignant une fonction de x.

L'intégrale est de la forme

$$\alpha = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \varphi\left(\frac{1}{x}\right). \tag{2}$$

$\varphi(x)$ représentant ici $2\int X\,dx$.

Si dans cette intégrale nous remplaçons x par $\frac{1}{r}$ et $\frac{dx}{dt}$ par $yx' - xy'$, nous obtiendrons

$$(yx' - xy')^2 - \varphi\left(\frac{1}{r}\right) = \alpha,$$

ce qui est précisément l'intégrale obtenue au § IX.

Note sur l'intégration des équations différentielles;

PAR M. J. BERTRAND.

L'intégrale générale d'une équation différentielle de la forme

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y)$$

doit fournir l'expression de y en fonction de x et d'une constante arbitraire C. La détermination de cette intégrale équivaut donc à la recherche d'une fonction de deux variables. Mais lorsque, par la nature de l'équation, on peut prévoir de quelle manière la constante figure dans l'expression générale de y, il ne reste plus qu'une fonction d'une seule variable à déterminer, et le problème se ramène, en général, aux quadratures.

Cette remarque conduit d'une manière simple à l'intégration des équations différentielles que l'on prend le plus ordinairement pour exemples dans les Traités de calcul intégral.

Soit une équation homogène

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right);$$

on démontre, bien facilement, que l'intégrale représente une série de courbes semblables ayant pour centre de similitude l'origine et ayant une équation générale de la forme

$$x = \mathrm{CF}\left(\frac{y}{x}\right), \quad \text{ou} \quad \log x = \log \mathrm{C} + \log \mathrm{F}\left(\frac{y}{x}\right),$$

d'où l'on déduit

$$\frac{dx}{x} = \frac{\mathrm{F}'\left(\frac{y}{x}\right) d.\frac{y}{x}}{\mathrm{F}\left(\frac{y}{x}\right)}.$$

Si l'on pose $\log x = \mathrm{U}$, $\frac{y}{x} = z$, cette équation deviendra

$$d\mathrm{U} = \frac{\mathrm{F}'(z)\, dz}{\mathrm{F}(z)},$$

et les variables seront séparées.

Soit l'équation linéaire

$$\frac{dy}{dx} + y\varphi(x) + \psi(x) = 0:$$

l'intégrale est évidemment de la forme

$$y = \varphi_1(x) + C\psi_1(x), \quad \text{ou} \quad \frac{y}{\psi_1(x)} = \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)} + C,$$

ce qui donne, par la différentiation,

$$\frac{d.\frac{y}{\psi_1(x)}}{dx} = \frac{d.\frac{\varphi_1}{\psi_1}}{dx}.$$

Si donc on pose $\frac{y}{\psi_1(x)} = z$, les variables seront séparées; et l'on est conduit de cette maniere à représenter y par le produit de deux fonctions inconnues de x, ce qui est, comme on sait, le procédé ordinaire d'intégration.

On peut démontrer d'une maniere analogue le théoreme fondamental de la théorie des équations linéaires. Soit

$$\frac{d^m y}{du^m} + P_1 \frac{d^{m-1} y}{du^{m-1}} + \ldots + P_m y = 0$$

une équation linéaire. On établit bien facilement que son intégrale est de la forme

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{y}{y_1} = C_1 + C_2 \frac{y_2}{y_1} + \ldots + C_n \frac{y_n}{y_1},$$

d'où

$$\frac{d.\left(\frac{y}{y_1}\right)}{dx} = C_2 \frac{d.\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{dx} + \ldots + C_n \frac{d.\left(\frac{y_n}{y_1}\right)}{dx};$$

ce qui montre que $\frac{d.\frac{y}{y_1}}{dx}$ est l'intégrale générale d'une équation linéaire d'ordre $n-1$. Si donc on connaît y_1, en posant $\frac{y}{y_1} = u$, et prenant $\frac{du}{dx}$ pour inconnue, on sera conduit à une équation linéaire d'ordre $n-1$, en sorte que la connaissance d'une intégrale permet d'abaisser d'une unité l'ordre de l'équation différentielle sans lui faire perdre sa forme linéaire.

SUR UN DÉTERMINANT D'INTÉGRALES DÉFINIES;

PAR M. A. TISSOT.

1. A l'aide d'un changement de variables, M. William Roberts a établi [*], entre certaines intégrales définies, des relations analogues à celle que donne le théorème de Legendre sur les fonctions elliptiques complètes de première et de seconde espèce à modules complémentaires. On peut obtenir une formule, qui comprendra ces relations comme cas particuliers, en calculant le déterminant

$$D = \sum \left[\pm \int_a^{a_1} e^{-x} \frac{dx}{\varphi_1(x)} \int_{a_1}^{a_2} e^{-x} \frac{x\,dx}{\varphi_2(x)} \cdots \int_{a_{n-1}}^{a_n} e^{-x} \frac{x^{n-1}\,dx}{\varphi_{n-1}(x)} \int_{a_n}^{x} e^{-x} \frac{x^n\,dx}{\varphi_n(x)} \right],$$

ou, ce qui revient au même, l'intégrale définie multiple

$$(1.)\quad D = \int_a^{a_1} \int_{a_1}^{a_2} \cdots \int_{a_{n-1}}^{a_n} \int_{a_n}^{x} \frac{e^{-x-x_1-\ldots-x_{n-1}-x_n}\,\Pi(x, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)}{\varphi_1(x)\,\varphi_2(x_1)\ldots\varphi_{n-1}(x_{n-2})\,\varphi_n(x_n)}\,dx\,dx_1\ldots dx_{n-1}\,dx_n;$$

$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \varphi_n(x)$ représentent ici les expressions que l'on trouve, en donnant à l'indice i toutes les valeurs entières, depuis zéro jusqu'à n, dans

$$\varphi_i(x) = (x-a)^m (x-a_1)^{m_1} \ldots (x-a_i)^{m_i} (a_{i+1}-x)^{m_{i+1}} \ldots (a_n-x)^{m_n};$$

$m, m_1, \ldots, m_{n-1}, m_n$ sont des exposants positifs plus petits que l'unité, ou des exposants négatifs quelconques; enfin, la fonction Π remplace le produit

$$\Pi(x, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = (x_1-x)(x_2-x)\ldots(x_n-x)(x_2-x_1)\ldots(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1}).$$

[*] Tome XVI du présent Journal.

Soit p_i le complément de m_i à l'unité; posons

$$F_i(x) = (x-a)(x-a_1)\dots(x-a_i)(a_{i+1}-x)\dots(a_n-x);$$

si nous indiquons par la lettre Γ les intégrales eulériennes de deuxième espèce, et au moyen d'accents les dérivées prises par rapport à x, la formule en question sera

$$(2)\qquad D = \Gamma(p)\,\Gamma(p_1)\dots\Gamma(p_n)\,\frac{F'(a)^p\,F'_1(a_1)^{p_1}\dots F'_n(a_n)^{p_n}}{\Pi(a_1-a)\dots(a_n-a)}\,e^{-(a_1-a)-\dots-(a_n-a)}.$$

2. Lorsque $n+1$ quantités $A, A_1, \dots, A_{n-1}, A_n$ satisfont à une même équation différentielle linéaire dont le second membre est nul, et dont la variable indépendante est a, le déterminant

$$R = \sum\left[\pm A\frac{dA_1}{da}\dots\frac{d^{n-1}A_{n-1}}{da_{n-1}}\frac{d^nA_n}{da_n}\right]$$

peut se mettre sous la forme

$$R = \gamma e^{-\int P da},$$

P étant le rapport du coefficient du second terme à celui du premier, dans l'équation différentielle linéaire, et γ une constante par rapport à a.

Pour établir la formule (2), je m'appuierai sur cette propriété, qui a été démontrée par M. Liouville [*]; après avoir prouvé qu'il y a lieu de l'appliquer ici, je n'aurai plus qu'à déterminer la valeur particulière de γ.

3. Considérons d'abord le cas où n serait égal à l'unité, et où, par conséquent, la notation précédente donnerait

$$\varphi(x) = (x-a)^m(a_1-x)^{m_1},\quad \varphi_1(x) = (x-a)^m(x-a_1)^{m_1},$$

$$D = \int_a^{a_1} e^{-x}\frac{dx}{\varphi(x)}\int_{a_1}^{\infty} e^{-x}\frac{x\,dx}{\varphi_1(x)} - \int_a^{a_1} e^{-x}\frac{x\,dx}{\varphi(x)}\int_{a_1}^{x} e^{-x}\frac{dx}{\varphi_1(x)}.$$

La formule à démontrer devient alors

$$D = \Gamma(p)\,\Gamma(p_1)\,(a_1-a)^{p+p_1-1}\,e^{-(a-a_1)},$$

[*] Tome X du présent Journal.

p et p_1 représentant, comme tout à l'heure, les différences $1-m$ et $1-m_1$. Or, il est facile de vérifier qu'en posant

$$A=\int_a^{a_1} e^{-x}\frac{(x-a)^p}{(a_1-x)^{m_1}}dx,\quad A_1=\int_{a_1}^{\infty} e^{-x}\frac{(x-a)^p}{(x-a_1)^{m_1}}dx,$$

$$B=\int_a^{a_1}\frac{e^{-x}dx}{(x-a)^m(a_1-x)^{m_1}},\quad B_1=\int_{a_1}^{\infty}\frac{e^{-x}dx}{(x-a)^m(x-a)^{m_1}},$$

on pourra mettre D sous la forme

$$D=A_1B-B_1A;$$

et, si l'on différentie par rapport à a les deux membres de cette équation, il viendra

$$\frac{dD}{da}=mA_1\int_a^{a_1}\frac{e^{-x}dx}{(x-a)^{1+m}(a_1-x)^{m_1}}$$
$$-mA\int_{a_1}^{\infty}\frac{e^{-x}dx}{(x-a)^{1+m}(x-a_1)^{m_1}}-A_1\frac{e^{-a}}{\varphi(a)};$$

le dernier terme de cette expression est nul ou infini, suivant que l'exposant m est négatif ou positif. On a d'ailleurs identiquement

$$d\left[e^{-x}\frac{(a_1-x)^{p_1}}{(x-a)^m}\right]=-m(a_1-a)\frac{e^{-x}dx}{(x-a)^{1+m}(a_1-x)^{m_1}}$$
$$-(a_1-a+p+p_1-1)\frac{e^{-x}dx}{(x-a)^m(a_1-x)^{m_1}}+e^{-x}\frac{(x-a)^p}{(a_1-x)^{m_1}}dx,$$

d'où l'on tire, en intégrant depuis a jusqu'à a_1,

$$m\int_a^{a_1}\frac{e^{-x}dx}{(x-a)^{1+m}(a_1-x)^{m_1}}=\frac{A}{a_1-a}-\left(1+\frac{p+p_1-1}{a_1-a}\right)B+\frac{e^{-a}}{\varphi(a)};$$

de même, si après avoir différentié $e^{-x}\frac{(x-a_1)^{p_1}}{(x-a)^m}$ par rapport à x, et ordonné le résultat suivant les puissances de $x-a$, on intégrait entre les limites a_1 et ∞, on trouverait

$$m\int_{a_1}^{\infty}\frac{e^{-x}dx}{(x-a)^{1+m}(x-a_1)^{m_1}}=\frac{A_1}{a_1-a}-\left(1+\frac{p+p_1-1}{a_1-a}\right)B_1.$$

Par la substitution de ces valeurs aux intégrales, autres que A et A_1,

qui entrent dans l'expression de $\frac{dD}{da}$, on fera disparaître de cette expression le terme qui contient $\varphi(a)$ en dénominateur, et on obtiendra, toutes réductions faites,

$$\frac{dD}{da} = -\left(1 + \frac{p + p_1 - 1}{a_1 - a}\right) D.$$

On aura donc, en intégrant, et en représentant par γ une quantité indépendante de a,

$$(3) \qquad D = \gamma (a_1 - a)^{p + p_1 - 1} e^{-a}.$$

4. Pour calculer γ, nous pouvons faire, dans cette derniere formule, $a = a_1$, ou, ce qui revient au même, remplacer a par $a_1 - \varepsilon$, et faire converger ε vers zéro; or l'expression du déterminant sous forme d'intégrale définie multiple, savoir

$$D = \int_a^{a_1} \int_{a_1}^{\infty} \frac{e^{-x-x_1}(x_1 - x)\,dx\,dx_1}{(x-a)^m (a_1 - x)^{m_1} (x_1 - a)^m (x_1 - a_1)^{m_1}},$$

devient, lorsqu'on pose

$$x = a_1 - (1 - \varepsilon) z, \quad x_1 = a_1 + y,$$

et qu'on assigne à ε une valeur très-petite,

$$E = \varepsilon^{p + p_1 - 1} e^{-2a_1} \int_0^1 \frac{dz}{z^m (1 - z)^{m_1}} \int_0^{\infty} e^{-y} y^{p + p_1 - 1}\,dy,$$

ou bien, en introduisant les fonctions Γ,

$$E = \Gamma(p)\,\Gamma(p_1)\,\varepsilon^{p + p_1 - 1} e^{-2a_1}.$$

Dans les mêmes circonstances, l'équation (3) donne

$$E = \gamma \varepsilon^{p + p_1 - 1} e^{-a_1};$$

on a donc

$$\gamma = \Gamma(p)\,\Gamma(p_1)\,e^{-a_1},$$

et, par conséquent,

$$D = \Gamma(p)\,\Gamma(p_1)\,(a_1 - a)^{p + p_1 - 1} e^{-a - a_1}.$$

5. La formule (2) se trouvant établie, lorsque n est égal à l'unité, il suffit maintenant de faire voir que, si elle est vraie pour tout déter-

minant composé avec n^2 intégrales définies, qui remplissent les conditions voulues, elle le sera encore pour ceux qui en renfermeront $(n+1)^2$. La même conséquence aurait pu se déduire de l'examen du cas particulier où l'on a

$$n = 0,$$

car alors l'expression $\Pi(a, a_1, \ldots, a_n)$, c'est-à-dire le déterminant $\Sigma \pm a^0, a_1^1, \ldots, a_n^n)$, dans lequel les indices supérieurs doivent être pris comme exposants, se réduit à l'unité, et la formule (2) devient évidente. Aussi les développements précédents ont-ils principalement pour but d'éclaircir, par un exemple, la démonstration qui va suivre.

6. Le déterminant proposé ne change pas lorsque, sous le signe *somme* de chaque intégrale définie, on remplace, au numérateur, x par $x - a$; de sorte que l'on a

$$D = \sum \left[\pm \int_a^{a_1} e^{-x} \frac{dx}{\varphi(x)} \int_{a_1}^{a_2} e^{-x} \frac{x-a}{\varphi_1(x)} dx \ldots \int_{a_{n-1}}^{a_n} e^{-x} \frac{(x-a)^{n-1}}{\varphi_{n-1}(x)} dx \int_{a_n}^{\infty} e^{-x} \frac{(x-a)^n}{\varphi_n(x)} dx \right];$$

cette expression revient, en effet, comme la première, à l'intégrale multiple (1). Or, si l'on pose

$$A_i = \int_{a_i}^{a_{i+1}} e^{-x} \frac{(x-a)^n}{\varphi(x)} dx,$$

et qu'on différentie $n - k$ fois par rapport à a, k désignant l'un des nombres entiers 0, 1, 2,..., n, il viendra

$$(4) \quad \frac{d^{n-k} A_i}{da^{n-k}} = (-1)^{n-k+m_1+m_2+\ldots+m_i}(n-m)(n-1-m)\ldots(k+1-m \int_{a_i}^{a_{i+1}} e^{-x} \frac{(x-a)^k}{\varphi_i(x)} dx$$

Le coefficient du second membre de cette égalité varie avec k et avec i, mais il se décompose en deux facteurs

$$\alpha_k = (-1)^{n-k}(n-m)(n-1-m)\ldots(k+1-m)$$

et

$$\beta_i = (-1)^{m_1+m_2+\ldots+m_i},$$

dépendant chacun d'un seul de ces indices; en représentant par R le déterminant

$$R = \sum \left[\pm A \frac{dA_1}{da} \ldots \frac{d^{n-1} A_{n-1}}{da^{n-1}} \frac{d^n A_n}{da^n} \right],$$

et par δ le produit $\alpha\beta\alpha_1\beta_1\ldots\alpha_n\beta_n$, on aura donc

$$R = \delta D.$$

7. L'égalité (4) subsiste pour $k = -1$, tant que a_i est différent de a; elle peut s'écrire

$$(5)\qquad \int_{a_i}^{a_{i+1}} e^{-x}\frac{(x-a)^k}{\varphi(x)}\,dx = \frac{1}{\alpha_{i-1}}\frac{d^{n+i-k}A_i}{da^{n+i-k}};$$

d'ailleurs, si l'on pose

$$\varpi(x) = F(x) + \frac{F(x)\varphi'(x)}{\varphi(x)},$$

on trouvera facilement

$$d\left[\frac{e^{-x}F(x)}{(x-a)\varphi(x)}\right] = \left\{[F'(x) - \varpi(x)](x-a) - F(x)\right\}\frac{e^{-x}dx}{(x-a)^2\varphi(x)},$$

d'où l'on tire, en développant les polynômes $\varpi(x)$, $F(x)$ et $F'(x)$ suivant les puissances de $x-a$, puis en intégrant entre les limites a_i et a_{i+1}, dont la première est encore supposée différente de a,

$$(6)\qquad \sum_{k=0}^{k=n+i}\left[\frac{(k+1)\varpi^{(k)}(a) - kF^{(k+1)}(a)}{\Gamma(k+2)}\int_{a_i}^{a_{i+1}} e^{-x}\frac{(x-a)^k}{\varphi(x)}\,dx\right] = 0.$$

Enfin, si l'on remplace l'intégrale de la parenthèse par l'expression (5), on obtiendra l'équation différentielle linéaire de l'ordre $n+1$,

$$(7)\qquad \sum_{k=0}^{k=n+i}\left[\frac{(k+1)\varpi^{(k)}(a) - kF^{(k+1)}(a)}{\alpha_{i-1}\Gamma(k+2)}\frac{d^{n+i-k}A_i}{da^{n+i-k}}\right] = 0,$$

à laquelle satisfont $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Je dis qu'il en est de même de A_0; en effet, lorsque a_i est égal à a, l'équation (5) a lieu pour $k = 1, 2, \ldots, n$; mais, si l'on y fait $k = 0$, il faut ajouter à son second membre $\frac{1}{m\varphi(a)}$, et, par conséquent, $\frac{e^{-a}\varpi(a)}{m\varphi(a)}$ au premier membre de l'équation (7). D'un autre côté, ce premier membre doit être diminué de $\frac{e^{-a}F'(a)}{\varphi(a)}$, comme celui de l'équation (6); or il est facile de voir que

ces deux quantités, qui seraient nulles d'elles-mêmes pour $m < 0$, mais infinies pour $m > 0$, se détruisent mutuellement [*].

8. Cela posé, en mettant successivement $A, A_1, \ldots, A_n$, au lieu de A_r, dans l'équation (7), on aura, entre les $n+2$ coefficients de ses différents termes, $n+1$ équations du premier degré, desquelles on pourra tirer les rapports de ces coefficients à l'un d'entre eux, en fonction de $A, A_1, \ldots, A_n$ et des dérivées de ces quantités par rapport à a. En particulier, le rapport P du coefficient du second terme à celui du premier sera donné par une fraction ayant pour dénominateur R, et pour numérateur ce même déterminant, dans lequel on aurait mis, au lieu des dérivées de l'ordre n, les dérivées de l'ordre $n+1$ changées de signe. Le résultat de cette substitution ne diffère de $-\frac{dR}{da}$ que par une somme de termes qui se détruisent deux à deux, puisqu'on peut les grouper en n déterminants, dans chacun desquels deux lignes verticales ou deux lignes horizontales présenteraient une composition identique. On a donc

$$P = -\frac{1}{R}\frac{dR}{da},$$

ou bien, en remplaçant R par θD, et observant que θ est indépendant de a,

$$P = -\frac{1}{D}\frac{dD}{da};$$

si l'on intègre par rapport à a, et qu'on désigne par γ une fonction encore inconnue de $a_1, a_2, \ldots, a_n$, il viendra

$$D = \gamma e^{-\int P\,da}.$$

[*] Toutes les intégrales de la forme

$$\int_a^b e^{-x}\,\frac{(x-a)^k}{\varphi(x)}\,dx$$

peuvent s'obtenir linéairement au moyen de n d'entre elles, pour lesquelles k est l'un des nombres $0, 1, 2, \ldots, n$: celles-ci n'existent jamais sous forme finie; elles fournissent, comme les transcendantes dont la différentielle est algébrique, les intégrales complètes d'autant d'équations différentielles linéaires avec second membre. Voir, pour ces dernières transcendantes, un Mémoire de M. Hermite, tome IX du présent Journal.

9. L'équation (7) peut s'écrire

$$\frac{\varpi(a)}{(n-m)(n-1-m)\ldots(1-m)m}\frac{d^{n-m}A_1}{da^{n-m}}$$
$$-\frac{2\varpi'(a)-F''(a)}{2(n-m)(n-1-m)\ldots(1-m)}\frac{d^nA_1}{da^n}-\ldots=0$$

de sorte que l'on a

$$P=m\frac{2\varpi'(a)-F''(a)}{2\varpi(a)},$$

c'est-à-dire

$$P=1+\frac{p+p_1-1}{a_1-a}+\frac{p+p_2-1}{a_2-a}+\ldots+\frac{p+p_n-1}{a_n-a},$$

et l'expression de D devient, lorsqu'on y introduit cette valeur de P,

$$(8)\qquad D=\gamma(a_1-a)^{p+p_1-1}(a_2-a)^{p+p_2-1}\ldots(a_n-a)^{p+p_n-1}e^{-a}.$$

10. Représentons par Δ la limite vers laquelle converge le rapport de D à $(a_1-a)^{p+p_1-1}$, lorsque a s'approche indéfiniment de a_1; puisque γ est indépendant de a, nous aurons, en vertu de l'équation (8),

$$(9)\qquad \gamma(a_2-a_1)^{p+p_2-1}\ldots(a_n-a_1)^{p+p_n-1}e^{-a_1}=\Delta.$$

Pour calculer Δ, on peut recourir à l'expression du déterminant sous forme d'intégrale définie multiple; si l'on pose, dans cette expression,

$$a=a_1-\varepsilon,\quad x=a_1-\varepsilon(1-z),$$

afin de mettre en évidence le facteur ε^{p+p_1-1}, et si, après avoir supprimé ce facteur, on fait $\varepsilon=0$, on trouvera, en introduisant les intégrales eulériennes de deuxième espèce,

$$(10)\qquad \Delta=\frac{\Gamma(p+\Gamma+p_1)}{\Gamma(p+p_1)}(a_2-a_1)^{p_2-1}(a_3-a_1)^{p_3-1}\ldots(a_n-a_1)^{p_n-1}e^{-a_1}D_1,$$

nous désignons ici par D_1 un déterminant analogue à D, et qui correspondrait à la composition suivante de $\varphi_i(x)$,

$$(x-a_1)^{m_1-m_2-1}(x-a_2)^{m_2}\ldots(x-a_i)^{m_i}(a_{i+1}-x)^{m_{i+1}}\ldots(a_n-x)^{m_n}.$$

Par hypothèse, on peut appliquer à ce déterminant la formule (2); il

suffit d'y omettre les facteurs $\Gamma(p)$, $F'(a)$ et e^{-a}, puis d'y remplacer p_i par $p+p_i$, $F'_i(a_i)$ par $\frac{F'_i(a_i)}{a_i-a}$, et $\Pi(a, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ par $\Pi(a_1, a_2, \ldots, a_n)$; elle donne alors

$$(11)\qquad D_1 = \Gamma(p+p_1)\Gamma(p_2)\ldots\Gamma(p_n)\frac{F'_1(a_1)^{p+p_1}F'_2(a_2)^{p_2}\ldots F'_n(a_n)^{p_n}e^{-a_1-a_2-\ldots-a_n}}{(a_1-a)^{p+p_1}(a_2-a)^{p_2}\ldots(a_n-a)^{p_n}\Pi(a, a_1, \ldots, a_n)}.$$

Si maintenant on multiplie membre à membre les équations (8), (9), (10) et (11), on obtiendra la relation qu'il s'agissait de démontrer.

11. Lorsque les exposants $m, m_1, \ldots, m_n$ sont tous égaux à $\frac{1}{2}$, cette relation devient

$$D = \pi^{\frac{n+1}{2}} e^{-a-a_1-\ldots-a_n}.$$

En faisant dans cette dernière

$$n = 2, \quad a = 0, \quad a_1 = b^2, \quad a_2 = c^2, \quad x = u^2,$$

on retrouve celle qui a été donnée par M. William Roberts.

NOTE

SUR UN THÉORÈME DE LA THÉORIE DES NOMBRES;

PAR M. J.-A. SERRET.

Communiquée à la Société Philomatique le 12 avril 1851.

On sait par quelle brillante analyse M. Lejeune-Dirichlet est parvenu à démontrer que :

Toute progression par différence dont le premier terme et la raison sont premiers entre eux renferme une infinité de nombres premiers; ou, en d'autres termes, que :

La formule $ax + b$, où a et b sont des entiers donnés sans diviseurs communs, renferme une infinité de nombres premiers.

Peut-être n'est-il pas sans intérêt de remarquer que, dans le cas d'une progression dont la raison est 8 ou 12, le théorème de l'illustre géomètre allemand peut se déduire des principes les plus élémentaires de la théorie des nombres. C'est ce que je me propose de montrer dans cette Note.

Soient N un nombre quelconque, et

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ldots,\ p$$

les nombres premiers qui ne surpassent pas N : posons

$$\begin{aligned}
A &= (2.3.5.7.11\ldots p)^4 + 1,\\
B &= (3.5.7.11\ldots p)^2 + 2,\\
C &= (3.5.7.11\ldots p)^2 + 2^2,\\
D &= (3.5.7.11\ldots p)^2 - 2,\\
E &= (2.3.5.7.11\ldots p)^4 - (2.3.5.7.11\ldots p)^2 + 1,\\
F &= (2.5.7.11\ldots p)^2 + 1,\\
G &= (2.5.7.11\ldots p)^2 + 3,\\
H &= 3(2.5.7.11\ldots p)^2 - 1.
\end{aligned}$$

1°. A est de la forme $a^4 + 1 = (a^2 - 1)^2 + 2a^2$, c'est-à-dire de l'une et de l'autre des deux formes $t^2 + u^2$ et $t^2 + 2u^2$; il s'ensuit que les facteurs premiers de A ont ces mêmes formes quadratiques, et, par suite, qu'ils ont tous la forme linéaire $8x + 1$.

2°. B est de la forme $t^2 + 2u^2$; ses facteurs premiers ont, par suite, cette même forme et sont de l'une ou de l'autre des formes linéaires $8x + 1$ et $8x + 3$. D'ailleurs B est de la forme $8x + 3$: donc l'un au moins de ses facteurs premiers a cette même forme $8x + 3$.

3°. C est de la forme $t^2 + u^2$; ses facteurs premiers ont cette même forme et sont de l'une ou de l'autre des deux formes linéaires $8x + 1$ et $8x + 5$; mais comme C a la forme $8x + 5$, un au moins de ses facteurs premiers a aussi la forme $8x + 5$.

4°. D est de la forme $t^2 - 2u^2$; ses facteurs premiers ont cette même forme et sont de l'une ou de l'autre des deux formes linéaires $8x + 1$ et $8x + 7$; mais comme D a la forme $8x + 7$, un au moins de ses facteurs premiers a lui-même la forme $8x + 7$.

5°. E est de la forme $a^4 - a^2 + 1 = (a^2 - 1)^2 + a^2 = (a^2 - 1)^2 - 3a^2$, c'est-à-dire de l'une et de l'autre des deux formes $t^2 + u^2$ et $t^2 - 3u^2$; il s'ensuit que les facteurs premiers de E ont ces mêmes formes. Or ces formes quadratiques ne peuvent appartenir en même temps qu'aux nombres $12x + 1$; donc tous les facteurs premiers de E sont de la forme $12x + 1$.

6°. F est de la forme $t^2 + u^2$; ses facteurs premiers ont cette même forme et sont de l'une ou de l'autre des deux formes linéaires $12x + 1$, $12x + 5$. En outre, la première partie de F est le carré du produit de tous les nombres premiers jusqu'à p, 3 excepté, produit qui est de la forme $6x \pm 2$; il s'ensuit que F a la forme linéaire $12x + 5$ et que l'un au moins de ses facteurs premiers a cette même forme.

7°. G est de la forme $t^2 + 3u^2$; ses facteurs premiers ont cette même forme quadratique et sont de l'une ou de l'autre des deux formes linéaires $12x + 1$ et $12x + 7$; mais comme G est de la forme $12x + 7$, l'un de ses facteurs premiers a nécessairement cette même forme $12x + 7$.

8°. H est de la forme $3t^2 - u^2$: ses facteurs premiers sont de l'une ou de l'autre des deux formes $3t^2 - u^2$ et $t^2 - 3u^2$; ils sont, par suite, de l'une des formes linéaires $12x + 1$ et $12x + 11$. D'ailleurs H a la forme $12x + 11$; donc l'un de ses facteurs premiers a aussi cette forme.

De ce qui précède et de ce que les facteurs premiers des nombres A, B, C, D, E, F, G, H sont évidemment tous supérieurs à N, il résulte que chacune des huit formules

$$8x + 1, \quad 8x + 3, \quad 8x + 5, \quad 8x + 7,$$
$$12x + 1, \quad 12x + 5, \quad 12x + 7, \quad 12x + 11,$$

renferme un nombre premier plus grand que N : en d'autres termes, *chacune des huit formules dont il s'agit renferme une infinité de nombres premiers.*

Les considérations qui précèdent s'appliquent encore à la formule $10x + 9$. Conservons, en effet, nos notations et considérons le nombre

$$5.(2.3.7.11\ldots p)^2 - 1 :$$

ses diviseurs sont de la forme quadratique $5t^2 - u^2$, et, par suite, de l'une des formes linéaires $10x + 1$, $10x + 9$: mais le nombre dont il s'agit est de la forme $10x + 9$; donc l'un au moins de ses facteurs premiers a la même forme. On conclut de là que la formule $10x + 9$ renferme un nombre premier plus grand que N, ou qu'elle renferme une infinité de nombres premiers.

M. Lebesgue a remarqué (tome VIII de ce Journal, page 51) que le théorème sur la progression par différence peut se déduire d'un théorème connu d'Euler, dans le cas particulier où la raison est un nombre premier et où le premier terme est l'unité. Par un raisonnement du même genre, on peut prouver plus généralement que :

Toute progression par différence qui commence par l'unité renferme une infinité de nombres premiers.

On sait, en effet (*voir* LEGENDRE, *Théorie des Nombres*, tome Ier, page 222), que les diviseurs *propres* de $a^n + 1$ sont de la forme $2nx + 1$. J'appelle diviseurs propres de $a^n + 1$ ceux qui ne divisent

en même temps aucun nombre tel que $a^{n'}+1$ où n' désigne le quotient de n par un de ses diviseurs impairs. Cela posé, il est très-facile d'établir que a^n+1 a au moins un facteur premier propre. Il n'y a qu'une seule exception : c'est le cas de $a=2$ et $n=3$. On déduit facilement de là le théorème en question. Car soient

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ldots,\ p$$

les nombres premiers qui ne surpassent pas un nombre donné N; le nombre

$$(2.3.5.7.11\ldots p)^n+1$$

admet un facteur premier propre, lequel est de la forme $2nx+1$. D'ailleurs ce facteur est nécessairement plus grand que N; donc la formule $2nx+1$ renferme un nombre premier plus grand que N, et, par suite, elle renferme une infinité de nombres premiers.

DÉMONSTRATION

D'un théorème de M. Sylvester, *relatif à la décomposition d'un produit de deux déterminants;*

Par M. FAÀ DE BRUNO.

Ce théorème a été publié par M. Sylvester, dans le *Philosophical Magazine* (août 1851). Je vais en donner ici une démonstration nouvelle, qui me paraît plus simple et plus claire que celle dont l'auteur s'est servi. Voici le théorème :

Étant donnés deux déterminants A *et* B *de* n^2 *lettres chacun, si l'on partage l'un des deux, A par exemple, d'une manière invariable en deux parties quelconques, contenant l'une* p *et l'autre* $q = n - p$ *colonnes, et si l'on décompose l'autre déterminant* B *de toutes les manières possibles, en deux parties contenant de même l'une* p *et l'autre* q *colonnes, le produit* AB *des deux déterminants sera égal à la somme des produits des nouveaux déterminants conjugués, qui résulteront en échangeant constamment une des parties fixes de* A *avec la partie variable correspondante de* B.

Ainsi, par exemple,

$$\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & \beta \\ p & \delta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & n \\ \gamma & q \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m & \alpha \\ p & \gamma \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} n & \beta \\ q & \delta \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} m & n & p \\ m' & n' & p' \\ m'' & n'' & p'' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & n & \gamma \\ m' & n' & \gamma' \\ m'' & n'' & \gamma'' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta & p \\ \alpha' & \beta' & p' \\ \alpha'' & \beta'' & p'' \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} m & n & \beta \\ m' & n' & \beta' \\ m'' & n'' & \beta'' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & p & \gamma \\ \alpha' & p' & \gamma' \\ \alpha'' & p'' & \gamma'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m & n & \alpha \\ m' & n' & \alpha' \\ m'' & n'' & \alpha'' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} p & \beta & \gamma \\ p' & \beta' & \gamma' \\ p'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

Démonstration. Le produit des deux déterminants sera

$$1)\qquad AB = \sum\left(\pm a_1^{\varphi_1} a_2^{\varphi_2} a_3^{\varphi_3} \ldots a_p^{\varphi_p} \ldots a_n^{\varphi_n}\right) \sum\left(\pm b_1^{\psi_1} b_2^{\psi_2} b_3^{\psi_3} \ldots b_p^{\psi_p} \ldots b_n^{\psi_n}\right).$$

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ et $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ étant l'un quelconque des

$$n(n-1)\ldots 3.2.1 = [n]$$

arrangements n à n, que l'on peut faire avec les indices $1, 2, 3, \ldots n$, qui servent, avec les indices inférieurs, à caractériser chaque lettre du déterminant. Maintenant, un quelconque des groupes formés par le produit de deux déterminants conjugués, sera

$$2)\qquad \sum\left(\pm a_1^{\varphi_1} a_2^{\varphi_2} \ldots a_p^{\varphi_p} b_{\theta_{p+1}}^{\varphi_{p+1}} b_{\theta_{p+2}}^{\varphi_{p+2}} \ldots b_{\theta_n}^{\varphi_n}\right) \sum\left(\pm b_{\theta_1}^{\psi_1} b_{\theta_2}^{\psi_2} \ldots b_{\theta_p}^{\psi_p} a_{p+1}^{\psi_{p+1}} a_{p+2}^{\psi_{p+2}} \ldots a^{\psi_n}\right),$$

en se servant des indices $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ pour désigner une quelconque des distributions des indices inférieurs du déterminant B, qui aura lieu d'après le partage indiqué ci-dessus. Un terme quelconque de la somme de ces groupes pourra donc s'écrire ainsi :

$$3)\qquad a_1^{\varphi_1} a_2^{\varphi_2} \ldots a_p^{\varphi_p} a_{p+1}^{\psi_{p+1}} a_{p+2}^{\psi_{p+2}} \ldots a_n^{\psi_n} . b_{\theta_1}^{\psi_1} b_{\theta_2}^{\psi_2} \ldots b_{\theta_p}^{\psi_p} b_{\theta_{p+1}}^{\varphi_{p+1}} b_{\theta_{p+2}}^{\varphi_{p+2}} \ldots b_{\theta_n}^{\varphi_p}.$$

Or, tant qu'un des indices ψ ne coïncidera pas avec un des indices φ, ce terme fera partie de ceux de AB, et il est aisé de voir que dans chacun des groupes il y aura $[n][p][q]$ de ces termes. Maintenant, comme il y a $\left[\frac{n}{p}\right]$ groupes, $\left[\frac{n}{p}\right]$ désignant le nombre des combinaisons de n lettres prises p à p, lequel est, comme on sait, égal à $\frac{[n]}{[p][q]}$, nous aurons en tout

$$[n][p][q]\left[\frac{n}{p}\right] = [n]^2$$

termes, ce qui doit être. Mais lorsque deux seulement des indices supérieurs seront égaux, par exemple

$$\psi_i = \varphi_{p+h},$$

il existera évidemment un autre terme où, au lieu d'avoir

$$\ldots\ldots b_{\theta_i}^{\psi_i} \ldots\ldots b_{\theta_{p+h}}^{\varphi_{p+h}},$$

on aura

$$\ldots\ldots b_{\varsigma_{p-h}}^{\varsigma_1} \ldots\ldots b_{\varsigma_1}^{\varsigma_{p-h}};$$

tout le reste demeurant de même, car, par suite du partage de B en deux parties quelconques, il existera une combinaison (i) des indices ς qui ne différera de celle (h) que par l'échange d'une colonne (ς_i) avec une colonne (ς_{p-h}). Or nous savons qu'un simple échange entre deux indices amène un changement de signe dans les termes; donc tous les termes de cette nature se détruiront mutuellement, et il ne restera que les termes qui reproduiront le produit AB identiquement.

DÉMONSTRATION

D'un théorème relatif à la réduction des fonctions homogènes à deux lettres à leur forme canonique;

PAR M. FAÀ DE BRUNO.

Étant donnée une fonction homogène à plusieurs lettres de degré quelconque, on peut généralement se proposer de la mettre sous une forme plus simple et plus concise, telle que la somme de puissances de même degré de fonctions linéaires des mêmes lettres. En nous bornant au cas des fonctions de deux lettres, dont le type général est

$$a_0 x^m + m a_1 x^{m-1} y + \frac{m(m-1)}{1.2} a_2 x^{m-2} y^2 + \ldots$$
$$+ m a_{m-1} x y^{m-1} + a_m y^m,$$

on reconnaît aisément que, par suite des conditions auxquelles il faut satisfaire, ces fonctions admettent l'une des deux formes

$$(\alpha_0 x + \beta_0 y)^m + (\alpha_1 x + \beta_1 y)^m + \ldots + \left(\alpha_{\frac{m-1}{2}} x + \beta_{\frac{m-1}{2}} y\right)^m,$$
$$(\alpha_0 x + \beta_0 y)^m + (\alpha_1 x + \beta_1 y)^m + \ldots$$
$$+ A(\alpha_0 x + \alpha_1 y)^2 (\alpha_1 x + \beta_1 y)^2 \ldots \left(\alpha_{\frac{m}{2}} x + \beta_{\frac{m}{2}} y\right)^2,$$

selon que m sera impair ou pair. Ce sujet a été abordé dernièrement par M. Sylvester, géomètre anglais très-profond, qui a bien voulu me communiquer le résultat obtenu par lui sur les fonctions du cinquième degré, mais sans m'en donner la démonstration. Ayant essayé de le retrouver moi-même, j'ai été conduit tout naturellement à la démonstration du théorème pour un degré quelconque impair, que j'ose présenter ici à la bienveillance des lecteurs.

En appelant, suivant la dénomination de M. Hermite et de M. Syl-

vester, *forme canonique* l'une des deux formes que je viens d'écrire, l'énoncé du théorème est celui-ci :

Une fonction homogène à deux lettres de degré quelconque impair $2n+1$ peut être réduite à sa forme canonique par la résolution d'une équation de degré $n+1$.

Soit

$$(1)\quad a_0 x^{2n+1} + \frac{2n+1}{1} a_1 x^{2n} y + \frac{(2n+1).2n}{1.2} a_2 x^{2n-1} y^2 + \ldots + \frac{2n+1}{1} a_{2n} x y^{2n} + a_{2n+1} y^{2n+1}$$

une telle fonction, et

$$(2)\quad p_0(x+\alpha_0 y)^{2n+1} + p_1(x+\alpha_1 y)^{2n+1} + p_2(x+\alpha_2 y)^{2n+1} + \ldots + p_n(x+\alpha_n y)^{2n+1}$$

sa forme canonique, où $p_0, p_1, \ldots, p_n$; $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont les inconnues à déterminer. Nous aurons évidemment les $2n+2$ équations suivantes :

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} p_0 + p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1} + p_n = a_0, \\ p_0\alpha_0 + p_1\alpha_1 + p_2\alpha_2 + \ldots + p_{n-1}\alpha_{n-1} + p_n\alpha_n = a_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_0\alpha_0^{2n} + p_1\alpha_1^{2n} + p_2\alpha_2^{2n} + \ldots + p_{n-1}\alpha_{n-1}^{2n} + p_n\alpha_n^{2n} = a_{2n}, \\ p_0\alpha_0^{2n+1} + p_1\alpha_1^{2n+1} + p_2\alpha_2^{2n+1} + \ldots + p_{n-1}\alpha_{n-1}^{2n+1} + p_n\alpha_n^{2n+1} = a_{2n+1}. \end{array}\right.$$

Pour effectuer l'élimination, j'ajoute chacune de ces équations à la précédente multipliée par un facteur indéterminé λ. J'ai ainsi, en posant

$$p' = p(\lambda + \alpha),$$

un système de $2n+1$ équations seulement, savoir :

$$p'_0 + p'_1 + p'_2 + \ldots + p'_{n-1} + p'_n = a_0\lambda + a_1,$$

$$p'_0\alpha_0 + p'_1\alpha_1 + p'_2\alpha_2 + \ldots + p'_{n-1}\alpha_{n-1} + p'_n\alpha_n = a_1\lambda + a_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$p'_0\alpha_0^{2n-1} + p'_1\alpha_1^{2n-1} + p'_2\alpha_2^{2n-1} + \ldots + p_{n-1}\alpha_{n-1}^{2n-1} + p'_n\alpha_n^{2n-1} = a_{2n-1}\lambda + a_{2n},$$

$$p'_0\alpha_0^{2n} + p'_1\alpha_1^{2n} + p'_2\alpha_2^{2n} + \ldots + p'_{n-1}\alpha_{n-1}^{2n} + p'_n\alpha_n^{2n} = a_{2n}\lambda + a_{2n+1}.$$

Opérant de la même manière sur ce système, et continuant encore jusqu'à ce que l'on arrive à poser

$$p^n = p(\lambda + \alpha)^{n+1},$$

on aura en dernier lieu :

$$(4)\quad \begin{cases} p_0^n + p_1^n + \ldots + p_n^n = a_0 \lambda^{n+1} + \frac{(n+1)}{1} a_1 \lambda^n + \frac{(n+1)(n)}{1.2} a_2 \lambda^{n-2} + \ldots + a_n, \\ p_0^n \alpha_0 + p_1^n \alpha_1 + \ldots + p_n^n \alpha_n = a_1 \lambda^{n+1} + \frac{(n+1)}{1} a_2 \lambda^n + \frac{(n+1)(n)}{1.2} a_3 \lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_0^n \alpha_0^n + p_1^n \alpha_1^n + \ldots + p_n^n \alpha_n^n = a_n \lambda^{n+1} + \frac{(n+1)}{1} a_{n-1} \lambda^n + \frac{(n+1)(n)}{1.2} a_{n-2} \lambda^{n-1} + \ldots + a_{2n+1}. \end{cases}$$

Ces $n+1$ équations (4) formeront, avec les $n+1$ premières du système (3), un ensemble de $2n+2$ équations qui va nous conduire à notre but. Soit, en effet, R le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, \ldots, & 1, \\ \alpha_0, & \alpha_1, \ldots, & \alpha_n, \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_0^n, & \alpha_1^n, \ldots, & \alpha_n^n; \end{vmatrix}$$

les $n+1$ premières équations (3) et les équations (4) donneront

$$(5)\quad \begin{cases} \mathrm{R}\, p_0 = \mathrm{A}_0, \quad \mathrm{R}\, p_1 = \mathrm{A}_1, \ldots, \quad \mathrm{R}\, p_n = \mathrm{A}_n, \\ \mathrm{R}\, p_0^{(n)} = \mathrm{L}_0, \quad \mathrm{R}\, p_1^{(n)} = \mathrm{L}_1, \ldots, \quad \mathrm{R}\, p_n^{(n)} = \mathrm{L}_n, \end{cases}$$

ou, en substituant à $p^{(n)}$ sa valeur,

$$(6)\quad \mathrm{A}_0(\lambda + \alpha_0)^{n+1} = \mathrm{L}_0 \quad \mathrm{A}_1(\lambda + \alpha_1)^{n+1} = \mathrm{L}_1, \ldots \quad \mathrm{A}_n(\lambda + \alpha_n)^{n+1} = \mathrm{L}_n,$$

équations dans lesquelles

$$\mathrm{A}_0 = \mathrm{B}_0 a_0 + \mathrm{B}_1 a_1 + \mathrm{B}_2 a_2 + \ldots + \mathrm{B}_n a_n,$$
$$\mathrm{A}_1 = \mathrm{B}'_0 a_0 + \mathrm{B}'_1 a_1 + \mathrm{B}'_2 a_2 + \ldots + \mathrm{B}'_n a_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathrm{A}_n = \mathrm{B}_0^n a_0 + \mathrm{B}_1^n a_1 + \mathrm{B}_2^n a_2 + \ldots + \mathrm{B}_n^n a_n.$$

$\mathrm{B}_p^{(q)}$ étant, en général, un déterminant partiel de R.

Remplaçons dans les équations (6) $\mathrm{L}_0, \mathrm{L}_1, \ldots, \mathrm{L}_n$ par leurs valeurs.

très-aisées à déterminer; il viendra un système de $n+1$ équations, dont le type sera

$$\begin{aligned}
A_i(\lambda+\alpha_i)^{n+1} = A_i\lambda^{n+1} &+ (n+1)\lambda^n(B_0^i a_1 + B_1^i a_2 + B_2^i a_3 + \ldots + B_n^i a_{n+1}\\
&+ \frac{n+1}{1}\lambda^{n-1}(B_0^i a_2 + B_1^i a_3 + B_2^i a_4 + \ldots + B_n^i a_{n+2}\\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+ (n+1)\lambda\, B_0^i a_n + B_1^i a_{n+1} + B_2^i a_{n+2} + \ldots + B_n^i a_{2n}\\
&+ B_0^i a_{n+1} + B_1^i a_{n+2} + B_2^i a_{n+3} + \ldots + B_n^i a_{2n+1}.
\end{aligned}$$

Ces équations devant avoir lieu par identité, on aura, en comparant les coefficients des mêmes puissances de λ,

$$A_i\alpha_i = B_0^i a_1 + B_1^i a_2 + B_2^i a_3 + \ldots + B_n^i a_{n+1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_i\alpha_i^l = B_0^i a_l + B_1^i a_{l+1} + B_{l+2}^i a_{l+2} + \ldots + B_n^i a_{n+l},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_i\alpha_i^{n+1} = B_0^i a_{n+1} + B_1^i a_{n+2} + B_2^i a_{n+3} + \ldots + B_n^i a_{2n+1}.$$

En réunissant le tout dans un seul membre, eu égard à la valeur de A_i, nous aurons enfin

$$(9)\left\{\begin{aligned}
&B_0^{(i)}(a_0\alpha_i - a_1) + B_1^i(a_1\alpha_i - a_2) + B_2^i(a_2\alpha_i - a_3) + \ldots + B_n^{(i)}(a_n\alpha_i - a_{n+1}) = 0,\\
&B_0^{(i)}(a_0\alpha_i - a_2) + B_1^i(a_1\alpha^2 - a_3) + B_2^i(a_2\alpha_i^2 - a^4) + \ldots + B_n^i(a_n\alpha_i^2 - a_{n+2}) = 0,\\
&B_0^{(i)}(a_0\alpha_i^3 - a_3) + B_1^i(a_1\alpha_i^3 - a_4) + B_2^i(a_2\alpha^3 - a_5) + \ldots + B_n^i(a_n\alpha_i^2 - a_{n+3}) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&B_0^{(i)}(a_0\alpha_i^{n+1} - a_{n+1}) + B_1^i(a_1\alpha_i^{n+1} - a_{n+2}) + B_2^i(a_2\alpha_i^{n+1} - a_{n+3}) + \ldots\\
&\qquad + B_n^i(a_n\alpha_i^{n+1} - a_{2n+1}) = 0.
\end{aligned}\right.$$

En vertu donc d'un principe connu, les quantités inconnues α_0, α_1, ..

$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ seront les racines de l'équation fournie par le déterminant

$$(10) \quad 0 = \begin{vmatrix} a_0 x - a_1, & a_1 x - a_2, \ldots, & a_n x - a_{n+1} \\ a_0 x^2 - a_2, & a_1 x^2 - a_3, \ldots, & a_n x^2 - a_{n+2} \\ a_0 x^3 - a_3, & a_1 x^3 - a_4, \ldots, & a_n x^3 - a_{n+3} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_0 x^{n+1} - a_{n+1}, & a_1 x^{n+1} - a_{n+2}, \ldots, & a_n x^{n+1} - a_{2n+1} \end{vmatrix}.$$

Cette équation a l'apparence d'être du $\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}^{ième}$ degré; mais il est aisé de démontrer qu'elle n'est réellement que du $(n+1)^{ième}$. Il suffira, pour cela, de mettre ce déterminant sous une autre forme plus explicite, qui aura l'avantage de présenter la démonstration elle-même par sa seule inspection et de faciliter le développement des opérations, dans le cas où l'on veuille les effectuer. Posons $x = \frac{1}{y}$: le déterminant acquerra le facteur $1 : y^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$, que nous négligerons pour un instant, et alors nous aurons à considérer le déterminant suivant :

$$(11) \quad \begin{vmatrix} a_0 - a_1 y, & a_1 - a_2 y, \ldots, & a_n - a_{n+1} y \\ a_0 - a_2 y^2, & a_1 - a_3 y^2, \ldots, & a_n - a_{n+2} y \\ a_0 - a_3 y^3, & a_1 - a_4 y^3, \ldots, & a_4 - a_{n+3} y \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_0 - a_{n+1} y^{n+1}, & a_1 - a_{n+2} y^{n+1} \ldots, & a_n - a_{2n+1} y^{n+1} \end{vmatrix}$$

Comme il y $n+1$ colonnes verticales, chacune composée de deux, le déterminant pourra se décomposer en 2^{n+1} déterminants partiels dont plusieurs s'annuleront par la seule présence de deux lignes verticales égales $(a_0, a_1, \ldots)$. Pour trouver le nombre de ceux-ci, soit s' le nombre de ceux qui se détruisent dans un système de $n+1-i$ colonnes verticales; on aura les équations suivantes :

$$(12) \quad \begin{cases} s = 2s' + n, \\ s' = 2s'' + n + 1, \\ s'' = 2s''' + n + 2, \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

qui donneront, toutes réductions faites,

$$s = 2^{n+1} - (n+2).$$

Le nombre donc des déterminants partiels restants sera $n+2$. Un de ces déterminants sera celui composé des colonnes contenant toutes y, et qui sera égal à

$$(13)\quad (-1)^{n+1} y^{\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}} \begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3, \ldots, & a_n, & a_{n+1} \\ a_2, & a_3, & a_4, \ldots, & a_{n+1}, & a_{n+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n, & a_{n+1}, & a_{n+2}, \ldots, & a_{2n-1}, & a_{2n} \\ a_{n+1}, & a_{n+2}, & a_{n+3}, \ldots, & a_{2n}, & a_{2n+1} \end{vmatrix}.$$

Les autres $n+1$ déterminants seront formés chacun d'une des $n+1$ lignes verticales (a_i) combinée avec les n lignes contenant y et appartenant aux autres colonnes doubles en dehors de celle où se trouve la ligne a_i. Un quelconque de ces déterminants sera

$$(-1)^{n+i} a_i \begin{vmatrix} 1, & a_1 y, & a_2 y, \ldots, & a_i y, & a_{i+1} y, \ldots, & a_{n+1} y \\ 1, & a_2 y^2, & a_3 y^2, \ldots, & a_{i+1} y^2, & a_{i+2} y^2, \ldots, & a_{n+2} y^2 \\ 1, & a_3 y^3, & a_4 y^3, \ldots, & a_{i+2} y^3, & a_{i+3} y^3, \ldots, & a_{n+3} y^3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1, & a_n y^n, & a_{n+1} y^n, \ldots, & a_{n+i-1} y^n, & a_{n+i} y^n, \ldots, & a_{2n} y^n \\ 1, & a_{n+1} y^{n+1}, & a_{n+2} y^{n+1}, \ldots, & a_{n+i} y^{n+1}, & a_{n+i+1} y^{n+1}, \ldots, & a_{2n+1} y^{n+1} \end{vmatrix}.$$

ou bien, en multipliant et en divisant convenablement par $y^{\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}}$,

$$(-1)^{n+i} a_i y^{\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}} \begin{vmatrix} \frac{1}{y}, & a_1, & a_2, \ldots, & a_i, & a_{i+1}, \ldots, & a_{n+1} \\ \frac{1}{y^2}, & a_2, & a_3, \ldots, & a_{i+1}, & a_{i+2}, & a_{n+2} \\ \frac{1}{y^3}, & a_3, & a_4, \ldots, & a_{i+2}, & a_{i+3}, \ldots, & a_{n+3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{1}{y^n}, & a_n, & a_{n+1}, \ldots, & a_{n+i-1}, & a_{n+i}, \ldots, & a_{2n} \\ \frac{1}{y^{n+1}}, & a_{n+1}, & a_{n+2}, \ldots, & a_{n+i}, & a_{n+i+1}, \ldots, & a_{2n+1} \end{vmatrix}.$$

En nous rappelant maintenant que nous avions le facteur $1 : y^{\frac{(n-1)(n+2)}{2}}$ attaché au déterminant entier, et en substituant à y sa valeur, nous verrons que l'équation (10) pourra se mettre sous la forme

$$(15)\quad \left\{ \begin{aligned} 0 = &-\begin{vmatrix} a_1, & a_2, \ldots, & a_{n+1} \\ a_2, & a_3, \ldots, & a_{n+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n, & a_{n+1}, \ldots, & a_{2n} \\ a_{n+1}, & a_{n+2}, \ldots, & a_{2n+1} \end{vmatrix} \\ &+\sum_{i=1}^{i=n} (-1)^i a_i \begin{vmatrix} x, & a_1, & a_2, \ldots, & a_i, & a_{i+1}, \ldots, & a_{n+1} \\ x^2, & a_2, & a_3, \ldots, & a_{i+1}, & a_{i+2}, \ldots, & a_{n+2} \\ x^3, & a_3, & a_4, \ldots, & a_{i+2}, & a_{i+3}, \ldots, & a_{n+3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x^n, & a_n, & a_{n+1}, \ldots, & a_{n+i-1}, & a_{n+i}, \ldots, & a_{2n} \\ x^{n+1}, & a_{n+1}, & a_{n+2}, \ldots, & a_{n+i}, & a_{n+i+1}, \ldots, & a_{2n+1} \end{vmatrix}, \end{aligned} \right.$$

qui prouve évidemment ce que nous avions annoncé sur son degré.

Lorsqu'on aura trouvé, au moyen de la résolution de cette équation, les valeurs de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, les $(n+1)$ premières équations (5) feront connaître celles de $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Le théorème que nous voulions établir se trouve donc démontré.

Soit, comme exemple, la fonction

$$(16)\qquad ax^5 + 5bx^4y + 10cx^3y^2 + 10dx^2y^3 + 5exy^4 + fy^5,$$

dont la forme canonique est

$$(17)\qquad p(x+\alpha y)^5 + q(x+\beta y)^5 + r(x+\gamma y)^5;$$

α, β, γ seront les racines de l'équation cubique

$$(18)\qquad \begin{vmatrix} a\alpha - b, & b\alpha - c, & c\alpha - d \\ a\alpha^2 - c, & b\alpha^2 - d, & c\alpha^2 - e \\ a\alpha^3 - d, & b\alpha^3 - e, & c\alpha^3 - f \end{vmatrix} = 0,$$

qui, développée suivant la formule (15), devient

$$(19)\quad \begin{aligned} 0 = {} & b(e^2 - df) + b(e^2 - df) \\ & + c(cf - de) + b(de - cf) \\ & + d(d^2 - ce) + c(ce - d^2) \end{aligned} \left| \begin{aligned} & \alpha + a(de - cf) \\ & + b(bf - ce^2) \\ & + c(cd - be) \end{aligned} \right| \begin{aligned} & \alpha^2 + a(ce - d^2) \\ & + b(cd - be) \\ & + c(bd - e^2) \end{aligned} \left| \alpha^3. \right.$$

et p, q, r seront déterminés par les équations

$$(20)\quad \begin{cases} p + q + r = a, \\ p\alpha + q\beta + r\gamma = b, \\ p\alpha^2 + q\beta^2 + r\gamma^2 = c. \end{cases}$$

M. Sylvester présente l'équation cubique sous la forme

$$\begin{vmatrix} a\alpha + b, & b\alpha + c, & c\alpha + d \\ b\alpha + c, & c\alpha + d, & d\alpha + e \\ c\alpha + d, & d\alpha + e, & e\alpha + f \end{vmatrix} = 0;$$

mais il est aisé de voir qu'elle coïncide avec l'équation (18) en y changeant simplement α en $-\alpha$. Cela est vrai généralement, car le déterminant (10) est identique avec celui-ci :

$$(22)\quad \begin{vmatrix} a_0 x - a_1, & a_1 x - a_2, \ldots, & a_n x - a_{n+1} \\ a_1 x - a_2, & a_2 x - a_3, \ldots, & a_{n+1} x - a_{n+2} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_n x - a_{n+1}, & a_{n+1} x - a_{n+2}, \ldots, & a_{2n} x - a_{2n+1} \end{vmatrix}.$$

comme il résulte des équations (9) en les multipliant successivement par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i^n$ et en les retranchant successivement deux à deux. Cette dernière méthode très-simple aurait pu nous dispenser tout d'un coup de suivre l'autre, un peu longue, par laquelle nous sommes arrivés à la formule (15) ; mais j'ai cru pouvoir la donner, car elle est la première qui s'est présentée à mon esprit. Or rien ne s'oppose ici à ce qu'on change le signe de x dans l'équation (22) et en-

suite celui du déterminant entier; ainsi l'équation à résoudre pourra encore s'écrire

$$0 = \begin{vmatrix} a_0 x + a_1, & a_1 x + a_2, & a_2 x + a_3, \ldots, & a_n x + a_{n+1} \\ a_1 x + a_2, & a_2 x + a_3, & a_3 x + a_4, \ldots, & a_{n+1} x + a_{n+2} \\ a_2 x + a_3, & a_3 x + a_n, & a_4 x + a_5, \ldots, & a_{n+2} x + a_{n+3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n x + a_{n+1}, & a_{n+1} x + a_{n+2}, & a_{n+2} x + a_{n+3}, \ldots, & a_{2n} x + a_{2n+1} \end{vmatrix},$$

résultat conforme à celui qui se trouve consigné dans un Mémoire de M. Sylvester (*Supplement to a paper, etc.*, 1851), où il donne bien une démonstration du théorème en question, mais certes inabordable pour ceux qui ne se sont pas occupés spécialement des adjointes et des hyperdéterminants.

SOLUTION D'UN PROBLÈME DE PROBABILITÉS;

PAR M. ROGER,
Ingénieur des Mines.

Dans le tome II du présent Journal, Poisson a traité le problème suivant :

« Trois joueurs A, B, C jouent, deux à deux, une série de coups; chaque nouveau coup est joué par le joueur qui a gagné le coup précédent, avec celui qui n'y a pas joué : le sort désigne les deux joueurs qui jouent le premier coup. La partie est finie quand un des trois joueurs a gagné consécutivement les deux autres, ou deux coups de suite, et c'est ce joueur qui a gagné la partie. On demande de déterminer, pour les trois joueurs, les probabilités de gagner la partie, d'après les chances qu'ils ont de gagner à chaque coup, et selon que le sort les a désignés pour jouer ou pour ne pas jouer au premier coup. »

La solution présentée par Poisson est très-élégante, mais elle ne me paraît pas pouvoir s'étendre au cas d'un nombre quelconque n de joueurs, jouant suivant les conditions ci-dessus énoncées, l'ordre des joueurs étant primitivement déterminé par le sort. C'est ce cas général que je me propose de résoudre.

Je considère la partie à un instant quelconque, et je suppose que les joueurs, au nombre de n, soient rangés dans l'ordre suivant :

$$A, B, C, \ldots, L, M, N;$$

en ce moment, le joueur A vient de gagner le joueur N, et il s'apprête à jouer avec B.

Si le joueur A gagne le coup, il a gagné la partie, s'il perd, c'est au joueur B à jouer avec le suivant, et, dans ce cas, les joueurs se trouveront être dans l'ordre

$$B, C, \ldots, L, M, N, A,$$

et ainsi de suite.

Il est clair qu'un joueur quelconque jouera toujours, d'abord avec celui qui le précède, ensuite avec celui qui le suit. Représentons, d'après cela, par β la chance qu'un joueur tel que B a de gagner un coup sur celui qui le suit; alors la chance que le même joueur B a de gagner celui qui le précède devra être représentée, pour la symétrie des notations, par $(1-\alpha)$; et de même pour tous les joueurs.

Cela posé, appelons A_x la probabilité qu'a le joueur A de gagner la partie au moment même où il occupe le rang x, relativement au coup qui va être commencé. A_x sera une fonction de x et des caractéristiques $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda, \mu, \nu$ ci-dessus définies. Soit

$$A_x = f(x; \alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda, \mu, \nu).$$

Si cette expression était connue, il est évident, par la nature même de la question, qu'on en déduirait B_x par le simple changement de chacune des lettres $\alpha, \beta, \ldots, \nu$ dans la suivante, en sorte que l'on aurait

$$B_x = f(x; \beta, \gamma, \ldots, \mu, \nu, \alpha).$$

De là on déduirait de même C_x, puis D_x, et ainsi de suite.

La question est donc ramenée à la détermination de la seule fonction A_x.

Or, considérons à présent le cas où le joueur A, ayant gagné le précédent N, s'apprête à jouer avec celui qui le suit, B.

Il arrivera de ces deux choses l'une : A gagnera B ou sera gagné par lui.

La probabilité de la première hypothèse est α, et, dans ce cas, A a gagné la partie; la probabilité de la seconde hypothèse est $(1-\alpha)$, et, dans ce cas, la probabilité de gagner la partie devient, pour le joueur A, A_n au lieu de A_1. On a donc la relation

$$(1) \qquad A_1 = \alpha + (1-\alpha) A_n.$$

Dans la première hypothèse, les probabilités de gagner, qui étaient auparavant

$$B_2, C_3, \ldots, M_{n-1}, N_n,$$

pour chacun des autres joueurs, deviennent nulles, puisqu'ils ont

perdu la partie; dans la seconde hypothèse, elles deviennent respectivement

$$B_1,\ C_2, \ldots,\ M_{n-2},\ N_{n-1}.$$

ce qui fournit les relations

$$\begin{aligned} B_2 &= (1-\alpha)\,B_1, \\ C_3 &= (1-\alpha)\,C_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ M_{n-1} &= (1-\alpha)\,M_{n-2}, \\ N_n &= (1-\alpha)\,N_{n-1}. \end{aligned}$$

Mais d'après la remarque qui a été faite ci-dessus sur la maniere de déduire B_x, C_x, ..., de A_x supposé connu, on peut, au lieu des équations que je viens d'écrire, poser les suivantes :

$$\begin{aligned} A_2 &= (1-\nu)\,A_1, \\ A_3 &= (1-\mu)\,A_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{n-1} &= (1-\gamma)\,A_{n-2}, \\ A_n &= (1-\beta)\,A_{n-1}. \end{aligned}$$

On obtient ainsi n équations du premier degré entre les n inconnues A_1, A_2, ..., A_n; ce système d'équations est tres-aisé à résoudre, car on a d'abord

$$A_n = (1-\beta)(1-\gamma)\ldots(1-\nu)\,A_1,$$

valeur qui, substituée dans l'équation (1), donnera

$$A_1 = \alpha + (1-\alpha)(1-\beta)\ldots(1-\nu)\,A_1.$$

Posant, pour abréger,

$$(1-\alpha)(1-\beta)\ldots(1-\nu) = K_n,$$

on déduit de là

$$A_1 = \frac{\alpha}{1-K_n}.$$

D'ailleurs on aurait pour A_x la formule générale

$$A_x = A_1\,[(1-\nu)(1-\mu)\ldots],$$

les crochets [ ] renfermant $(x-1)$ facteurs. Si l'on représente par a_x le produit de x facteurs pris dans l'ordre suivant,

$$(1-\nu),\quad (1-\mu),\ldots,\quad (1-\gamma),\quad (1-\beta),\quad (1-\alpha),$$

on pourra écrire

$$A_x = a_{x-1}\,A_1 = a_{x-1}\,\frac{\alpha}{1-K_n}.$$

On remarquera d'ailleurs que, dans le système de notations adopté, le produit K_n pourrait s'écrire indifféremment a_n, b_n,..., ou c_n.

Ce résultat peut aussi s'écrire d'une manière un peu plus commode pour les interprétations. En effet, a_{x-1} peut être considéré comme le quotient de K_n par un produit a_{n-x+1} de $(n-x+1)$ facteurs écrits dans leur ordre naturel $(1-\alpha)$, $(1-\beta)$,.... On aura donc, en représentant par χ le coefficient $\frac{K_n}{1-K_n}$, symétrique par rapport aux lettres α, β,..., ν, on aura, dis-je,

$$A_x = \chi\,\frac{\alpha}{a_{n-x+1}}.$$

Discussion. La partie étant considérée à un instant quelconque, il est certain qu'elle doit finir, à moins que chaque joueur ne soit sûr de gagner celui qui le précède, et de perdre avec celui qui le suit, c'est-à-dire à moins que l'on n'ait à la fois

$$\alpha = 0,\quad \beta = 0,\ldots,\quad \nu = 0,$$

auquel cas le nombre K_n se réduit à l'unité, et le coefficient χ devient infini. Ce cas excepté, la partie, prolongée autant qu'il le faudra, doit nécessairement se terminer, et l'un des joueurs devra gagner. Or la probabilité que la partie se terminera est au moment, par exemple, où le joueur A, après avoir gagné le précédent, va jouer avec B; cette probabilité, dis-je, sera

$$(A_1 + B_2 + C_3 + \ldots + M_{n-1} + N_n) \text{ qui doit être égale à } 1.$$

C'est ce qu'il est aisé de vérifier par la substitution des valeurs qui résultent pour A_1, B_2, etc., de la formule générale trouvée ci-dessus.

Pour le cas particulier de $n = 3$, traité par Poisson, on aura

$$\chi = \frac{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}{1-(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)},$$

$$A_1 = \chi \frac{\alpha}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)} = \frac{\alpha}{1-K_n}.$$

$$B_2 = \chi \frac{\beta}{(1-\beta)(1-\gamma)} = \frac{\beta(1-\alpha)}{1-K_n}.$$

$$C_3 = \chi \frac{\gamma}{(1-\gamma)} = \frac{\gamma(1-\alpha)(1-\beta)}{1-K_n};$$

formules qui sont les mêmes, sauf quelques légères différences de notation, que celles énoncées à la page 378 du Journal de M. Liouville.

Considérons maintenant la partie tout à fait au commencement. Le sort a désigné les joueurs pour jouer dans l'ordre suivant : N et A ensemble et tout d'abord, puis les autres, successivement, B, C, ... M.

Ou le joueur A gagnera N, ou il sera gagné par lui. Dans la première hypothèse, dont la probabilité est $(1-\nu)$, les probabilités des joueurs seront, après le coup,

$$A_1,\ B_2,\ C_3,\ \ldots,\ N_n;$$

et, dans la seconde hypothèse, dont la probabilité est ν, les probabilités des joueurs seront, après le coup,

$$N'_1,\ B'_2,\ C'_3,\ \ldots,\ A'_n,$$

et elles se déduiront de la formule générale trouvée tout à l'heure, à l'aide de simples changements de lettres. D'après cela on aura, a priori, pour la probabilité $({}_iI)$ d'un joueur quelconque de rang i,

$$({}_iI) = (1-\nu)\, I_{i-1} + \nu\, I'_{i-1},$$

les quantités I_{i-1} et I'_{i-1} se calculant comme il vient d'être dit. Quant aux joueurs A et N, leurs probabilités a priori seraient

$$(A) = (1-\nu)\, A_1 + \nu\, A'_1,$$

$$(N) = (1-\nu)\, N_n + \nu\, N'_1.$$

Ces formules de transformation seraient, en général, assez compliquées; aussi nous bornerons-nous à considérer le cas où tous les joueurs

sont de force égale, et où l'on a, par conséquent,

$$\alpha = \beta = \gamma = \ldots = 1 - \alpha_1 = (1 - \beta) = \ldots = \frac{1}{2}.$$

Alors on aura aussi

$$A_x = B_x = C_x = \ldots = N_x;$$

d'ailleurs

$$A_x = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n} \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-x+1}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}.$$

Si l'on fait $n = 3$, on aura

$$A_1 = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{8}\right)} = \frac{4}{7}, \quad A_2 = \frac{2}{7}, \quad A_3 = \frac{1}{7}.$$

C'est dans ces proportions qu'il faudra partager l'enjeu total, si la partie est interrompue au moment où le joueur A_1 vient de gagner le joueur A_3.

En général, on voit que chaque joueur, à un instant donné, a droit à une part deux fois plus forte que celui qui le suit immédiatement : c'est ce qu'il est aisé de faire voir à priori. En effet, pour que le joueur A_x puisse gagner, il faut d'abord que le joueur A_1 perde le coup qu'il va jouer avec A_2, événement dont la probabilité est $\frac{1}{2}$. Mais alors la probabilité A_x se change en A_{x-1}, donc

$$A_x = \frac{1}{2} A_{x-1}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Cette équation conduirait de suite à l'expression trouvée ci-dessus pour A_x. Car on aura

$$A_2 = \frac{1}{2} A_1,$$

$$A_3 = \frac{1}{2} A_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_x = \frac{1}{2} A_{x-1};$$

d'où, en multipliant terme à terme,

$$A_x = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} A_1;$$

et comme

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = 1,$$

on a

$$A_1 \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right] = 1,$$

ou bien

$$A_1 \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 1;$$

d'où l'on tire

$$A_1 = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

et enfin

$$A_x = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}.$$

Dans le cas des forces égales, les joueurs N et A étant désignés par le sort pour jouer tout d'abord ensemble, il n'importe pas aux autres joueurs que ce soit l'un plutôt que l'autre qui gagne le premier coup. C'est ce qu'indique la formule

$$({}_iI) = (1 - \nu)\, I_{i-1} + \nu I'_{i-1},$$

qui se réduit alors à

$$({}_iI) = I_{i-1}.$$

Quant au joueur A, s'il gagne ce premier coup, la probabilité devient A_1; s'il perd ce coup, elle devient A_n; on a donc

$$(N) = (A) = \frac{1}{2}(A_1 + A_n).$$

Chacun des joueurs N et A se trouve ainsi avoir la moyenne des chances qu'ont les deux joueurs extrêmes dans le cours de la partie.

Deux Mémoires sur la théorie dynamique de la chaleur;

PAR M. WILLIAM THOMSON,
Professeur à l'Université de Glasgow, etc.

(Traduits de l'anglais.)

I.

*Mémoire sur la théorie dynamique de la chaleur, contenant quelques résultats numériques déduits de l'*équivalent de l'unité de chaleur *de M. Joule, et des observations de M. Regnault sur la vapeur d'eau.*

(Lu à la Société royale d'Édimbourg le 19 mars 1851, et extrait des *Transactions* de cette Société, vol. XX, deuxième partie.)

NOTICE HISTORIQUE.

1. Au moyen de l'expérience qui consiste à produire la fusion de deux morceaux de glace en les frottant l'un contre l'autre, sir Humphrey Davy a établi la proposition suivante : « Les phénomènes de répulsion ne dépendent nullement de l'existence d'un » fluide élastique particulier; en d'autres termes, le calorique n'existe pas; » et il en a conclu que la chaleur consiste en un certain mouvement des particules des corps. « *Pour distinguer ce mouvement des autres, on l'a appelé* mouvement RÉPULSIF, *ayant en vue de désigner par là la cause de la sensation* » et des phénomènes d'expansion et de pression expansive « *produits par la chaleur* [*]. »

2. La théorie dynamique de la chaleur, établie de la sorte par Davy, a été étendue à la chaleur rayonnante par suite de la découverte de certains phénomènes, notamment de ceux relatifs à la polarisation de la chaleur rayonnante; découverte qui donne un

[*] Les phrases comprises entre des guillemets sont extraites du premier travail de Davy, intitulé : *Essai sur la chaleur, la lumière et les combinaisons de la lumière*, lequel a été publié en 1799 dans *Contributions to physical and medical knowledge principally from the west of England, collected by Thomas Beddoes*, et réimprimé dans l'édition qu'a donnée le Dr Davy des Œuvres de son frère (vol. II, Lond., 1836).

haut degré de probabilité à cette hypothèse, que la chaleur qui se propage dans le vide ou dans des substances diathermales, consiste en ondes de vibrations transversales dans un milieu universellement répandu.

3. Les découvertes récentes de MM. Mayer et Joule [*] sur la génération de la chaleur au moyen du frottement des fluides en mouvement, et au moyen de l'excitation magnéto-électrique des courants galvaniques, suffiraient à elles seules et séparément pour démontrer la nature immatérielle de la chaleur, et offriraient ainsi, s'il était nécessaire, une confirmation complète des idées de Davy.

4. Si l'on considère comme établi que la chaleur n'est pas une substance, mais une forme dynamique sous laquelle se manifeste un effet mécanique, on concevra qu'il doit y avoir un certain rapport d'*équivalence* entre le travail mécanique et la chaleur, comme il en existe entre la cause et l'effet. L'énoncé de ce principe paraît avoir été publié pour la première fois par M. Mayer dans le travail intitulé : *Bemerkungen über die kräften der unbelebten natur* [**]. Dans ce travail, qui contient d'ailleurs quelques idées exactes sur la faculté de transformer de la chaleur en effet mécanique, et réciproquement, l'auteur essaye d'établir en chiffres l'équivalent mécanique d'une quantité donnée de chaleur, mais en se fondant sur une fausse analogie qu'il établit entre la chute d'un corps grave et la diminution de volume d'une substance continue. Dans un Mémoire *sur les effets calorifiques produits par l'action magnéto-électrique, et sur la valeur mécanique de la chaleur* [***], publié à peu près quatorze mois plus tard, M. Joule, de Manchester, établit très-clairement les conséquences relatives à la faculté de transformer de la chaleur en effet mécanique, et réciproquement, qui découlent de l'hypothèse que la chaleur n'est pas une substance, mais bien un état de mouvement : puis, s'appuyant sur des principes incontestables, il cherche quelle peut être la relation numérique qui existe entre la chaleur et la puissance mécanique. Dans le cours de ses recherches, l'auteur démontre par l'expérience le fait suivant : toutes les fois qu'il y a production de chaleur au moyen d'une action purement mécanique, et sans accompagnement d'aucun autre effet, la même quantité de travail produit toujours la même quantité de chaleur, soit que cette production de chaleur soit le résultat d'un frottement de fluide, soit qu'elle provienne de l'excitation magnéto-inductrice d'un courant galvanique; puis il détermine la quantité de travail, en livres élevées à 1 pied, néces-

---

[*] En mai 1842, M. Mayer annonça, dans les *Annales* de MM. Wöhler et Liebig, qu'au moyen d'agitations produites dans l'eau, il en avait élevé la température de 12 à 13 degrés centigrades. En août 1843, M. Joule fit connaître à l'Association britannique que « il se développait de la chaleur, » quand on faisait passer de l'eau dans des tubes de petit diamètre; qu'avec un travail mécanique » capable d'élever 770 livres anglaises à 1 pied de hauteur, il avait produit dans 1 livre d'eau une » élévation de température de 1 degré; et qu'il y a production de chaleur quand on emploie du travail mécanique à faire tourner une machine magnéto-électrique ou électromagnétique. » (Voir son travail *sur les effets calorifiques de l'électricité magnétique et la valeur mécanique de la chaleur*, *Philosophical Magazine*, vol. XXIII, 1843.)

[**] *Annales* de MM. Wöhler et Liebig, 1842.

[***] *Association britannique*, août 1843, et *Philosophical Magazine*, septembre 1843.

saire pour produire une unité de chaleur, quantité qu'il appelle *équivalent mécanique de la chaleur*. Depuis cette première publication, M. Joule a fait de nombreuses expériences pour déterminer avec autant d'exactitude que possible l'équivalent de la chaleur ainsi défini, et il en a rendu compte dans ses différentes communications à l'Association britannique, au *Philosophical Magazine*, à la Société royale de Londres, et à l'Institut de France.

5. Les travaux de MM. Rankine et Clausius ont récemment apporté d'importantes additions à la théorie dynamique de la chaleur. Au moyen de déductions analytiques analogues aux raisonnements de Carnot sur la puissance motrice de la chaleur, mais fondées sur un axiome directement contraire au principe fondamental de ce dernier, ces savants sont arrivés à quelques conséquences remarquables. Leurs recherches ont été publiées, l'année passée, dans les *Transactions* de cette Société et dans les *Annales de Poggendorff*.

Dans les développements qui vont suivre, nous rapporterons de ces recherches celles qui ont le plus de connexité avec le travail que nous soumettons à l'appréciation de la Société royale.

[Addition faite par l'auteur le 29 juin 1852.] Je prends cette occasion de citer le titre suivant : *Ueber die erhaltung der kraft*, von Dr H. Helmholz (Berlin, 1847), comme celui d'un ouvrage auquel j'aurais renvoyé, en indiquant des applications du principe général de l'effet mécanique, surtout aux questions relatives aux courants électriques, dans ce Mémoire et ailleurs, si j'avais été assez heureux pour connaître plus tôt cet admirable ouvrage, que je n'ai malheureusement pas eu dans les mains avant le mois de janvier 1852.

6. Dans ce Mémoire, nous avons trois objets en vue :

1°. Montrer quelles modifications doivent subir les conclusions auxquelles sont arrivés Carnot et tous ceux qui ont suivi sa méthode de raisonnement sur la puissance de la chaleur, quand on adopte l'hypothèse de la *Théorie dynamique*, contraire au principe fondamental de Carnot ;

2°. Faire ressortir le sens qu'on doit attribuer, dans la *Théorie dynamique*, aux résultats numériques déduits des observations de M. Regnault sur la vapeur d'eau, que l'auteur du présent travail a communiqués à la Société, il y a deux ans, en rendant compte de la théorie de Carnot [*] ; et faire voir qu'on peut établir une théorie complète de la puissance dynamique de la chaleur, dans les limites de température des expériences, en partant, d'une part, de ces résultats numériques (naturellement susceptibles de correction, quand on possédera des données plus exactes sur la densité de la vapeur d'eau saturée), et, d'autre part, de l'*équivalent de l'unité thermale* de M. Joule ;

3°. Signaler quelques relations remarquables, qui établissent une liaison entre les

[*] *Rapport sur la théorie de Carnot* (Account of Carnot's Theory of the Motive power of heat, etc. *Transactions de la Société royale d'Édimbourg*, vol. XVI, cinquième partie.

propriétés physiques de toutes les substances, et que nous avons obtenues au moyen d'un raisonnement analogue à celui de Carnot, mais fondé en partie sur le principe contraire de la *Théorie dynamique*.

PREMIÈRE PARTIE.

Principes fondamentaux de la théorie de la puissance motrice de la chaleur.

7. Conformément à un principe évident, introduit d'ailleurs pour la première fois par Carnot, dans la théorie de la puissance motrice de la chaleur, tout effet mécanique, produit dans une opération quelconque, ne peut être considéré comme tirant son origine d'une source purement thermale, que si tous les objets matériels mis en œuvre se retrouvent, à la fin de l'opération, exactement dans les mêmes circonstances physiques et mécaniques où ils étaient au commencement. Cette condition est remplie à chaque instant dans quelques machines thermodynamiques, telles que, par exemple, l'*aimant flottant* de Faraday ou le *wheel and axle* de Barlow, construites pour fonctionner avec un mouvement uniforme de rotation, au moyen d'un courant produit d'une manière continue par la chaleur communiquée à deux métaux en contact; il en est de même pour l'appareil rotatoire thermo-électrique de Marsh, qu'on a actuellement construit et mis en action.

D'un autre côté, dans toutes les machines thermodynamiques fondées sur l'action électrique dans lesquelles on emploie des courants galvaniques discontinus ou des barres de fer doux dans un état variable de magnétisation, dans toutes les machines fondées sur les expansions et contractions alternatives de certaines substances, dans toutes ces machines, disons-nous, il y a bien, il est vrai, des changements dans l'état physique des objets matériels employés; mais, pour rester dans les termes rigoureux du principe posé plus haut, il faut que les changements soient strictement périodiques.

Dans de telles machines, la série des mouvements exécutés pendant une période à la fin de laquelle tous les objets matériels sont replacés exactement dans les mêmes conditions qu'au commencement, constitue ce que nous appellerons un *cycle complet* d'opérations.

Dans ce qui va suivre, toutes les fois que nous écrirons, sans autre qualification, les mots *travail exécuté*, *effet mécanique produit*, il demeure bien entendu que nous voudrons désigner par là le travail produit, soit pendant un temps quelconque dans une machine dont les conditions de fonctionnement sont invariables, soit pendant la durée d'un cycle complet ou d'un nombre quelconque de cycles complets, dans une machine périodique.

8. Dans de telles machines, ce que nous nommerons *source de chaleur* sera toujours un corps chaud, à une température constante, qui sera mis en contact avec quelqu'une des parties de la machine; et lorsqu'il sera question de certaine portion de la machine dont on empêchera la température de s'élever (ce qui ne peut s'effectuer qu'en soutirant toute la chaleur qui y est déposée), nous supposerons toujours que cet effet est

obtenu en mettant en contact avec cette partie de la machine, un corps froid à une température constante, et que nous appellerons *réfrigérant*.

9. Toute la théorie de la puissance dynamique de la chaleur est fondée sur les deux propositions suivantes dues respectivement à M. Joule, d'une part, et à Carnot et M. Clausius, d'autre part.

Première proposition (M. Joule). — Lorsque des quantités égales d'effet mécanique sont produites par des causes purement thermales, quel que soit d'ailleurs le mode d'opérer, des quantités égales de chaleur sont anéanties; et réciproquement, il y a production de quantités égales de chaleur, toutes les fois que des quantités égales d'effet mécanique sont dépensées en effets purement thermaux.

Deuxième proposition (Carnot et M. Clausius). — Si une machine est disposée de telle sorte que, lorsqu'on la fait fonctionner en sens inverse, toutes les actions physiques et dynamiques, existant dans ses divers organes, se présentent exactement dans un état inverse, cette machine produit autant d'effet mécanique qu'il est possible d'en obtenir, avec une quantité donnée de chaleur, d'une machine thermodynamique fonctionnant dans les mêmes conditions de température du *réfrigérant* et de la *source de chaleur* [*].

10. Au moyen de la démonstration suivante, on peut faire voir que la première de ces propositions est renfermée implicitement dans le *Principe général de l'effet mécanique*, et la mettre ainsi à l'abri de toute objection.

11. Quel que soit l'effet direct au moyen duquel se manifeste l'absorption ou l'émission d'une certaine quantité de chaleur par un corps, la mesure de cette quantité peut toujours être fondée sur la détermination du poids d'une certaine substance-type qui serait élevée par cette chaleur ou par toute autre quantité égale, d'une température-type à une autre température; puisque, en effet, deux quantités de chaleur doivent être considérées comme égales quand elles peuvent élever deux poids égaux d'une même substance d'une même température quelconque à une même température plus haute que la première. Cela posé, conformément aux principes de la théorie dynamique de la chaleur, on ne peut élever la température d'une substance qu'en agissant extérieurement sur elle de manière à produire un accroissement dans ses mouvements thermaux intérieurs, et en produisant, en outre, dans les distances réciproques et les arrangements des molécules, les modifications qui accompagnent les changements de température. Le travail nécessaire pour produire la totalité de cet effet mécanique est évidemment proportionnel à la quantité de la substance élevée d'une certaine température-type à une autre température-type; dès lors, lorsqu'un corps, un groupe de corps, ou une machine *cède* ou *absorbe* de la chaleur, en réalité elle *produit* ou *dépense* un certain effet mécanique dont la valeur est précisément proportionnelle à la quantité de chaleur cédée ou absorbée. D'un autre côté, le travail provenant de l'action des forces extérieures sur cette machine, le travail dû aux forces moléculaires de ses organes, et

[*] Pour bien comprendre le sens de cette proposition, *voir* les nos 15 et 21 du présent Mémoire.

enfin la quantité de laquelle est diminuée la moitié de la force vive des mouvements thermaux de toutes ses parties, ces quantités doivent être en somme égales à l'effet mécanique produit au moyen de cette machine, et par conséquent égales à l'équivalent mécanique de la quantité de chaleur cédée par elle (quantité qui sera positive ou négative selon que la somme des différents termes sera elle-même positive ou négative). Si donc l'on fait en sorte qu'il n'y ait dans le corps ni changements moléculaires, ni variation dans la température, ou bien si, considérant un cycle complet d'opérations, on s'arrange pour ramener exactement au même état qu'au commencement, toutes les conditions physiques ainsi que la température du corps, la deuxième et la troisième des espèces de travail énumérées plus haut disparaîtront; d'où l'on conclut, suivant le cas, que la chaleur émise par le corps sera l'équivalent thermal du travail opéré sur lui par les forces extérieures, ou que la chaleur absorbée par le corps sera l'équivalent thermal du travail exécuté par lui à l'encontre des forces extérieures, proposition qu'il s'agissait de démontrer.

12. La démonstration de la deuxième proposition est fondée sur l'axiome suivant :

Il est impossible, au moyen d'agents matériels inanimés, de tirer aucun effet mécanique d'une substance quelconque, en abaissant sa température au-dessous de la température des corps qui sont le plus froids, parmi tous ceux qui environnent cette substance [*].

13. Pour démontrer la deuxième proposition, appelons A et B deux machines thermodynamiques, dont l'une B satisfait à la condition énoncée dans ladite proposition; et supposons que la machine A puisse produire, au moyen d'une quantité donnée de chaleur, une plus grande somme de travail que B, lorsque les températures de la source et du réfrigérant sont respectivement égales dans les deux machines. Cela posé, en raison de la condition particulière dans laquelle B se trouve placé, on pourra faire fonctionner cette machine en sens inverse, et faire qu'elle restitue à la source telle quantité de chaleur que l'on voudra, au moyen d'une dépense de travail mécanique égale à la quantité de travail qu'on obtiendrait, d'une même quantité de chaleur, pendant la marche directe. Si donc l'on s'arrange, ce que nous supposons possible, pour que B, dans sa marche inverse, restitue à la source de A toute la chaleur qui en a été extraite pendant la durée d'une certaine période de fonctionnement de cette dernière machine, il y aura évidemment moins de travail dépensé par B, qu'il n'en a été produit par A dans cette même période. Il en résulte que, si l'on continue alternativement ou simultanément, la même série d'opérations consistant à faire fonctionner A dans le sens direct et B dans le sens inverse, il y aura production indéfinie de travail mécanique sans aucune dépense de chaleur de la part de la source; par suite, conformément à la première proposition, il y aura plus de chaleur enlevée au réfrigérant, pendant le fonctionnement inverse de B, qu'il y en a été déposé pendant le fonctionnement direct de A

* Si l'on contestait la vérité de cet axiome, il faudrait admettre qu'il est possible de construire une machine automotrice produisant un effet mécanique au moyen du refroidissement successif de la terre et de la mer, et cela sans autre limite que l'épuisement total non-seulement de la chaleur terrestre, mais encore de celle de l'univers entier.

Dès lors il devient evident que A pourra employer une partie de son travail à faire fonctionner B en sens inverse, et qu'on aura ainsi réalisé un système auto moteur. D'un autre côté, comme dans ce système la source ne reçoit ni ne cède aucune quantité de chaleur, tous les corps environnants, à l'exception du réfrigerant, pourront prendre la temperature de la source elle-même, quelle qu'elle soit, sans rien changer aux conditions que nous avons admises en principe. Nous aurons donc ainsi une machine automotrice capable de soutirer constamment de la chaleur pour la convertir en effet mecanique d'un corps environne d'autres corps dont la temperature est superieure à la sienne. Ce resulat étant contraire à notre axiome, nous devons conclure qu'il est impossible que A produise plus d'effet mécanique que B, avec la même quantité de chaleur extraite de la même source. Consequemment, avec une source de chaleur et un refrigerant à des températures données, nulle machine n'extraira d'une quantité donnee de chaleur, une plus grande somme d'effet mécanique que n'en produirait tout système satisfaisant aux conditions de reciprocité definies dans le cours du nº 9; proposition qu'il s'agissait de démontrer.

14. Carnot fut le premier qui enonça cette proposition, la donnant comme le criterium de la perfection dans les machines thermodynamiques [*]. La démonstration qu'il en a donnee, procedant par l'absurde, n'est qu'une démonstration de ce theoreme, que si on la rejette, on est forcé à admettre la possibilité de construire une machine auto-motrice qui produirait indéfiniment du travail mécanique sans consommation d'aucune matière, sans l'intervention d'une source de chaleur ou de tout autre agent physique; mais cette demonstration est fondee sur l'hypothèse que, dans un *cycle complet d'operations*, la substance intermédiaire (*medium*) restitue exactement la quantité de chaleur qu'elle a reçue. Carnot lui-même exprime [**] un doute marqué sur l'exactitude de cette hypothèse, considerée comme un principe general, et (comme nous avons essayé de le faire voir ci-dessus) l'on peut regarder comme parfaitement certain que cette hypothèse est fausse là où il y a, apres tout, du travail perdu ou gagné dans les opérations. Dès lors on doit admettre que la démonstration originale de Carnot est tout à fait insuffisante, mais on ne peut pas en conclure que la proposition elle-même soit inexacte. Cette proposition, au contraire, nous a paru présenter un tel caractère de probabilité, que nous l'avons adoptée, conjointement avec le principe de M. Joule (dont l'existence fait pecher par la base la démonstration de Carnot), pour en faire le point de depart de certaines recherches sur la puissance motrice de la chaleur employée dans les machines à air et à vapeur d'eau, dans des limites finies de la température; recherches qui nous ont conduit, il y a un an environ, à des résultats dont nous donnons la substance dans la deuxième partie du travail que nous soumettons aujourd'hui à l'appréciation de la Société royale

Ce ne fut qu'au commencement de cette année que nous trouvâmes la démonstration exposée ci-dessus, au moyen de laquelle nous établissons la verité de la propo-

---

[*] *Voir* le *Rapport sur la théorie de Carnot*, nº **13**.

[**] *Voir* l'ouvrage de Carnot, page 37, ou le *Rapport, etc.*, nº 6.

sition de Carnot, en nous appuyant sur l'axiome du n° **12**, qui sera, nous le pensons, généralement admis. Ce que nous venons de dire n'a pas pour but de réclamer la priorité en notre faveur. Le mérite d'avoir, le premier, établi la proposition sur des principes exacts appartient tout entier à M. Clausius, qui en publia la démonstration, au mois de mai de l'année dernière, dans la deuxième partie de son travail [*] sur la puissance motrice de la chaleur. Qu'il nous soit permis d'ajouter que nous avons donné la démonstration ci-dessus, exactement comme elle s'était présentée à notre esprit, avant de savoir que M. Clausius eût énoncé ou démontré ladite proposition. Le raisonnement de M. Clausius est fondé sur l'axiome suivant :

Il est impossible qu'une machine auto-motrice, sans l'aide d'aucun agent extérieur, fasse passer de la chaleur d'un corps dans un autre corps ayant une température plus élevée.

Il est facile de faire voir que cet axiome et le nôtre, n° **12**, quoique différents dans la forme, sont, au demeurant, la conséquence l'un de l'autre. D'ailleurs, dans les deux démonstrations, le raisonnement est rigoureusement semblable à celui de Carnot.

13. Pour établir une théorie complète de la chaleur, il faudrait faire l'application des deux propositions précédentes à toutes les méthodes possibles de produire des effets mécaniques au moyen d'actions thermales [**]. Jusqu'à présent cette application n'a pas été faite à la méthode électrique, du moins en ce qui concerne le critérium de perfection renfermé dans la deuxième proposition, et probablement elle ne pourra être faite d'une manière absolue; mais l'application à cette méthode de la première proposition a été étudiée à fond par M. Joule dans ses recherches sur les effets calorifiques dus à l'action magnéto-électrique (*calorific effects of magneto-electricity*); et c'est sur cette application qu'il a fondé l'un de ses procédés pour déterminer par l'expérience l'équivalent mécanique de la chaleur. Ainsi, d'une part, il résulte, comme conséquence des lois [***] par lui découvertes sur la chaleur engendrée dans les circuits galvaniques, ce fait que, lorsqu'une certaine quantité de travail mécanique est employée à produire

---

[*] *Voir* les *Annales de Poggendorff*, citées plus haut.

[**] « On connaît actuellement deux, mais seulement deux, méthodes distinctes d'obtenir du travail mécanique au moyen de la chaleur : l'une d'elles est fondée sur les changements de volume » que subissent les corps exposés à l'action de la chaleur; dans l'autre on emploie l'intermédiaire » de l'électricité. » *Rapport sur la théorie de Carnot*, n° 4; *Transactions*, vol. XVI, cinquième partie.

[***] Ces lois peuvent s'énoncer ainsi : Dans une portion fixe quelconque de circuit, la quantité de chaleur développée dans un temps donné est proportionnelle au carré de la mesure du courant, et quand on considère différentes parties fixes d'un seul circuit, ou de plusieurs circuits traversés par des courants égaux, les quantités de chaleur développées dans des temps égaux sont entre elles comme les résistances de ces parties.

M. Joule a communiqué à la Société royale, le 17 décembre 1840, un travail qui contient la démonstration de ces lois, avec d'autres propositions concernant les relations réciproques des agents chimiques et thermaux. *Voir* dans le *Philosophical Magazine*, vol. XVIII, page 308, l'extrait qui renferme l'exposé des lois citées. Ce travail, qu'on n'a pas voulu imprimer dans les *Transactions*, a été publié plus tard dans le *Philosophical Magazine* en octobre 1841, vol. XIX, page 260.

un courant galvanique, au moyen d'une machine magnéto-électrique, la chaleur engendrée dans une longueur donnée de la portion fixe du circuit est proportionnelle à la totalité du travail dépensé; et, d'autre part, en démontrant par l'expérience qu'il se dégage, dans une portion mobile quelconque du circuit, exactement la même quantité de chaleur que si cette portion du circuit était à l'état de repos et était traversée par un courant de la même force, M. Joule est logiquement amené à tirer les deux conclusions suivantes :

1°. On peut engendrer de la chaleur en faisant fonctionner *by working* une machine magnéto-électrique.

2°. Si le courant ainsi créé est mis dans l'impossibilité de produire autre chose que des effets thermaux, la quantité totale de chaleur développée est, dans toutes les circonstances, exactement proportionnelle à la quantité de travail dépensée.

16. En outre, M. Joule cite cette découverte admirable de M. Peltier, que du froid est produit par le passage d'un courant électrique du bismuth dans l'antimoine, pour faire voir comment on peut s'en servir pour démontrer que : Lorsqu'un courant électrique est produit d'une manière continue, au moyen d'une source purement thermale, les quantités de chaleur développées par l'électricité dans les différentes parties homogènes du circuit ne sont que des compensations à une perte de chaleur qui a lieu aux endroits de contact des métaux différents; ou bien, que lorsque l'effet du courant est entièrement thermal, il doit y avoir exactement autant de chaleur émise par les portions du circuit qui ne sont pas affectées par la source, qu'il en a été soutiré à la source.

17. Nous ajouterons enfin [*] : Lorsqu'un courant, dont l'existence est due à une action thermale, fera fonctionner une machine et produira un effet mécanique, il y aura *moins* de chaleur émise par les portions du circuit qui ne sont pas affectées par la source qu'il n'en a été dépensé par la source, et la différence entre ces deux quantités sera précisément équivalente à l'effet mécanique qui aura été produit. Il en doit être ainsi, puisque M. Joule démontre par l'expérience le fait suivant : Un courant provenant d'une source quelconque, et faisant mouvoir une machine, produit dans cette machine *moins* de chaleur qu'il n'en produirait dans un fil fixe offrant la même résistance au

---

[*] Ce raisonnement nous a été suggéré par le passage suivant d'une Lettre que nous avons reçue de M. Joule le 8 juillet 1847. « L'expérience de M. Peltier sur la production du froid dans l'endroit » de contact (*solder*) du bismuth et de l'antimoine, nous offre un exemple de la conversion de la » chaleur en force mécanique du courant. » passage qui doit avoir eu pour but de répondre à la remarque faite par nous, qu'on ne pourrait fournir aucun témoignage à l'appui de cette assertion que de la chaleur puisse être anéantie. Nous admettons pleinement la force de cette réponse; mais, pour donner le caractère expérimental au témoignage ainsi invoqué, il faudrait prouver qu'il y a plus de chaleur anéantie dans les endroits à chaud d'un couple ou d'une batterie thermo-électrique qui sert à soutenir un courant dans un fil conducteur, qu'il n'y en a de créée dans les endroits à froid. Que les choses se passent ainsi, je le regarde comme parfaitement certain, par la raison que les déductions de M. Joule, citées dans le n° **16** du texte, sont des conséquences incontestables de la première proposition fondamentale; mais cependant, il faut le remarquer dans ce cas aussi bien que dans tout autre cas de production d'effet mécanique par l'emploi d'une source purement thermale,

courant ; et la différence entre les deux quantités de chaleur ainsi développées, est équivalente à l'effet mécanique produit par la machine.

18. Les propositions suivantes de ce numéro sont tirées en substance, sinon textuellement, du Mémoire de M. Joule [*] *Sur les effets calorifiques dus à l'action magnéto-électrique*, et surtout de la première page de ce Mémoire, dans lequel l'auteur raconte des conclusions générales auxquelles il était conduit dans le cours de ses recherches antérieures. Elles mettent en relief, d'une manière extrêmement frappante, l'égalité des effets thermaux produits par des causes égales agissant par des moyens différents.

Prenons trois batteries galvaniques parfaitement égales et semblables, munies d'électrodes égaux et semblables ; soient A_1 et B_1 les extrémités des électrodes de la première batterie ; soient A_2 et B_2 celles de la deuxième batterie, et A_3 et B_3 les mêmes éléments de la troisième. Lions A_1 et B_1 avec les extrémités d'un long fil fixe ; lions A_2 et B_2 avec les plaques de platine d'un appareil disposé pour décomposer l'eau ; enfin mettons A_3 et B_3 en relation avec les pôles d'une machine électro-magnétique. Cela fait, si l'on règle la longueur du fil placé entre A_1 et B_1, et la vitesse de la machine interposée entre A_3 et B_3, de manière à ce que les courants (que, pour plus de simplicité, nous supposerons continus et parfaitement uniformes) soient égaux dans les trois circuits, il y aura plus de chaleur émise, dans un temps donné, dans le fil placé entre A_1 et B_1 qu'il n'y en a d'une part dans l'appareil électrolytique placé entre A_2 et B_2, et, d'autre part, dans la machine interposée entre A_3 et B_3. Mais si l'on dispose les choses pour que l'hydrogène soit brûlé par l'oxygène dans l'appareil électrolytique, et pour que la machine dépense tout son travail à produire des effets uniquement thermaux (comme il arriverait, par exemple, si tout le travail de la machine était employé à agiter continuellement une masse finie de liquide) ; dans ce cas, la quantité de chaleur émise dans ces deux derniers appareils sera précisément la même que dans le fil placé entre A_1 et B_1. Il est digne de remarque que ces propositions sont rigoureusement vraies ; et que M. Joule, qui les a découvertes comme des conséquences démontrées du principe fondamental de la théorie dynamique de la chaleur, n'a fait par l'expérience que les vérifier surabondamment.

---

on n'a pas démontré autrement que par des considérations théoriques, l'anéantissement d'une quantité équivalente de chaleur. Ce serait faire un grand pas dans la voie ayant pour but de mettre en relief au moyen de l'expérience (de vérifier, pour ceux qui regardent cette vérification comme nécessaire) l'exactitude de la théorie dynamique de la chaleur, que de montrer, dans un cas quelconque, qu'il y a une perte de chaleur ; et l'on pourrait arriver à ce résultat en opérant, dans une étendue très-considérable de l'échelle thermométrique, sur une bonne machine à air ou à vapeur d'eau, convenablement disposée pour ne pas dépenser en frottements sa force mécanique. Comme on le verra dans la deuxième partie de ce travail, aucun genre d'expérience ne pourra parvenir à manifester une perte notable de chaleur, à moins que l'on n'emploie des corps à des températures différant beaucoup entre elles ; par exemple, la perte de chaleur qu'on pourra constater n'atteindrait pas 0,098 ou environ un dixième de la totalité de la chaleur employée, si la température de tous les corps expérimentés était comprise entre zéro et 30 degrés.

[*] *Philosophical Magazine*, septembre 1843.

19. On peut appliquer, de la manière la plus rigoureuse, nos deux propositions fondamentales à la seconde des méthodes connues pour obtenir un effet mécanique au moyen d'une action thermale. La première de ces deux propositions a été déjà ainsi appliquée par MM. Rankine et Clausius dans leurs Mémoires publiés; et l'application de la seconde proposition, comme l'a fait voir M. Clausius dans son travail, est absolument identique avec la recherche, déjà faite par Carnot, de la relation qui existe entre l'effet mécanique produit et les circonstances thermales d'où cet effet tire son origine, dans le cas d'une machine expansive fonctionnant dans des limites infiniment voisines de température. Dans ce qui va suivre, nous exposerons la méthode d'investigation la plus simple qui se soit présentée à notre esprit dans l'étude des conséquences auxquelles peut conduire cette application, méthode qui d'ailleurs n'est qu'une simple modification introduite à une expression analytique de l'axiome de Carnot sur la permanence de la chaleur, que nous avions donné dans notre premier travail [*], pour la transformer dans une expression de l'axiome contraire de M. Joule.

20. Supposons une masse de substance quelconque [**] occupant le volume v sous la pression p, la même dans tous les sens, et à la température t; et supposons qu'elle se dilate en prenant le volume $v + dv$ et la température $t + dt$; la quantité de travail produit sera

$$p\,dv;$$

et la quantité de chaleur qu'il faudra ajouter pour élever sa température de t à $t + dt$ pourra être représentée par

$$M\,dv + N\,dt,$$

quantité dont l'équivalent mécanique est

$$J\,(M\,dv + N\,dt),$$

J étant l'équivalent mécanique de l'unité de chaleur. Dès lors la mesure mécanique de la totalité de l'effet extérieur produit dans ces circonstances est

$$(p - JM)\,dv - JN\,dt;$$

conséquemment, lorsque l'expansion se sera opérée dans des limites finies, avec accompagnement de changements continus dans la température, l'effet extérieur produit sera en totalité représenté par l'expression

$$\int [(p - JM)\,dv - JN\,dt],$$

dans laquelle on doit supposer que t varie avec v, de manière à représenter à chaque instant la température de la masse, et dans laquelle l'intégration par rapport à v doit être faite dans les limites correspondantes au volume initial et au volume final. Si maintenant, à un moment ultérieur quelconque, le volume et la température de la masse redeviennent ce qu'ils étaient au commencement, quelque arbitraires qu'aient été les

---

* *Rapport sur la théorie de Carnot* (note annexée au n° 26).

** Cette masse peut être composée de différentes substances ou d'une même substance dans des états différents, pourvu que la température soit partout la même.

variations de ces éléments pendant la durée de la période, la somme totale de l'effet extérieur produit devra être nulle, conformément à la première proposition; par suite, l'expression

$$p - \mathrm{JM}\,dv - \mathrm{JN}\,dt$$

doit être la différentielle d'une fonction de deux variables indépendantes, c'est-à-dire qu'on doit avoir

$$1 \qquad \frac{d\,p - \mathrm{JM}}{dt} = \frac{d\,-\mathrm{JN}}{dv};$$

cette formule exprimant simplement la condition que l'intégrale précédente doit disparaître dans tous les cas où les valeurs finales et initiales de v et de t sont respectivement les mêmes. Si l'on observe que J est une constante absolue, on pourra mettre l'expression précédente sous la forme

$$2 \qquad \frac{dp}{dt} = \mathrm{J}\left(\frac{d\mathrm{M}}{dt} - \frac{d\mathrm{N}}{dv}\right).$$

Cette équation exprime d'une manière complète l'application de la première loi fondamentale aux circonstances thermales et mécaniques d'une substance quelconque, exposée à une pression uniforme dans tous les sens, et soumise à toutes les variations possibles de température, de volume et de pression.

21. L'application de la deuxième loi fondamentale à une substance quelconque est représentée complétement par l'équation

$$3 \qquad \frac{dp}{dt} = \varphi\,\mathrm{M},$$

dans laquelle φ n'est autre chose que la fonction de Carnot, une quantité, en effet, dont la valeur absolue est la même pour toutes les substances à la même température, mais qui varie avec la température suivant une loi que l'expérience seule peut déterminer. Pour démontrer cette proposition, on doit d'abord faire remarquer que si la seconde proposition du n° 9 est vraie pour tout cas où la température du réfrigérant diffère infiniment peu de celle de la source, elle doit être vraie d'une manière générale. Cela posé, si, 1° on laisse une substance se dilater de v à $v + dv$, sa température conservant une valeur constante t; si, 2° on la laisse se dilater davantage, sans lui permettre d'absorber ni d'émettre de la chaleur, jusqu'à ce que sa température s'abaissant d'une quantité infiniment petite, devienne $t - \tau$; si, 3°, en conservant à la substance cette température $t - \tau$, on la comprime d'une quantité δ différant de dv seulement d'un infiniment petit du deuxième ordre, telle que sa température redevienne exactement t lorsque, 4°, l'on ramènera définitivement le volume à v, sans permettre à la masse, dans cette quatrième opération, d'absorber ni d'émettre de la chaleur; si, disons-nous, une substance peut subir tous ces changements, elle devra être considérée comme constituant une machine thermodynamique remplissant ce que nous appellerons la *condition de complète réversibilité*, dont il est question dans la proposition de Carnot. Par conséquent, suivant cette même proposition, ladite substance devra produire, avec la

même quantité de chaleur absorbée dans la première opération, le même travail que produirait toute autre substance soumise à la même opération dans les mêmes limites de température. Or $\frac{dp}{dt}\tau\,dv$ est évidemment le travail total exécuté dans un cycle complet; d'un autre côté (d'après la définition de M du n° **20**), $M\,dv$ est la quantité de chaleur absorbée dans la première opération; par conséquent, la valeur de la quantité

$$\frac{\frac{dp}{dt}\tau\,dv}{M\,dv} \quad \text{ou} \quad \frac{\frac{dp}{dt}}{M}\tau$$

doit être la même pour toutes les substances, quand on considère les mêmes valeurs de t et de τ. Enfin, puisque τ entre seulement comme facteur dans cette expression, nous aurons

$$\frac{\frac{dp}{dt}}{M} = \mu, \tag{4}$$

dans laquelle μ ne dépend que de t. Telle est la proposition qu'il s'agissait de démontrer.

22. Le théorème si remarquable de l'égalité de valeur de la quantité $\frac{\frac{dp}{dt}}{M}$, pour toutes les substances à la même température, fut énoncé pour la première fois par Carnot (quoique dans des termes un peu différents) et démontré par lui au moyen des principes qu'il avait adoptés. Nous venons de voir que la vérité de ce théorème peut être établie d'une manière satisfaisante sans recourir à la partie de ces principes entachée d'inexactitude. Conséquemment, toutes les conclusions de Carnot et toutes celles déduites de sa théorie par d'autres auteurs, en tant qu'elles dépendent seulement de l'équation (4), n'ont besoin d'aucune modification, lorsqu'on adopte la *Théorie dynamique*. Par exemple, il y a lieu de maintenir toutes les conclusions renfermées dans les sections I, II et III de l'Appendice à notre *Rapport sur la théorie de Carnot*, et celles contenues dans le Mémoire qui le suit immédiatement dans les *Transactions* et intitulé : *Considérations théoriques sur l'effet d'abaissement que produit la pression sur le point de congélation de l'eau*, travail dû à notre frère aîné. Il suit aussi de là que l'expression donnée par Carnot, pour représenter l'effet mécanique qu'on peut retirer d'une quantité donnée de chaleur, au moyen d'une machine parfaite fonctionnant dans des limites infiniment voisines de température, exprime réellement le plus grand effet qu'il soit possible d'obtenir dans la circonstance; cependant, ce n'est, en réalité, qu'une infiniment petite fraction de la valeur totale de l'équivalent mécanique de la chaleur fournie par la source; le surplus est irrévocablement perdu pour l'homme, quoiqu'il ne soit pas *annihilé*.

23. D'un autre côté, l'expression représentant l'effet mécanique qu'on peut obtenir au moyen d'une quantité donnée de chaleur entrant dans une machine et four-

me par une source à une température donnée, différera beaucoup de l'expression de Carnot, quand on considérera le cas où la température du refrigérant diffère d'une quantité finie de celle de la source; car une quantité finie d'effet mécanique pouvant être obtenue au moyen d'une quantité finie de chaleur entrant dans la machine, une fraction finie de cette dernière quantité devra être transformée en effet mécanique. Les recherches relatives à cette expression, et à la détermination de ses valeurs numériques, fondée sur les chiffres déduits des expériences de M. Regnault sur la vapeur, tels qu'on les trouve dans les Tables I et II de notre premier travail, formeront la deuxième partie du Mémoire que nous soumettons aujourd'hui à l'appréciation de la Société.

DEUXIÈME PARTIE.

Sur la puissance motrice de la chaleur dans des limites finies de la température.

24. Il s'agit de déterminer la quantité de travail que produira, avec une quantité donnée de chaleur H, une machine parfaite alimentée par une source de chaleur à une température quelconque S, et versant la chaleur non utilisée (*waste*) dans un refrigérant à une température quelconque T, plus basse que la première.

25. Nous pouvons supposer que la machine est composée d'un nombre infini de machines parfaites, chacune d'elles travaillant dans des limites infiniment petites de température, et disposées en une série telle, que la première machine a pour source de chaleur la source donnée, que la dernière a pour refrigérant le refrigérant donné, et enfin que chaque machine intermédiaire a pour source de chaleur le réfrigérant de la machine qui la précède immédiatement dans la série. Chacune de ces machines, dans un temps quelconque, verse dans son refrigérant une quantité de chaleur moindre que celle qu'elle a reçue de sa source, et la différence entre ces deux quantités de chaleur est l'équivalent du travail mécanique produit par elle. Cela posé, appelons respectivement t et $t + dt$ les températures du refrigérant et de la source de l'une des machines intermédiaires; désignons par q la quantité de chaleur que la machine verse dans son refrigérant, dans un temps quelconque, et $q + dq$ la quantité qu'elle reçoit de sa source dans le même temps; dès lors la quantité de travail produite par cette machine, pendant ce temps, sera $J\,dq$, conformément à la première proposition; elle sera aussi exprimée par $q.\mu\,dt$, conformément à l'expression de la seconde proposition établie dans le n° **21**; par conséquent, on aura

$$J\,dq = q.\mu\,dt.$$

Par suite, si nous supposons que la durée du temps considéré soit celle pendant laquelle la quantité H de chaleur est fournie par la première source, nous obtiendrons par l'intégration l'expression

$$\log\frac{H}{q} = \frac{1}{J}\int_{t}^{S}\mu\,dt;$$

mais la valeur de q, quand $t = T$, n'est autre chose que la quantité de chaleur restante à la fin des opérations et versée dans le réfrigérant ayant la température T; si donc nous désignons cette quantité par R, nous aurons

$$(5) \qquad \log \frac{H}{R} = \frac{1}{J} \int_T^S \mu\, dt;$$

d'où l'on tire

$$(6) \qquad R = H \varepsilon^{-\frac{1}{J} \int_T^S \mu\, dt}.$$

Or la totalité du travail produit sera l'équivalent mécanique de la quantité de chaleur perdue; si donc on appelle W cette quantité de travail, on aura

$$(7) \qquad W = J(H - R),$$

ou, par suite de l'équation (6),

$$(8) \qquad W = JH\left(1 - \varepsilon^{\frac{1}{J} \int_T^S \mu\, dt}\right)$$

26. Pour comparer cette expression avec celle de $H \int_T^S \mu\, dt$, qui est donnée par la théorie de Carnot [*], comme représentant le rendement de la machine, nous pouvons développer en série la fonction exponentielle de l'équation précédente; on obtient de la sorte

$$(9) \qquad W = \left(1 - \frac{\theta}{1.2} + \frac{\theta^2}{1.2.3} - \ldots\right) H \int_T^S \mu\, dt,$$

expression dans laquelle

$$\theta = \frac{1}{J} \int_T^S \mu\, dt.$$

Cette formule fait voir que la valeur du travail réellement produit, toujours inférieure à la quantité indiquée par la théorie de Carnot, en approche de plus en plus à mesure que l'on diminue l'étendue des limites de la température, et que, finalement, elle lui devient égale, quand cette étendue est infiniment petite, comme si la théorie de Carnot n'avait pas besoin de modification, ce qui est d'accord avec une conclusion établie dans le n° **22**.

27. L'équation (8) fait voir que le rendement réel d'une quantité donnée de chaleur dépensée par la source augmente avec chaque augmentation de l'étendue des limites de la température; elle montre aussi qu'au lieu d'augmenter indéfiniment et proportionnellement à la quantité $\int_T^S \mu\, dt$, comme l'indique la théorie de Carnot, ce rende-

---

(*) *Rapport sur la théorie de Carnot*, équation (7), n° **51**.

ment n'atteint jamais la valeur JH, mais qu'il approche de cette limite à mesure que la quantité $\int_T^{\infty} \mu\, dt$ croît indéfiniment. Ces considérations font perdre, il est vrai, une partie de son importance à la remarque faite par Carnot [*], au sujet de l'avantage pratique que procurerait l'emploi des machines à air ou de tout autre procédé qui permettrait de beaucoup augmenter l'étendue des limites de température, mais en même temps elles nous donnent des idées plus satisfaisantes sur les conditions pratiques du problème. Nous voyons, en effet, que, si nous ne pouvons obtenir en totalité l'effet mécanique équivalent, cependant, quand la source de chaleur sera à une température suffisamment élevée au-dessus des objets environnants, on pourra convertir en effet mécanique une fraction de plus en plus grande de la totalité de la chaleur admise, uniquement en augmentant dans la machine l'étendue des limites de température.

26. Les recherches précédentes (n° 23) font voir que les valeurs de la fonction φ de Carnot, pour toutes les températures comprises dans les limites qu'on aura en vue, et la valeur absolue de l'équivalent J constituent des données suffisantes pour calculer la quantité d'effet mécanique que produira une machine parfaite, quelle qu'elle soit, machine à vapeur d'eau, machine à air, ou même machine thermo-électrique; puisque, en effet, conformément à l'axiome établi dans le n° 12 et à la démonstration de la seconde proposition, aucun agent matériel inanimé ne peut produire, avec une quantité donnée de chaleur et dans les limites actuelles de température, une plus grande somme d'effet mécanique qu'une machine satisfaisant aux conditions énoncées dans la seconde proposition.

29. L'équivalent mécanique de l'unité thermale de l'échelle Fahrenheit, c'est-à-dire de la quantité de chaleur nécessaire pour élever la température de 1 livre d'eau de 32 à 33 degrés Fahrenheit, a été déterminé, par M. Joule, de Manchester, en livres élevées à 1 pied (*in foot-pounds*); et le chiffre qu'il donne comme devant inspirer le plus de confiance est 772,69. M. Rankine prend 772 comme résultant des déterminations de M. Joule, et il estime que ce résultat est à $\frac{1}{300}$ près le chiffre exact. Si nous adoptons $772\frac{2}{9}$, et si nous le multiplions par $\frac{9}{5}$, nous obtiendrons 1390 pour expression de l'équivalent mécanique de l'unité thermale de l'échelle centigrade. Telle est la quantité que nous prenons pour la valeur de J dans les applications numériques qu'on trouvera plus bas.

30. En ce qui concerne la détermination des valeurs de φ à différentes températures, on doit remarquer que l'équation (1) fait voir que cette détermination pourrait se faire au moyen d'expériences sur une substance quelconque d'une contexture indestructible, et qu'elle indique exactement quelles sont les données expérimentales nécessaires dans

[*] *Rapport sur la théorie de Carnot*, Appendice, section IV.

chaque cas. Par exemple, en supposant d'abord que l'intermédiaire choisi est l'air, puisque cet intermédiaire est composé en partie d'eau liquide et en partie de vapeur saturée, nous déduisons, comme on le verra dans la troisième partie de ce Mémoire, les deux expressions (6) que nous avons données, dans le n° 30 de notre premier travail (*Rapport sur la théorie de Carnot*), pour la valeur de μ à une température quelconque. Jusqu'à présent, il n'a été fait sur l'air aucune expérience qui puisse fournir les données nécessaires pour calculer les valeurs de μ, dans des limites étendues de la température; mais, pour des températures comprises entre 50 et 110 degrés Fahrenheit, les données se prêtant le plus directement à cette détermination qu'on ait encore obtenues, sont fournies par les expériences [*] entreprises par M. Joule pour évaluer la quantité de chaleur qui est développée, quand on emploie une quantité donnée de travail à comprimer de l'air à une température constante. En effet, soient Q la quantité de chaleur développée par la compression d'un fluide soumis à la loi d'expansion et de compressibilité des gaz, W le travail mécanique dépensé, t la température constante du fluide; par suite de l'équation (11) du n° 49 de notre premier travail, nous avons

$$(10) \qquad \mu = \frac{W.E}{Q\,(1 + Et)}.$$

formule qui n'est, en réalité, qu'une conséquence d'une autre valeur de μ, exprimée en fonction des données relatives à l'air. Certaines considérations sur la détermination de μ par des expériences de cette nature, ou par des expériences d'un autre ordre, sur l'air atmosphérique, imaginées par M. Joule, formeront le sujet d'une communication que nous espérons pouvoir faire à la Société dans une autre occasion.

31. La seconde des expressions (6) du n° 30 de notre premier travail, ou la formule équivalente (32), qu'on trouvera plus bas dans le présent Mémoire, montre qu'on peut obtenir la valeur de μ à une température quelconque, au moyen des valeurs, à cette température, des éléments suivants :

1°. La loi suivant laquelle varie, avec la température, la pression de la vapeur saturée;

2°. La chaleur latente d'un poids donné de vapeur d'eau saturée;

3°. Le volume d'un poids donné de vapeur d'eau saturée;

4°. Le volume d'un poids donné d'eau.

Le dernier de ces éléments, en raison de la manière dont il entre dans les formules, peut être regardé comme constant, sans produire un effet appréciable sur l'exactitude probable du résultat.

* Voir le travail intitulé : *Sur les changements de température produits par la raréfaction et la condensation de l'air*. *Philosophical Magazine*, vol. XXVI, mai 1845.

32. Les expériences de M. Regnault fournissent le premier de ces éléments, avec une grande exactitude pour toutes les températures comprises entre — 32 et 230 degrés centigrades.

33. Pour ce qui regarde le second de ces éléments, on doit remarquer que tous les expérimentateurs, depuis Watt, qui le premier a étudié le sujet, jusqu'à M. Regnault, dont les déterminations sont, de toutes celles qui ont été faites, et les plus exactes et les plus étendues, tous paraissent avoir admis, explicitement ou tacitement, l'axiome de Carnot, dont la *Théorie dynamique de la chaleur* démontre l'inexactitude; de telle sorte qu'ils ont appelé *chaleur totale de la vapeur*, « la quantité de chaleur nécessaire pour convertir une unité de poids d'eau à 0 degré en vapeur existant dans l'état » particulier qu'ils considéraient. C'est ainsi que M. Regnault, en posant préalablement cette définition de la *chaleur totale de la vapeur saturée*, donne les valeurs expérimentales de la quantité ainsi définie, pour toutes les températures comprises entre 0 et 230 degrés, et qu'il en déduit la *chaleur latente de la vapeur saturée*, en retranchant de cette chaleur totale la quantité nécessaire pour élever le liquide à la température de la vapeur considérée. Or, suivant les principes de la *Théorie dynamique*, la quantité de chaleur nécessaire pour transformer l'unité de poids d'eau à 0 degré en vapeur saturée, dépend de la manière (variable à l'infini) dont on effectue la transformation en question; et la différence entre les quantités de chaleur nécessaires dans les différents cas, est égale à la différence qui existe entre les équivalents thermaux des effets mécaniques produits pendant l'expansion. Ainsi, par exemple, la quantité totale de chaleur nécessaire pour vaporiser d'abord une certaine quantité d'eau à 0 degré, et pour élever ensuite cette vapeur à 100 degrés, tout en la maintenant à l'état de saturation [*], ne doit pas atteindre en valeur absolue les $\frac{3}{4}$ de la quantité de chaleur nécessaire pour élever d'abord la température du liquide à 100 degrés et pour le transformer ensuite en vapeur à cette température; malgré cette différence, cependant, l'une et l'autre de ces quantités sont comprises dans la définition, citée plus haut et généralement admise, de la chaleur totale de la vapeur saturée. Pour trouver la signification réelle de ce que M. Regnault a déterminé, dans ses expériences, comme étant la chaleur totale de la vapeur saturée, il est nécessaire de remarquer que ses évaluations portent sur les quantités de chaleur émises par un certain poids d'eau passant dans un appareil calori-

* *Voir* plus bas le n° 33, troisième partie, dans lequel il est question de la chaleur spécifique négative de la vapeur saturée. Si la valeur moyenne de cette quantité, entre 0 et 100, est de [illegible], chiffre dont elle ne doit pas beaucoup s'éloigner), il devra y avoir dégagement d'une quantité de chaleur égale à 100 unités, si l'on élève, au moyen de la compression, de 0 à 100 degrés la température d'une livre de vapeur saturée. La chaleur latente de la vapeur à 0 degré étant de 606, 5, la quantité de chaleur nécessaire pour convertir une livre d'eau à 0 degré en vapeur saturée à 100 degrés, par le premier des procédés décrits dans le texte, sera finalement de 506, 5. C'est à dire à peu près les $\frac{7}{8}$ de la quantité 637 trouvée par M. Regnault pour représenter ce qu'il appelle la *chaleur totale* de la vapeur saturée à 100 degrés.

métrique, dans lequel elle entre à l'état de vapeur saturée, et d'où elle sort à l'état liquide, les résultats obtenus étant d'ailleurs ramenés à ce qu'ils auraient été si la température finale de l'eau eût été exactement égale à 0 degré. Or, comme il ne se produit, dans ces circonstances, aucun effet mécanique extérieur (si ce n'est celui du son, lequel doit être probablement tout à fait inappréciable), le seul effet extérieur consiste en émission de chaleur; conséquemment, conformément au principe fondamental de la *Théorie dynamique*, les résultats doivent être indépendants des actions intermédiaires. Il en résulte que, quelle que soit la manière dont la vapeur traverse le calorimètre, quelque basse que soit la pression à laquelle peut avoir lieu la condensation *, la chaleur transmise à l'extérieur doit être exactement la même que si la condensation avait lieu à la pression totale de la vapeur saturée, telle qu'elle est à son entrée dans le calorimètre; d'où nous concluons que la *chaleur totale*, telle que M. Regnault l'évalue dans ses expériences, représente la quantité de chaleur nécessaire pour élever d'abord le liquide à la température que l'on a en vue, et pour la transformer ensuite en vapeur à cette température; dès lors le principe suivant lequel ce physicien détermine la chaleur latente est exact; par conséquent, dans les limites de température 0 et 230 degrés, nous pouvons accepter ses chiffres comme des données complètement satisfaisantes pour la détermination des valeurs de μ.

34. Il ne reste plus que le troisième des éléments ci-dessus, à savoir, le volume d'un poids donné de vapeur saturée, à l'égard duquel il nous manque des résultats exacts, pour des limites étendues de la température; aucune recherche n'ayant été faite à ce sujet depuis la publication de notre premier travail, nous ne voyons pas de raison pour supposer que les valeurs de μ, que nous y avons consignées, ne sont pas les plus probables qu'il soit possible d'obtenir dans l'état actuel de la science; dès lors, et s'il reste

---

* Si la vapeur est obligée de traverser un tube long et étroit, ou un petit orifice, placé dans l'appareil calorimétrique, il y aura diminution de la pression avant que la condensation ait lieu, et, par suite, il se trouvera, dans deux parties différentes du calorimètre, de la vapeur saturée à des températures différentes (comme il arriverait, par exemple, si la vapeur, sortant d'une chaudière à haute pression, était distillée à l'air libre); cependant, en raison de la chaleur développée par le frottement intérieur du fluide, laquelle est précisément l'équivalent de l'effet mécanique dû à l'expansion et perdu par suite du mouvement du fluide, la quantité de chaleur mesurée par le calorimètre sera exactement la même que si la condensation avait lieu à une pression non différente de celle de la vapeur entrante. Ces circonstances du phénomène ont échappé à M. Clausius (*Annales de Poggendorff*, 1850, n° 4, page 510), lorsqu'il exprime des doutes sur la possibilité d'obtenir des valeurs exactes de la chaleur latente de la vapeur saturée, en retranchant la chaleur sensible de la *chaleur totale* de M. Regnault, alléguant pour raison que, dans les expériences de ce physicien, la condensation doit avoir eu lieu à la même pression que la vaporisation ou du moins à une pression très-voisine. La question n'est pas celle-ci : « La condensation a-t-elle eu lieu à une pression plus » basse que celle de la vapeur entrante? » mais bien celle-ci : « Dans les expériences de M. Regnault, la vapeur a-t-elle fait fonctionner une machine pendant son passage dans le calorimètre, » ou bien s'est-il produit, quand la vapeur se précipitait dans l'instrument, assez de bruit pour » transformer une portion notable de la chaleur totale en effet mécanique? » Répondre négativement à cette question, c'est nous autoriser suffisamment à adopter avec certitude l'opinion qui regarde comme exact le principe qui sert de base à la détermination de la chaleur latente.

d'ailleurs bien entendu, comme nous l'avons dit dans le n° 33 dudit travail, que des expériences exactes sur les densités des vapeurs saturées à différentes températures pourront signaler des erreurs considérables dans les valeurs de ces densités calculées conformément aux lois des gaz, et pourront, par suite, amener des changements considérables dans nos résultats, nous continuerons à nous servir, comme base de nos applications numériques, de la Table I du travail cité plus haut, dans laquelle on trouve les valeurs de μ pour toutes les températures $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, ..., $230\frac{1}{2}$ degrés, c'est-à-dire la valeur moyenne de cette quantité pour les 230 premiers degrés centigrades (à partir du point de congélation) du thermomètre à air. On peut ajouter que si, ultérieurement, des recherches expérimentales, suffisamment dignes de confiance au point de vue de l'exactitude, et entreprises sur l'air ou sur toute autre substance, conduisaient à des valeurs de μ différentes de celles dont il est question plus haut, on devrait considérer ce fait comme prouvant qu'il existe une différence entre les véritables densités des vapeurs saturées et celles que nous avons supposées [*].

35. La Table II de notre premier travail, dans laquelle sont consignées les valeurs de $\int_0^t \mu\, dt$ pour $t = 1$, $t = 2$, ..., $t = 230$, permet de calculer aisément la somme d'effet mécanique qu'il est possible de retirer d'une quantité donnée de chaleur, au moyen d'une machine parfaite fonctionnant dans une étendue quelconque de l'échelle thermométrique, pourvu que les températures considérées soient comprises entre 0 et 230 degrés; en effet, la quantité qui doit être divisée par J [**] dans l'expression (8), s'obtiendra en retranchant le chiffre de cette Table qui correspond à la valeur de T, du chiffre correspondant à la valeur de S.

36. Les Tables suivantes donnent les résultats numériques obtenus par ce procédé, ainsi qu'un petit nombre de chiffres (*voir* la Table supplémentaire) calculés pour des

[*] Nous ne pouvons croire que telle ou telle hypothèse, semblable à celle adoptée par M. Clausius comme base de ses recherches, et laquelle conduit, comme il le montre, à des valeurs pour la densité de la vapeur aqueuse saturée à différentes températures, qui accusent des déviations considérables aux lois suivant lesquelles varie la densité des gaz avec la température et la pression, nous ne pouvons croire qu'une telle hypothèse soit plus probable que celle qui consiste à supposer, comme on le fait habituellement, que la densité des vapeurs varie conformément à ces lois. Dans l'état actuel de la science, on aurait tort d'affirmer que l'une des hypothèses est plus probable ou diffère moins de la vérité que l'autre.

[**] On doit remarquer que l'unité de force employée dans la détermination des valeurs de μ est le poids d'une livre de matière à Paris, et que l'unité de force qui entre dans l'expression de J est le poids d'une livre de matière à Manchester; et que, par suite, en vue d'une exactitude rigoureuse, les chiffres devraient être modifiés de manière à se rapporter à une commune unité de force. Mais la gravité à Paris différant de $\frac{1}{2000}$ au plus de celle de Manchester, la correction qu'on apporterait serait moindre que les erreurs probables provenant d'autres causes, par suite, elle doit être regardée comme négligeable.

températures supérieures à 230 degrés, en prenant pour base la loi suivant laquelle varie la fonction $\int_{0}^{t} \mu\, dt$ dans les limites des expériences.

57. *Explication des Tables.*

La colonne I contient les limites de température.

La colonne II contient quelques cas des autres limites de température (déduites de la Table II de notre premier travail) pour lesquelles les valeurs de $\int_{0}^{t} \mu\, dt$ sont les mêmes que pour les limites correspondantes de la colonne I.

Les chiffres de la colonne III représentent le rendement en force mécanique que donnerait l'unité de chaleur, si la théorie de Carnot n'avait pas besoin de modification (c'est-à-dire le rendement de l'unité de chaleur, et des quantités supplémentaires de chaleur fournies pour compenser celles qui sont converties en effet mécanique aux diverses températures comprises entre les limites).

Les chiffres de la colonne IV représentent le rendement réel de l'unité de chaleur; la comparaison de ces chiffres avec ceux de la colonne III montre de combien ce rendement réel est inférieur au rendement théorique de Carnot.

Les chiffres de la colonne VI ont été calculés par la formule

$$R = \varepsilon^{\frac{1}{1390}\int_{T}^{S} \mu\, dt},$$

dans laquelle

$$\varepsilon = 2,71828\ldots,$$

et dans laquelle on a successivement substitué à $\int_{T}^{S} \mu\, dt$ les quantités de la colonne III.

Les chiffres de la colonne IV ont été calculés par la formule

$$W = 1390(1 - R)$$

et au moyen des valeurs de $(1 - R)$ de la colonne V.

LIMITES des temperatures. I		II.		III. RENDEMENT de l'unité de chaleur d'après la théorie de Carnot.	IV. RENDEMENT d'une unité de chaleur fournie par la source.	V. QUANTITÉ de chaleur convertie en effet mécanique	VI. QUANTITÉ de chaleur perdue.
S	T	S	T	$\int_T^S \varphi\, dt$ livres élevées à 1 pied	W livres élevées à 1 pied.	1 − R	R

38. *Table de la puissance motrice de la chaleur.*

1°	0°	51,08	30°	1,960	4,948	0,00356	0,99644
10	0	40,86	30	48,987	48,1	0,0146	0,9654
20	0	51,7	30	96,656	93,4	0,067	0,933
30	0	62,6	30	143,060	136,0	0,098	0,902
40	0	73,6	30	188,290	176,0	0,127	0,873
50	0	84,5	30	232,180	214,0	0,154	0,846
60	0	95,4	30	274,970	249,0	0,179	0,821
70	0	106,3	30	316,650	283,0	0,204	0,796
80	0	117,2	30	357,270	315,0	0,227	0,773
90	0	128,0	30	396,930	345,0	0,248	0,752
100	0	138,8	30	435,690	374,0	0,269	0,731
110	0	149,1	30	473,600	401,0	0,289	0,711
120	0	160,3	30	510,770	427,0	0,308	0,692
130	0	171,0	30	547,210	452,0	0,325	0,675
140	0	181,7	30	582,980	476,0	0,343	0,657
150	0	192,3	30	618,140	499,0	0,359	0,641
160	0	203,0	30	652,740	521,0	0,375	0,625
170	0	213,6	30	686,800	542,0	0,390	0,610
180	0	224,2	30	720,390	562,0	0,404	0,596
190	0	190,0	0	753,500	582,0	0,418	0,582
200	0	200,0	0	786,170	600,0	0,432	0,568
210	0	210	0	818,450	619,0	0,445	0,555
220	0	220	0	850,340	636,0	0,457	0,542
230	0	230	0	881,870	653,0	0,470	0,530

39. *Table supplémentaire de la puissance motrice de la chaleur.*

101,3	0	140	30	419,9	377,0	0,271	0,729
105,8	0	230	100	446,2	382,0	0,275	0,725
300	0	300	0	1099,0	757,0	0,545	0,455
400	0	400	0	1395,0	879,0	0,632	0,368
500	0	500	0	1690,6	979,0	0,704	0,296
600	0	600	0	1980,0	1059,0	0,762	0,238
∞	0	∞	0	∞	1390,0	1,000	0,000

40. Si l'on prend pour exemple les limites 30 et 140 degrés, qu'on rencontre dans quelques-unes des meilleures machines à vapeur qui aient été construites (*), on trouvera dans la colonne IV de la Table supplémentaire le chiffre 377 livres élevées à 1 pied pour représenter le rendement de l'unité de chaleur, au lieu de 440 inscrit dans la colonne III, comme étant le rendement indiqué par la théorie de Carnot. Nous en concluons que le travail produit en 1845 par la machine de Fowey-Consols, au lieu d'être de $57\frac{1}{2}$ pour 100, a été en réalité de 67 pour 100, c'est-à-dire les $\frac{2}{3}$ du travail produit par une machine parfaite fonctionnant dans les mêmes limites de température; or ce dernier travail est les 0,271 (un peu plus du quart) de l'équivalent total de la chaleur employée; d'où l'on conclut que la machine à vapeur en question a converti en effet mécanique la fraction $\frac{1}{5,49}$ de la chaleur dépensée, c'est-à-dire 18 pour 100.

41. Les derniers chiffres de la Table supplémentaire font voir quel avantage considérable on pourrait obtenir en perfectionnant la machine à air, ou en employant toute autre machine thermodynamique dans laquelle on augmenterait l'étendue des limites de la température fort au delà de ce qu'on peut réaliser dans les machines à vapeur d'eau. Ainsi, une machine à air, dont la partie chaude serait à 600 degrés et la partie froide à 0 degré centigrade, et qui fonctionnerait dans des conditions parfaites d'économie, pourrait convertir en effet mécanique 76 pour 100 de la chaleur totale employée; ou, si elle travaillait avec la même économie que la machine de Fowey-Consols, c'est-à-dire en produisant 67 pour 100 du rendement correspondant à des limites de température, cette machine à air transformerait en effet mécanique 51 p. 100 de toute la chaleur dépensée.

42. Dans une Lettre du 9 décembre 1848, M. Joule nous a suggéré l'idée que la véritable valeur de μ pourrait bien varier « *en sens inverse de la température à partir de zéro* » (**), et nous a communiqué les valeurs de cette quantité, à différentes tempéra-

---

(*) *Voir* l'Appendice au *Rapport sur la théorie de Carnot*, section V.

(**) Si nous faisons

$$\mu = K\frac{E}{1+E.t},$$

dans laquelle K peut être une constante quelconque, nous aurons

$$W = J\left(\frac{S-T}{\frac{1}{E}+S}\right)^{\frac{K}{J}},$$

formule que nous donnions dans la lecture du présent travail. Depuis, nous avons remarqué que l'hypothèse de M. Joule indique essentiellement que le coefficient K doit être, comme dans notre texte, l'équivalent mécanique de l'unité de chaleur. Dans une Lettre du 27 mars 1851, M. Rau-

tures, calculées par la formule

$$(11) \qquad z = J\frac{E}{1 - Ez},$$

pour que nous les comparions avec les valeurs que nous avions obtenues [illegible] des données relatives à la vapeur d'eau. Cette formule est également adoptée par M. Clausius qui s'en sert, comme base fondamentale, dans ses recherches analytiques sur le sujet qui nous occupe. Si z pouvait être représenté exactement par cette formule, on aurait

$$\int_T^S z\,dt = J\log\frac{1 - ES}{1 - ET}$$

et, par suite, les équations (1) et (2) deviendraient

$$(12) \qquad W = J\frac{S - T}{\frac{1}{E} - S}.$$

$$(13) \qquad R = \frac{\frac{1}{E} - T}{\frac{1}{E} - S}.$$

43. Les raisons sur lesquelles se fonde M. Joule pour penser que l'équation (11) peut être l'expression exacte de la fonction de Carnot, quoique les résultats fournis par elle diffèrent considérablement des chiffres contenus dans la Table I de notre premier travail, ces raisons formeront le sujet d'une communication que nous aurons l'occasion de faire à la Société avant la clôture de la présente session.

TROISIÈME PARTIE.

Application de la théorie dynamique de l'équivalence de la chaleur à certaines propriétés physiques de toutes les substances.

44. Les deux équations fondamentales de la théorie dynamique de la chaleur, [illegible] plus haut, expriment les relations qui existent entre les quantités de chaleur nécessaires pour produire des changements de volume et de température dans une substance matérielle quelconque soumise à une pression uniforme dans tous les sens, et elles conduisent à plusieurs conclusions remarquables. Telles sont celles qui, étant [illegible]

[illegible] nous avons montré, qu'au moyen des principes exposés dans le Mémoire qu'il a [illegible] l'année dernière à la Société royale, il est parvenu à établir une formule qui donne le rapport de la quantité maximum de chaleur convertie en effet mécanique, à la totalité de la chaleur dépensée, dans une machine expansive quelconque; et nous trouvons qu'elle concorde exactement avec l'expression [illegible] que nous donnons dans le texte comme conséquence de l'hypothèse suggérée par M. Joule au sujet de la valeur de z à une température quelconque. (avril 1851.)

dépendantes du principe de M. Joule, équation (2) du n° 20, et de l'hypothèse, vraie ou fausse, de Carnot, sur la permanence de la chaleur, sont communes à sa théorie et à la théorie dynamique, et parmi ces dernières, quelques-unes des plus importantes [*] ont été données par Carnot lui-même et par les auteurs qui ont adopté après lui, sans modification, les mêmes principes et le même mode de raisonnement. L'équation

$$\frac{dM}{dt} - \frac{dN}{dv} = 0,$$

qui est l'expression analytique de l'hypothèse de Carnot [**] et qui, par suite, pouvait indiquer un procédé expérimental pour en vérifier l'exactitude, a pu conduire à d'autres déductions remarquables; mais il n'est pas parvenu à notre connaissance que personne ait obtenu et publié, en se fondant sur cette hypothèse, des conclusions qui ne sont pas comprises dans la loi générale de Carnot relative à la puissance motrice de la chaleur dans des limites finies de la température.

45. Les publications récentes de MM. Rankine et Clausius contiennent, au sujet des propriétés physiques des différentes substances, quelques-unes des conséquences qui découlent du principe fondamental de la théorie dynamique [**]; parmi elles on peut citer, d'une part, une découverte remarquable, faite simultanément par les deux auteurs, sur la chaleur spécifique de la vapeur d'eau (sujet que nous traitons ci-dessous dans le n° 58), et, d'autre part, une propriété particulière de l'eau à son point de congélation, déduite par M. Clausius de ses recherches sur l'eau et la glace soumises à une pression extérieure, et de laquelle il résulte que la chaleur latente de l'eau, dont la valeur est de 79 sous la pression atmosphérique, diminue d'une quantité égale à 0,081, pour chaque dixième de degré dont on abaisse le point de congélation de l'eau en la soumettant à une pression extérieure. Les recherches de ces deux auteurs supposent l'existence fondamentale de diverses hypothèses qui sont susceptibles d'être plus ou moins démenties ou confirmées par l'expérience; de telle sorte qu'il est assez difficile d'inférer de leurs écrits quelle portion de leurs conclusions, particulièrement en ce qui concerne l'air et les gaz en général, dépend uniquement des principes fondamentaux de la théorie dynamique.

46. Dans ce qui va suivre, nous établissons les propriétés des substances matérielles, au point de vue de la chaleur spécifique, en faisant l'application de nos deux propositions fondamentales, exprimées analytiquement par les deux équations

$$\frac{dM}{dt} - \frac{dN}{dv} = \frac{1}{J}\frac{dp}{dt} \qquad \text{[équation (2) du n° 20]},$$

$$M = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dt} \qquad \text{[équation (3) du n° 21]},$$

[*] *Voir* ci-dessus, n° 22.

[**] *Voir* ci-dessus la première proposition fondamentale.

et cette application est faite séparément au cas d'un fluide dont la densité varie rigoureusement suivant les lois des gaz, et au cas d'un milieu composé de plusieurs parties, à la même température, mais se présentant dans des états différents, comme, par exemple, de l'eau avec de la vapeur saturée, ou de l'eau avec de la glace.

47. On doit d'abord remarquer que, suivant la définition de M et N contenue dans le n° **20**, N doit être ce qu'on appelle habituellement la *chaleur spécifique à volume constant* d'une substance, pourvu toutefois que la quantité considérée de cette substance soit le poids-type adopté dans l'expression des chaleurs spécifiques; pour cette raison, nous adopterons dorénavant l'unité de poids en question. Dès lors, l'équation fondamentale de la théorie dynamique, c'est-à-dire l'équation (2) du n° **20** exprime une relation entre cette chaleur spécifique et les quantités M et p. Si nous éliminons M de cette expression, au moyen de l'équation (3) du n° **21** que l'on déduit de l'expression analytique du deuxième principe fondamental de la théorie de la puissance motrice de la chaleur, nous aurons

$$(14)\qquad \frac{dN}{dv} = \frac{d\left(\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dt}\right)}{dt} - \frac{1}{J}\frac{dp}{dt},$$

équation qui représente la relation qui existe, d'une part, entre la variation que produit, dans la chaleur spécifique à volume constant d'une substance quelconque, un changement de volume opéré à une température constante, et, d'autre part, entre la variation que subit la pression par suite d'un changement de température, le volume restant constant; cette expression renferme la fonction μ de la température, identique pour toutes les substances.

48. Soit maintenant K la chaleur spécifique à pression constante. Si les quantités dv et dt ont entre elles une relation telle, que la pression du milieu, quand son volume et sa température sont respectivement $v + dv$ et $t + dt$, soit absolument la même que que quand ce volume et cette température sont v et t, c'est-à-dire si l'on a

$$0 = \frac{dp}{dv}dv + \frac{dp}{dt}dt,$$

on aura

$$K\,dt = M\,dv + N\,dt,$$

d'où l'on conclut

$$(15)\qquad M = \frac{-\frac{dp}{dv}}{\frac{dp}{dt}}(K - N),$$

expression qui montre la signification de la quantité que nous avons appelée M, en fonction des deux chaleurs spécifiques. Si l'on substitue la valeur de M qui découle de

l'équation (3) du n° **21**, on aura

$$(16)\qquad K - N = \frac{\left(\frac{dp}{dt}\right)^2}{\mu \times \left(-\frac{dp}{dv}\right)},$$

c'est-à-dire la valeur de la différence entre les deux chaleurs spécifiques, déduite, sans l'aide d'aucune hypothèse, du deuxième principe fondamental de la théorie dynamique de la chaleur.

49. On peut mettre ces résultats sous une forme plus commode pour l'application qu'on peut en faire aux substances solides et liquides; il suffit pour cela d'introduire la notation suivante

$$(17)\qquad \varkappa = v \times \left(-\frac{dp}{dv}\right), \quad e = \frac{1}{\varkappa}\frac{dp}{dt},$$

$\frac{1}{\varkappa}$ représentant la valeur de la compressibilité et le coefficient de dilatation par la chaleur.

Les équations (14), (16) et (3) deviennent alors

$$(18)\qquad \frac{dN}{dv} = \frac{d\left(\frac{\varkappa e}{\mu}\right)}{dt} = \frac{\varkappa e'}{\mu},$$

$$(19)\qquad K - N = v\frac{\varkappa e^2}{\mu},$$

$$(20)\qquad M = \frac{1}{\mu}\cdot\varkappa e;$$

la troisième de ces équations étant là pour montrer d'une manière explicite la quantité de chaleur développée par la compression de la substance maintenue à une température constante. Enfin, si θ représente l'élévation de température qui est produite par la compression du volume de $v + dv$ à v, avant qu'aucune quantité de chaleur soit dégagée extérieurement, nous aurons

$$(21)\qquad \theta = \frac{1}{N}\frac{\varkappa e}{\mu}dv = \frac{\varkappa e}{\mu K - v\varkappa e^2}dv.$$

50. La première de ces valeurs de θ montre que, lorsque la substance se contracte pendant que sa température s'élève (ce qui arrive, par exemple, à l'eau entre le point de sa congélation et le point correspondant au maximum de densité), une compression subite produirait dans la substance un abaissement de température. La deuxième expression donne exactement, en fonction de la compressibilité et de la dilatabilité, quel changement apporterait à la température un changement de volume infiniment petit; elle conduit d'ailleurs à la valeur approchée

$$\theta = \frac{\varkappa e}{\mu K},$$

si, comme c'est probablement le cas de toutes les substances solides et liquides connues, la valeur de c est assez faible pour que la quantité $c.cke$ soit très-petite par rapport à μK.

31. Considérons maintenant une substance gazeuse, et introduisons dans nos formules l'hypothèse que la variation de sa densité ait lieu rigoureusement suivant les lois des gaz; nous aurons alors, d'après la loi de Boyle et de Mariotte, relative à la compression,

$$\frac{dp}{dv} = -\frac{p}{v}, \tag{22}$$

et, d'après la loi de Gay-Lussac,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{Ev}{1 + Et}, \tag{23}$$

d'où nous tirons

$$\frac{dp}{dt} = \frac{Ep}{1 + Et}.$$

L'équation (14) deviendra, par suite,

$$\frac{dN}{dv} = \frac{d\left[\frac{Ep}{\mu(1 + Et)} - \frac{p}{J}\right]}{dt}, \tag{24}$$

résultat particulier à la théorie dynamique.

L'équation (16) deviendra également

$$K - N = \frac{E.pv}{\mu(1 + Et)}, \tag{25}$$

expression qui s'accorde avec le résultat du n° 55 de notre premier travail. Si V représente le volume du gaz à la température de 0 degré et sous l'unité de pression, l'équation (25) devient

$$K - N = \frac{EV}{\mu(1 + Et)}. \tag{26}$$

32. Toutes les conclusions de M. Clausius, en ce qui concerne l'air ou les gaz, peuvent s'obtenir immédiatement au moyen des équations précédentes, en prenant

$$\mu = J\frac{E}{1 + Et},$$

ce qui donnera

$$\frac{dN}{dv} = 0,$$

et en supposant, comme lui, que la valeur de N, déjà indépendante de la densité du

gaz en raison de cette dernière équation, est également indépendante de la température.

53. Pour faire une dernière application des équations fondamentales de la théorie dynamique, supposons que le milieu, pour lequel on a défini les quantités M et N, soit composé du poids $1-x$ d'une substance dans un certain état, et du poids x de la même substance dans un autre état, à la même température, mais contenant une plus grande quantité de chaleur latente. Pour fixer les idées et éviter les circonlocutions, nous supposerons que la première portion est à l'état liquide, et la seconde partie à l'état gazeux; mais, comme on le verra, tout ce que nous dirons s'applique également au cas d'un solide en contact avec la même substance, soit à l'état liquide, soit à l'état gazeux.

54. Supposons que v et t soient respectivement le volume et la température du milieu considéré dans son ensemble; nous aurons

$$\lambda(1-x)+\gamma x=v, \tag{27}$$

si λ et γ représentent respectivement les volumes de l'unité de poids de la substance dans ses deux états; d'un autre côté, la pression p peut être considérée comme étant une fonction de t dépendante uniquement de la nature de la substance considérée. Pour exprimer les valeurs de M et de N pour le milieu composé dont il s'agit, appelons L la chaleur latente de l'unité de poids de la vapeur, c la chaleur spécifique du liquide, et h la chaleur spécifique de la vapeur maintenue à l'état de saturation; nous aurons

$$M\,dv = L\frac{dx}{dv}\,dv,$$

$$N\,dt = c(1-x)\,dt + hx\,dt + L\frac{dx}{dt}\,dt.$$

Or l'équation (27) nous donnera

$$\gamma-\lambda)\frac{dx}{dv}=1 \tag{28}$$

et

$$(\gamma-\lambda)\frac{dx}{dt}+(1-x)\frac{d\lambda}{dt}+x\frac{d\gamma}{dt}=0; \tag{29}$$

on en tire donc

$$M=\frac{L}{\gamma-\lambda}, \tag{30}$$

$$N=c(1-x)+hx-L\frac{(1-x)\frac{d\lambda}{dt}+x\frac{d\gamma}{dt}}{\gamma-\lambda}. \tag{31}$$

55. L'expression de la deuxième proposition fondamentale devient, dans ce cas,

$$\mu=\frac{(\gamma-\lambda)\frac{dp}{dt}}{L}, \tag{32}$$

équation qui s'accorde avec le résultat original de Carnot, et qui n'est autre chose que la formule, mentionnée ci-dessus au n° **31**, qui nous a servi à déterminer μ au moyen des observations de M. Regnault sur la vapeur d'eau.

36. Pour obtenir la conclusion qu'on peut tirer de la première proposition fondamentale, nous différentierons, par rapport à t et v, les deux valeurs ci-dessus de M et de N, et nous aurons

$$\frac{dM}{dt} = \frac{1}{\gamma - \lambda} \cdot \frac{dL}{dt} - \frac{L}{(\gamma - \lambda)^2} \cdot \frac{d(\gamma - \lambda)}{dt},$$

$$\frac{dN}{dv} = \left(h - c - L \frac{\frac{d\gamma}{dt} - \frac{d\lambda}{dt}}{\gamma - \lambda} \right) \frac{dx}{dv} = \left[\frac{h - c}{\gamma - \lambda} - \frac{L}{(\gamma - \lambda)^2} \right] \frac{d(\gamma - \lambda)}{dt}.$$

Par suite, l'équation (2) du n° **20** devient

$$\frac{\frac{dL}{dt} + c - h}{\gamma - \lambda} = \frac{1}{J} \frac{dp}{dt}. \tag{33}$$

Si l'on combine cette équation avec l'expression (32) tirée de la deuxième proposition fondamentale, on aura

$$\frac{dL}{dt} + c - h = \frac{L\mu}{J}; \tag{34}$$

l'équation (33) concorde exactement avec une expression, donnée pour la première fois, par M. Clausius, et la méthode d'investigation précédente est en substance la même que celle employée par ce savant. La deuxième équation diffère d'une autre expression donnée également par M. Clausius, seulement en ce sens qu'elle n'implique aucune hypothèse relativement à la forme de la fonction μ de Carnot.

37. Si nous supposons les quantités μ et L connues pour une certaine température quelconque, l'équation (32) nous donnera le moyen de déterminer la valeur de $\frac{dp}{dt}$ pour cette température; par suite, si nous en tirons la valeur de dt, nous aurons

$$dt = \frac{\gamma - \lambda}{\mu L} dp, \tag{35}$$

expression qui montre quel changement produit la pression sur le point d'ébullition du liquide, quand le milieu est composé d'un liquide et de sa vapeur, ou sur le point de fusion du solide, quand le milieu consiste en un solide en contact avec la même substance à l'état liquide. Cette expression s'accorde avec la conclusion à laquelle est arrivé notre frère aîné dans ses *Recherches théoriques sur l'effet d'abaissement que produit la pression sur le point de congélation de l'eau* [*]. Le résultat qu'il a obtenu en

[*] *Transactions*, vol. XVI, cinquième partie. Son travail a été publié de nouveau, avec de légères modifications, dans le *Journal de Mathématiques de Cambridge et Dublin*, nouvelle série, vol. V.— Novembre 1850.

prenant pour μ la valeur, à la température de 0 degré, qui découle de la Table I de notre premier travail, peut s'énoncer ainsi : Chaque augmentation d'une atmosphère dans la pression produit un abaissement de 0,0075 degré centigrade dans la température du point de congélation. M. Clausius obtient le chiffre 0,00733, avec des données identiques, abstraction faite de μ; la différence entre ces deux chiffres provient de ce que celui de M. Clausius a été calculé avec une formule qui suppose implicitement pour μ la valeur hypothétique $J\frac{E}{1+Et}$. C'est en appliquant l'équation (33) à la détermination de la quantité $\frac{dL}{dt}$ pour le même cas, que M. Clausius est arrivé au curieux résultat, mentionné au n° 43, au sujet de la chaleur latente de l'eau soumise à une pression extérieure.

33. Enfin, on doit remarquer que toutes les quantités, à l'exception de h, qui entrent dans l'équation (33), sont connues avec une exactitude assez satisfaisante, en ce qui concerne la vapeur d'eau, dans des limites assez étendues de la température; cette équation peut donc nous servir à déterminer h, quantité qui n'a, jusqu'à présent, fait le sujet d'aucune recherche expérimentale. Nous avons ainsi

$$-h = \frac{\gamma - \lambda}{J}\frac{dp}{dt} - \left(\frac{dL}{dt} + c\right),$$

expression dans laquelle on doit prendre pour γ les meilleures valeurs connues de la densité de la vapeur d'eau saturée. Si, pour le calcul de cette *densité* à différentes températures, nous avons recours aux lois des gaz, en prenant pour point de départ le chiffre $\frac{1}{1693,5}$ pour la densité à 100 degrés, et en nous servant des pressions déterminées par M. Regnault, les valeurs du premier terme du second membre de l'équation précédente seront les mêmes que si nous les mettions sous la forme suivante, tirée de l'expression (34),

$$-h = \frac{L\mu}{J} - \left(\frac{dL}{dt} + c\right),$$

et employions les valeurs de μ que l'on trouve dans la Table I de notre premier travail. Les valeurs de $-h$, inscrites dans le tableau suivant, ont été calculées par ce procédé, et, de plus, en utilisant les données suivantes fournies par M. Regnault et déduites de ses expériences sur la chaleur totale de la vapeur et sur la chaleur spécifique de l'eau,

$$\frac{dL}{dt} + c = 0,305,$$

$$L = 606,5 + 0,305\,t - 0,00002\,.\,t^2 + 0,0000003\,t^3.$$

Les valeurs de $-h$, inscrites dans la troisième colonne du tableau, sont celles obtenues

par M. Clausius au moyen d'une équation identique avec l'expression sous laquelle se présenterait l'équation (34) si l'on y substituait pour μ la valeur $J\frac{E}{1+Et}$.

t	VALEURS DE $-h$ suivant la Table I du Mémoire sur la théorie de Carnot	VALEURS DE $-h$ suivant M. Clausius
0	1,863	1,916
50	1,479	1,465
100	1,174	1,133
150	0,961	0,879
200	0,780	0,676

39. D'après ces résultats, il paraît que la quantité h est négative dans toute l'étendue de l'échelle thermométrique à laquelle se rapportent les expériences; conséquemment si l'on comprime une certaine quantité de vapeur saturée dans un vase où il n'existe pas d'eau à l'état liquide, il faudra continuellement lui enlever de la chaleur pour que cette vapeur reste à l'état de saturation, à mesure que sa température s'élèvera; et inversement, si on laisse se dilater en vase clos de la vapeur saturée, il faudra lui fournir de la chaleur pour empêcher une partie de cette vapeur de se transformer en liquide, à mesure que sa température s'abaissera. Cette conclusion extrêmement remarquable a été énoncée, pour la première fois, par M. Rankine dans le travail qu'il a communiqué à la Société le 4 février de l'année dernière; elle a été découverte en même temps par M. Clausius, et publiée dans le Mémoire qu'il a inséré dans les *Annales de Poggendorff*, aux mois d'avril et de mai de la même année.

60. On pourrait croire, à première vue, qu'il y a contradiction, d'une part, entre ce fait bien connu, que la vapeur s'échappant à l'air libre, à travers un petit orifice, d'une chaudière à haute pression, ne brûle pas en la mouillant, la main qu'on expose au courant [*]; et, d'autre part, cette proposition, que de la vapeur, se dilatant à partir de l'état de saturation, a besoin qu'on lui fournisse de la chaleur pour l'empêcher de se

* Note ajoutée le 26 juin 1856. A présent, je suis porté à croire que la vitesse du courant dans ces circonstances exerce une grande influence sur la sensation, en faisant un mélange de la vapeur avec l'air environnant. En effet, j'ai trouvé que la main souffre de la douleur quand on l'expose à un courant de la vapeur émise d'une chaudière ordinaire à pression atmosphérique, même si l'on fait passer la vapeur à travers un tuyau en cuivre, appliqué à la bouche de la chaudière et entouré de sources de chaleur pour dessécher la vapeur. Mais s'il peut y avoir de l'incertitude sur les causes des sensations diverses dans les diverses circonstances, je ne crois pas qu'il puisse y en avoir sur le fait de la sécheresse du courant près de l'orifice d'une chaudière à haute pression, ni sur l'exactitude de l'explication que j'ai donnée de ce fait, dans la Lettre à M. Joule.

condenser en partie; puisque, en effet, la vapeur s'échappant ainsi, échauderait la main si elle n'était pas complétement sèche, et conséquemment, si elle n'était pas à une température supérieure à celle de l'ébullition. Voici l'explication de cette difficulté apparente, telle que nous l'avons donnée dans une Lettre écrite par nous à M. Joule en octobre dernier, et publiée dans le *Philosophical Magazine* : La vapeur, en se précipitant à travers l'orifice, produit un effet mécanique qui est immédiatement perdu en frottement du fluide, et qui est, par conséquent, retransformé en chaleur; de la sorte la vapeur, sortant à la pression atmosphérique, aurait à céder, pour se convertir en eau à 100 degrés, autant de chaleur qu'elle en céderait si elle était d'abord condensée à la haute pression de la chaudière, et si, après coup, sa température était ramenée à 100 degrés : or la chaleur cédée, dans ce dernier cas, par une livre de vapeur saturée ayant la température t dans son état initial, est supérieure (suivant la loi de Watt modifiée par M. Regnault), de la quantité $0,305 \times (t - 100)$, à la chaleur que la vapeur saturée à 100 degrés devrait abandonner pour être réduite en liquide; conséquemment, la vapeur sortante doit avoir une température supérieure à 100 degrés, et, par suite, elle doit être sèche.

II.

Mémoire sur une méthode de déterminer par l'expérience la relation qui existe entre le travail dépensé et la chaleur produite dans la compression d'un gaz.

Mémoire lu [illegible] avril 1851.

61. Les recherches importantes de M. Joule sur les circonstances thermales qui accompagnent la dilatation et la compression de l'air, le mode admirable de raisonnement qu'il expose à ce sujet dans son travail *Sur les changements de température produits par la raréfaction et la condensation de l'air* [*], et principalement le moyen qu'il emploie pour tenir compte de tout l'effet mécanique qui peut se produire extérieurement, ou se perdre intérieurement en frottements du fluide, ont introduit une méthode tout à fait nouvelle de traiter les questions relatives aux propriétés physiques des fluides. L'objet du présent Mémoire est de faire voir comment, au moyen de cette méthode, et en s'appuyant sur les principes exposés dans notre précédent travail, on peut établir une théorie complète des phénomènes observés par M. Joule, et de signaler quelques-uns des résultats qu'il y aurait à obtenir en continuant et en étendant ses recherches expérimentales.

[*] *Philosophical Magazine*, mai 1845, vol. XXVI, page 369.

62. L'Appendice à notre *Rapport sur la théorie de Carnot* [*] contient une étude théorique sur la chaleur développée par la compression d'un fluide quelconque satisfaisant aux lois de Boyle et Mariotte et de Gay-Lussac [**]. Il a été démontré, depuis, que nos conclusions ne demandaient aucune modification quand on adoptait la théorie dynamique de la chaleur; par suite, les formules auxquelles nous sommes parvenu doivent être regardées comme s'appliquant rigoureusement aux fluides de l'espèce considérée, indépendamment de toute hypothèse. L'on peut obtenir de la manière suivante des formules analogues pour les fluides ne satisfaisant pas aux lois des gaz, et pour les solides soumis à une pression uniforme dans tous les sens.

63. Soit $M\,dv$ la quantité de chaleur absorbée par un corps maintenu à une température constante t, lorsque son volume augmente de v à $v + dv$; soit p la pression uniforme exercée extérieurement sur le corps, quand le volume est v et la température t; soit enfin $p + \frac{dp}{dt}\,dt$ la valeur que prendrait p si la température était portée à $t + dt$, le volume restant invariable. Nous aurons alors, par suite de l'équation (3) du n° 21 de notre premier travail, laquelle est la conséquence d'une extension donnée par M. Clausius à la théorie de Carnot, l'expression

$$(a) \qquad M = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dt}\ [***],$$

dans laquelle μ est la fonction de Carnot, identique pour toutes les substances à la même température.

Supposons maintenant que le corps se dilate en passant du volume V au volume V', et qu'étant maintenu constamment à la température t, il absorbe une quantité H de chaleur; on a alors

$$(b) \qquad H = \int_V^{V'} M\,dv = \frac{1}{\mu}\frac{d}{dt}\int_V^{V'} p\,dv.$$

Mais si nous appelons W le travail mécanique que produit la substance pendant son expansion, nous aurons

$$(c) \qquad W = \int_V^{V'} p\,dv,$$

et, par suite,

$$(d) \qquad H = \frac{1}{\mu}\frac{dW}{dt}.$$

---

[*] *Transactions*, vol. XVI, cinquième partie.

[**] Pour éviter à l'avenir les circonlocutions, nous appellerons ces lois les *lois des gaz* ou les *lois de la densité des gaz*.

[***] Dans toute l'étendue de ce Mémoire, les formules qui n'impliquent l'existence d'aucune hypothèse sont désignées par des lettres; celles qui supposent l'existence des *lois des gaz* sont numérotées en chiffres arabes, enfin, celles qui supposent, en outre, l'hypothèse de M. Mayer sont distinguées par des chiffres romains.

Cette formule, établie sans le secours d'aucune supposition sujette à contestation, exprime la relation qui existe entre la chaleur développée par la compression d'une substance quelconque et le travail nécessaire pour opérer cette compression, autant qu'il est possible de le faire, sans l'aide d'aucune hypothèse, au moyen de considérations purement théoriques.

64. La formule précédente conduit à celle que nous avons donnée autrefois pour le cas des fluides satisfaisant aux lois de la densité des gaz; en effet, pour ce cas, nous avons

$$1. \qquad pv = p_0 v_0 (1 + \mathrm{E}t),$$

d'où nous déduisons, au moyen de la formule (c),

$$2. \qquad \mathrm{W} = p_0 v_0 (1 + \mathrm{E}t) \log \frac{\mathrm{V}'}{\mathrm{V}}$$

et

$$3. \qquad \frac{d\mathrm{W}}{dt} = \mathrm{E} p_0 v_0 . \log \frac{\mathrm{V}'}{\mathrm{V}} = \frac{\mathrm{E}}{1 + \mathrm{E}t} \mathrm{W}.$$

Et conséquemment, par suite de l'équation (d), on a

$$4. \qquad \mathrm{H} = \frac{\mathrm{E}}{\mu (1 + \mathrm{E}t)} \cdot \mathrm{W},$$

équation qui concorde avec l'expression (11) du n° **49** de notre premier travail.

65. Nous concluons de là que la chaleur, dégagée par un fluide satisfaisant aux lois de la densité des gaz, est proportionnelle au travail dépensé pour opérer la compression à une température constante quelconque; mais que la quantité de travail nécessaire pour produire l'unité de chaleur n'est pas la même pour toutes les températures, à moins que la valeur de la fonction de Carnot ne varie en raison inverse de la quantité $1 + \mathrm{E}t$; nous en concluons, enfin, que cette quantité de travail n'est pas le simple équivalent mécanique de la chaleur dépensée, comme l'a supposé M. Mayer sans motif plausible [*], à moins que ladite fonction n'ait précisément pour valeur

$$1. \qquad \mu = \mathrm{J} \frac{\mathrm{E}}{1 + \mathrm{E}t}.$$

Cette formule nous a été suggérée par M. Joule, dans une Lettre du 9 décembre 1848, comme étant probablement la valeur exacte de μ, par la raison qu'elle est nécessaire pour mettre d'accord, d'une part, l'expression déduite de la théorie de Carnot qui

---

(*) Cette supposition est, en effet, contraire au principe important de Carnot, d'après lequel une action thermale et un effet mécanique, ou une action mécanique et un effet thermal, ne peuvent pas être regardés comme liés par la simple relation de la cause à l'effet, quand il intervient finalement tout autre effet, tel, par exemple, qu'un changement dans la densité du corps.

represente la quantite de chaleur developpée dans la compression des gaz en fonction du travail depensé, et, d'autre part, l'hypothèse qu'a adoptée ce physicien, parce qu'elle est vérifiee, au moins approximativement, par ses propres observations, et laquelle consiste à admettre que le travail dépensé est rigoureusement l'équivalent mecanique de la chaleur developpee. Cette formule, que nous appellerons *hypothèse de M. Mayer*, du nom de celui qui l'a le premier énoncee, M. Clausius l'a également adoptee, sans aucune raison tirée de l'experience; et, par suite, c'est une expression de μ, identique avec la fonction citee plus haut, qui sert de base à toutes ses déductions mathematiques au sujet de la puissance motrice de la chaleur. L'équation (4) fait voir que si cette hypothèse est vraie, à une certaine température, pour un fluide quelconque soumis aux lois des gaz, elle doit être vraie, à la même température, pour tous les fluides satisfaisant à la même condition.

66. Il resulte des formules precedentes que, parmi toutes les recherches experimentales susceptibles d'apporter des preuves à l'appui de l'hypothèse de M. Mayer, on doit considerer comme pouvant atteindre completement ce but, celles qui, conjointement avec une seule determination exacte de J, fourniraient des données necessaires pour etablir la valeur de μ dans des limites etendues de la température. Aussi, parmi toutes les experiences qu'on pourrait se proposer à ce sujet, celles-là contribueraient peut-etre plus que toutes autres au progrès de la théorie dynamique de la chaleur, qui consisteraient à déterminer la densite de la vapeur saturee pour toutes les temperatures comprises entre 0 et 230 degrés, et qui completeraient ainsi, avec les resultats déjà publies de M. Regnault, les donnees nécessaires pour calculer les valeurs de μ dans cette étendue de l'échelle thermométrique.

67. Les valeurs de μ, donnees dans la Table I de notre *Rapport sur la théorie de Carnot*, lesquelles ont eté obtenues au moyen des observations de M. Regnault sur la vapeur d'eau, en supposant, d'une part, que le chiffre $\frac{1}{1693,5}$, la densite maximum de l'eau etant prise pour unite, représente la densite de la vapeur saturee à 100 degrés, et, d'autre part, en employant les lois des gaz pour conclure des pressions observees par M. Regnault la densité à d'autres températures, ces valeurs de μ, disons-nous, sont loin de verifier l'équation (1), comme on le voit dans la Table des valeurs de $\frac{\mu(1+Et)}{E}$, contenue dans le n° 51 de notre precedent travail, ou comme le montre la Table comparative suivante :

I. TEMPÉRATURE t	II. VALEURS DE μ, en supposant que la densité de la vapeur d'eau est calculée comme ci-dessus [μ].	III. VALEURS DE μ, d'après la formule de M. Joule $J\frac{E}{1+Et}$.	IV. VALEURS DE μ, d'après l'hypothèse modifiée sur la densité de la vapeur saturée $\frac{1717,6}{1693,5}\times[\mu]$.
0	4,967	5,087	5,038
10	4,832	4,908	4,901
20	4,703	4,740	4,769
30	4,578	4,584	4,643
40	4,456	4,438	4,519
50	4,337	4,300	4,399
60	4,221	4,170	4,281
70	4,114	4,050	4,172
80	4,013	3,935	4,070
90	3,921	3,827	3,977
100	3,833	3,724	3,887
110	3,753	3,627	3,806
120	3,679	3,535	3,731
130	3,611	3,447	3,662
140	3,546	3,364	3,596
150	3,487	3,284	3,536
160	3,432	3,209	3,481
170	3,382	3,136	3,430
180	3,335	3,067	3,382
190	3,289	3,001	3,336
200	3,247	2,937	3,295
210	3,208	2,876	3,254
220	3,171	2,818	3,216
230	3,135	2,762	3,179

Lorsque nous lui fîmes remarquer ces différences, en 1848, M. Joule nous répondit que, même entre 0 et 100 degrés, le peu d'exactitude des données que l'on possède sur la vapeur d'eau suffisait pour les expliquer. Nous ne pensons pas que, généralement, on admette une telle inexactitude dans la partie de ces données que l'on doit aux observations de M. Regnault; par suite, il ne reste plus que l'incertitude qui règne, dans l'état actuel de la science, sur la densité de la vapeur saturée, pour empêcher de conclure définitivement que la valeur de μ ne peut pas être représentée par l'expression $J\frac{E}{1+Et}$; il résulte de là que l'hypothèse de M. Mayer sera confirmée (ou ruinée dans le cas contraire), si la densité de la vapeur saturée, au lieu de suivre les lois des gaz,

peut être réellement représentée par les équations

$$\text{II}\quad \begin{cases} \sigma = \dfrac{\left(\frac{1}{E} + t\right)[\mu]}{J} \cdot [\sigma], \\ [\sigma] = \dfrac{1}{1693,5} \cdot \dfrac{1 + E \times 100}{1 + Et} \cdot \dfrac{p}{\varpi}. \end{cases}$$

dans lesquelles $[\mu]$ désigne les quantités correspondantes aux températures 0, 1, 2 ..., 230 degrés qu'on trouve dans la Table I de notre *Rapport sur la théorie de Carnot*; $[\sigma]$ désigne la densité de la vapeur saturée, telle qu'elle a été supposée dans les calculs de cette Table, les valeurs de $\frac{p}{\varpi}$, employées dans ces calculs, étant d'ailleurs le quotient de la division par 760, des chiffres contenus dans la Table finale du huitième Mémoire de M. Regnault. Les variations considérables aux lois des gaz qu'indiquent les équations (II) ressortent clairement, en comparant, d'une part, dans la Table précédente, les chiffres de la colonne II avec ceux de la colonne III, et en observant, d'autre part, que le coefficient de $[\sigma]$ dans les équations (II) s'obtient, pour chacune des températures de la Table, en divisant les nombres de la colonne II par ceux correspondants de la colonne III. La colonne IV donne les valeurs de μ, telles qu'elles seraient si la densité de la vapeur saturée à 100 degrés était $\frac{1}{1717,6}$ au lieu de $\frac{1}{1693,5}$, et si, pour les autres températures, elle était calculée au moyen des lois des gaz.

63. Ce sujet a été étudié avec beaucoup de soin par M. Clausius, qui a fait voir les déviations considérables aux lois de la densité des gaz qu'exige l'hypothèse de M. Mayer dans la densité de la vapeur d'eau saturée, et qui a donné, pour cette densité, une formule empirique fondée, d'une part, sur cette hypothèse, et, d'autre part, sur les observations de M. Regnault au sujet de la pression et de la chaleur latente. Faute de données expérimentales, la théorie ne peut aller plus loin dans cette direction; cependant, d'après ce que nous savons des gaz et des vapeurs saturées, il est permis de douter qu'une hypothèse qui ne repose sur aucune preuve expérimentale suffise pour donner quelque probabilité à des déviations aussi considérables aux lois des gaz, en ce qui concerne la vapeur d'eau [*].

69. Nous devons à M. Joule une série d'expériences très-importantes sur la relation qui existe entre les effets thermaux, les effets mécaniques extérieurs et les effets méca-

---

* La vérification expérimentale de l'hypothèse de M. Mayer, faite par M. Joule pour des températures comprises entre 50 et 60 degrés Fahrenheit, prouve, si elle est rigoureusement exacte, que la densité de la vapeur saturée à 10 degrés centigrades environ, est seulement les $\frac{1693,5}{1717,6}$ de la valeur que nous lui avons supposée dans les calculs de notre premier travail; mais elle ne donne aucune indication d'une déviation des lois des gaz, dans la manière dont la densité de la vapeur d'eau saturée varie avec la température.

niques intérieurs (c'est-à-dire la force vive détruite par le frottement du fluide), qui sont produits pendant la compression ou la dilatation de l'air dans diverses circonstances [*]. Ces recherches présentent des résultats qui, dans l'étendue de 50 à 60 degrés Fahrenheit) de l'échelle thermométrique où elles ont été faites, sont des vérifications de l'hypothèse de M. Mayer, fondées sur deux méthodes distinctes, l'une et l'autre parfaites en principe, et qui pourraient servir de base à des expériences pour une température quelconque.

70. La première de ces méthodes consiste simplement à déterminer, par l'observation directe, la chaleur développée pendant la dépense d'une quantité donnée de travail que l'on emploie à comprimer de l'air, et à comparer cette chaleur avec celle qui est engendrée par la même quantité de travail, dans les expériences originales de M. Joule sur la chaleur développée par l'action magnéto-électrique, ou par le frottement des fluides en mouvement.

71. La seconde méthode est particulièrement remarquable en ce qu'elle fournit pour l'air, dans chaque expérience séparée, un moyen de vérifier l'hypothèse de M. Mayer pour la température expérimentée, sans qu'on ait besoin de connaître la valeur absolue de l'équivalent mécanique de la chaleur. Dans ces expériences de M. Joule, la vérification en question consiste dans la détermination de la totalité de l'effet thermal extérieur qui est produit, lorsque de l'air passe en se dilatant, à travers un petit orifice, d'un récipient dans un autre où l'on a fait préalablement le vide au moyen d'une machine pneumatique (*air pump*). Dans ces circonstances, le premier effet produit par l'expansion du gaz est la force vive engendrée pendant le mouvement rapide de l'air. Après que l'équilibre est rétabli, tout cet effet mécanique s'est perdu en frottements du fluide; car il n'y a pas d'effet mécanique appréciable produit extérieurement sous forme de son, seul effet mécanique extérieur, autre que la chaleur, qui puisse être le résultat des mouvements d'un fluide dans l'intérieur d'un vase rigide; d'un autre côté, il n'est pas, dans les sciences physiques, de vérité mieux établie que la proposition suivante : Jusqu'au moment où l'équilibre thermal, aussi bien que l'équilibre mécanique, se rétablit à la température primitive, la quantité de chaleur qui sera cédée par le fluide contenu dans les deux récipients devra être supérieure à celle (une quantité négative) qui serait cédée si l'air, pendant son expansion, faisait mouvoir un piston à l'encontre d'une résistance extérieure, de toute la quantité que représente l'équivalent thermal de l'effet mécanique qui serait produit par ce piston. Par suite, si les deux récipients et le tube qui les réunit sont plongés (comme dans la première série des expériences de M. Joule), dans un vase plein d'eau, et si, lorsque la pression et la température de l'air seront devenues identiques dans les deux vases, on trouve que l'eau n'a cédé ni absorbé aucune quantité de chaleur, on doit en conclure que l'hypothèse de M. Mayer est vraie pour la température de l'expérience (naturellement il demeure entendu que, pendant toute la durée de l'expérience, l'air et les corps environ-

(*) *Philosophical Magazine*, mai 1845.

nants devront avoir gardé une température absolument constante ; mais s'il se manifeste dans l'eau une élévation ou un abaissement quelconque de température, ce sera une preuve que le travail dû à l'expansion est plus grand ou plus petit que la valeur absolue de l'équivalent de la chaleur absorbée.

72. La seconde expérience, exécutée par M. Joule avec le même appareil, et dans laquelle il examine séparément les effets thermaux produits extérieurement autour des deux récipients et autour de la partie du tube qui contient le petit orifice (un robinet d'arrêt), cette expérience nous a suggéré l'idée d'une méthode d'investigation qui nous paraît plus simple et mieux appropriée pour soumettre l'hypothèse de M. Mayer à une épreuve extrêmement délicate, pour une température quelconque. Cette méthode consiste à supprimer les deux récipients de l'appareil de M. Joule, à leur substituer (comme il l'a fait pour l'un d'eux seulement dans sa troisième expérience) deux longs tubes en spirale, et à faire passer de force et d'une manière continue, de l'air dans tout le système. La première partie spirale du tube, jusqu'à une courte distance de l'orifice, doit être maintenue à une température aussi voisine que possible de celle de l'atmosphère qui entoure la portion contenant le petit orifice, et cela dans le but unique de bien fixer la température de l'air entrant. Les considérations suivantes ont pour objet de faire voir à quelles conclusions pourrait conduire l'observation expérimentale des phénomènes thermaux que présenterait un fluide quelconque traité par la méthode en question.

73. Soient p la pression uniforme de fluide dans la première spirale, jusqu'à une courte distance de l'orifice, et p' la pression, également à une courte distance de l'orifice, mais du côté opposé, laquelle sera uniforme tout le long de la deuxième spirale. Appelons t la température extérieure, et faisons en sorte que l'air, dans les deux spirales, soit autant que possible à cette même température. S'il se produit dans le fluide, à son passage dans l'orifice, une élévation ou un abaissement quelconque de la température, ce ne peut être qu'après avoir parcouru une longueur assez considérable de la deuxième spirale, que le gaz reprendra sensiblement la température t; par suite, cette spirale devra être assez longue pour que la température mesurée avec une grande exactitude, à la sortie par l'extrémité du tube, ne diffère pas d'une manière appréciable de la température primitive t.

74. Soit H la quantité totale de chaleur émise par la portion du tube qui contient l'orifice et la deuxième spirale, pendant le passage d'un volume u de gaz dans la première spirale, ou pendant le passage d'un volume équivalent u' dans la partie de la deuxième spirale où la température est sensiblement égale à t; cette quantité sera composée de deux parties : l'une (positive) sera la chaleur produite par le frottement du fluide; l'autre (négative) proviendra du fait de l'expansion du fluide dans son passage d'un côté à l'autre de l'orifice. Pour déterminer ces deux quantités partielles de chaleur, supposons d'abord que le transport du fluide se fasse sans qu'il y ait perte d'effet mécanique en frottements intérieurs, comme il arriverait si, au lieu de séparer le fluide en

deux parties à des pressions différentes, au moyen d'un petit orifice, on opérait cette séparation au moyen d'un piston mobile, et, en outre, si, après avoir renfermé, entre ce piston et un deuxième piston, un volume u de gaz pris du côté où la pression est la plus élevée p, on faisait, d'une part, glisser le système dans l'intérieur du tube jusqu'à ce que le deuxième piston ait pris la place du premier, et si, d'autre part, on laissait en même temps se dilater le volume u jusqu'à ce qu'il soit devenu u'. Cela fait, adoptons, en ce qui concerne le volume v de la substance renfermée entre les pistons et maintenue à une température constante, la notation qui nous a déjà servi dans le présent travail et dans notre précédente publication; nous aurons alors, pour la quantité de chaleur absorbée pendant le mouvement de piston,

$$\int_u^{u'} \mathrm{M}\, dv,$$

ou, d'après la deuxième équation fondamentale de la théorie dynamique, équation (3 du n° **21** du Mémoire précédent,

$$\frac{1}{\mu}\int_u^{u'} \frac{d\varpi}{dt}\, dv,$$

expression dans laquelle ϖ représente la pression de la substance (dont la valeur est comprise entre p et p') quand son volume est quelconque v. D'un autre côté, le travail exécuté par les pistons sera donné par l'équation

$$(e) \qquad \mathrm{W} = \int_u^{u'} \varpi\, dv + pu - p'u'.$$

Si maintenant le transport de la substance d'une partie du tube où la pression est p, à celle où elle est p', se fait à travers un petit orifice, la valeur totale de W représentera exactement la quantité de travail qui sera perdue comme effet mécanique, et qui sera employée à engendrer de la *force vive thermale*. La quantité de chaleur ainsi produite sera

$$\frac{1}{\mathrm{J}}\left[\int_u^{u'} \varpi\, dv + pu - p'u'\right].$$

Par suite, la quantité totale de chaleur émise sera l'excès de la valeur de cette dernière expression sur la valeur de celle que nous avons trouvée plus haut pour représenter la chaleur absorbée lorsque l'effet mécanique est entièrement extérieur; nous aurons donc

$$(f) \qquad \mathrm{H} = \frac{1}{\mathrm{J}}\left[\int_u^{u'} \varpi\, dv + pu - p'u'\right] - \frac{1}{\mu}\int_u^{u'} \frac{d\varpi}{dt}\, dv.$$

Quelques changements de température que l'air subisse dans l'orifice même ou dans son voisinage, cette expression représentera rigoureusement la quantité totale de chaleur qui sera émise par la portion du tube qui contient l'orifice et toute la seconde spirale, pendant le passage d'un volume u dans la première spirale, ou d'un volume u' dans la partie de la seconde spirale où la température est sensiblement t.

75. Pour appliquer ce résultat au cas d'un fluide satisfaisant aux lois des gaz, nous pouvons poser

$$pu = p'u';$$

par suite, l'équation (e) devient

$$5 \qquad W = \int_u^{u'} \varpi\, de = pu.\log\frac{u'}{u} = p'u'\log\frac{p'}{p}.$$

D'un autre côté, par suite de l'équation (3), nous avons

$$\frac{dW}{dt} = \frac{Epu}{1+Et}\log\frac{u'}{u} = \frac{EW}{1+Et}.$$

Par suite, l'expression (f) de la chaleur émise devient

$$6 \qquad H = \left[\frac{1}{J} - \frac{E}{\mu(1+Et)}\right] W.$$

76. Enfin, si l'hypothèse de M. Mayer est applicable au gaz employé dans l'expérience, en conséquence de l'équation (I), on aura

$$\text{(III)} \qquad H = 0.$$

77. Il résulte de l'équation (III), que si l'hypothèse de M. Mayer est vraie, il n'y aura besoin, après tout, ni d'une émission ni d'une absorption de chaleur pour ramener la température de l'air, après son passage dans l'orifice à sa température primitive t. Conséquemment, et quoiqu'il se produise, sans aucun doute, à chaque instant, d'une part, un refroidissement dans les parties de l'air voisines de l'orifice, qui communiquent, par suite de leur expansion, de la force vive aux particules contiguës, et, d'autre part, un échauffement dans les particules qui sont la cause des pertes de force vive qu'éprouvent les parties voisines sous forme de frottement du fluide; cependant, très-près de l'orifice et de chaque côté, là où le mouvement de l'air est uniforme, la température restera constamment égale à t. Il en résulte que l'épreuve la plus simple à laquelle on pourrait soumettre l'hypothèse en question, consisterait à s'assurer si la température de l'air est exactement la même des deux côtés de l'orifice. Cette expérience pourrait se faire au moyen de thermomètres très sensibles, ajustés dans le tube, de chaque côté de l'orifice, et à des distances suffisantes pour qu'ils soient en dehors du mouvement rapide de l'air qui a lieu dans le voisinage immédiat dudit orifice; on pourrait aussi, dans le même but, recourir à un procédé encore plus délicat [*], qui consisterait à employer un galvanomètre très-sensible et une petite batterie thermo-électrique disposée de telle sorte que les soudures alternatives (*one set of solderings*) purent être placées dans le tube du côté du courant d'air entrant, et que les autres furent aussi dans le tube, mais du côté opposé de l'orifice. Dans ce

[*] Note ajoutée le 25 juin 1852. A présent, il me semble que ce procédé *n'aurait aucun avantage* sur l'autre; mais, au contraire, que celui-là, dans lequel on se sert de thermomètres, est le seul des deux dont on doive user.

cas, le tube contenant l'orifice devrait être recourbé pour rapprocher entre elles les portions à chaque côté dudit orifice, autant qu'il serait nécessaire pour l'installation requise. La seule difficulté que nous entrevoyons dans l'exécution de ces dispositions, c'est celle que présentera le joint qu'il faudra faire à l'extrémité de la batterie exposée à l'air à haute pression, pour la rendre impénétrable à l'air. La première idée qui s'était présentée à notre esprit était de placer la petite batterie elle-même tout entière dans l'intérieur du tube, et pour obtenir la différence requise de pression entre les deux parties du gaz, de luter imparfaitement le contour, avec de la cire ou autrement, de manière à laisser un mince passage à l'air; mais cet arrangement ne serait pas satisfaisant, parce que certains éléments de la batterie, sinon les extrémités elles-mêmes, subiraient des changements de température (l'hypothèse de M. Mayer fût-elle rigoureusement vraie), par suite du mouvement rapide de l'air au milieu de ces éléments. Pour être dans de bonnes conditions, il faut que la batterie ne soit pas exposée au mouvement de l'air qui a lieu dans le voisinage de l'orifice; par conséquent, la partie centrale de la batterie devra être placée en dehors du tube, et les extrémités devront être lutées dans les parois du tube, avec un mastic suffisamment solide et compacte pour rendre le joint parfaitement étendu du côté où la pression diffère de celle de l'atmosphère. Avec de tels moyens, nous pensons qu'on pourra facilement exécuter une série d'expériences propres à fournir des lumières certaines sur la vérité de l'hypothèse de M. Mayer, dans des limites très-étendues de la température.

78. Si cette méthode d'investigation accuse une différence de température quelconque entre les côtés de l'orifice, il restera démontré que l'hypothèse de M. Mayer n'est pas exacte; et, suivant que l'air sortant de l'orifice sera à une température plus élevée ou plus basse que l'air entrant, on en conclura que la chaleur absorbée, quand de l'air se dilate à une température constante, est plus petite ou plus grande que l'effet mécanique produit par l'expansion.

79. Dans ce cas, on pourrait employer des méthodes calorimétriques semblables à celles de M. Joule pour déterminer la quantité de chaleur qui est émise ou absorbée par l'air, dans le voisinage de l'orifice ou dans la deuxième spirale, jusqu'au moment où sa température redevient celle du courant à son entrée; et il est probable qu'en opérant avec beaucoup de soin, on obtiendrait des résultats extrêmement exacts pour une grande étendue de l'échelle thermométrique.

80. Le résultat de chaque expérience permettrait de calculer une valeur de α en fonction de l'équivalent mécanique de M. Joule, au moyen de l'équation suivante, déduite des expressions (5) et (6),

$$(7) \qquad \alpha = \frac{\dfrac{JE}{1+Et}}{1 - J\dfrac{H}{p'u'\log\dfrac{p}{p'}}}.$$

Dans le deuxième membre de cette equation, p' désigne la pression de l'air dans la deuxième spirale, laquelle serait celle de l'atmosphère, ou du moins en serait très-voisine, si, comme dans la troisième expérience de M. Joule mentionnée plus haut [*], l'air sortant de la deuxième spirale était mesuré au moyen de l'auge pneumatique (*pneumatic trough*); p désigne la pression dans la première spirale, qui devra être constante et mesurée d'ailleurs avec le plus grand soin; u' est le volume d'air qui sort de l'appareil dans un temps quelconque, et H est la quantité de chaleur émise ou absorbée dans le même temps. L'expérience pourra avoir une durée quelconque, et la valeur de chacune de ces quatre quantités devra être déterminée avec le plus grand soin, de façon à donner autant d'exactitude que possible aux résultats. A ces conditions, aucune méthode d'investigation ne nous paraît mieux appropriée à la détermination des valeurs de la fonction de Carnot, pour différentes températures, en supposant déjà connue la valeur de l'équivalent mécanique de la chaleur.

---

[*] Et décrite par l'auteur à la page 378 du volume qui contient son Mémoire. (*Philosophical Magazine*, vol. XXVI.)

DEUXIÈME NOTE

SUR LES COURBES A DOUBLE COURBURE;

PAR M. VOIZOT.

Dans une première Note, insérée dans le tome XIV, page 481 de ce Recueil, je crois avoir établi que

$$\rho\, dt = ds \tag{1}$$

étant l'équation de la première courbure ou de la courbure circulaire d'une courbe quelconque FF',

$$dt = dt' \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\beta \tag{2}$$

était l'équation de la seconde courbure ou de la courbure conique de la proposée.

Dans cette deuxième Note, je présente aux géomètres quelques propriétés de la surface formée par les axes des cônes osculateurs, parmi lesquelles propriétés on distingue celles-ci :

1°. *La surface des axes des cônes osculateurs de la proposée* FF' *est en même temps la surface des développées de toutes ses développantes.*

Par conséquent elle jouit, lorsqu'elle est rabattue dans un plan, de même que la surface des développées de FF', de la propriété de transformer en lignes droites les développées de toutes les développantes.

Or, la courbe FF' étant elle-même une développée commune à toutes ces développantes, il s'ensuit que *cette courbe devient* UNE LIGNE DROITE, *lorsqu'on rabat, dans un plan, la surface des axes de ses cônes osculateurs.*

2°. *La surface des axes des cônes osculateurs de la courbe* FF' *est*

aussi la surface des axes des cônes osculateurs des développées de toutes ses dévoloppantes.

3°. *L'arête de rebroussement de cette surface est le lieu des centres des sphères osculatrices de toutes les développantes de la courbe* FF'.

J'aurai tout à l'heure à considérer des équations analogues aux équations (1) et (2). Puisque je regarde l'équation (2) comme celle de la deuxième courbure de la proposée FF', peut-être sera-t-il nécessaire de faire voir, tout d'abord, que, tandis que $\frac{1}{\rho}$ donne sa courbure circulaire, $\frac{1}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta}$ représente sa courbure conique ou la courbure de la surface de ses tangentes.

Fig. 1.

Soient donc :

SA l'axe d'un cône circulaire droit;
S son centre;
β son angle;
SB sa génératrice.

La courbure de la surface convexe de ce cone se mesurera par une section perpendiculaire à son arête SB.

Au centre S la courbure sera infinie; elle sera nulle à l'infini; et en chaque point de l'arête SB, elle variera en raison inverse de la distance au centre S.

Cette infinité de courbures, relatives à un même angle au centre, constitue une indétermination qui vient du manque d'unité de cour-

bure homogène, et qui cessera si l'on considère en même temps un second cône circulaire droit dont

SA′ sera l'axe,
S le centre,
β' l'angle au centre,
et SB la génératrice.

En effet, si l'on fait coïncider les deux génératrices, ainsi que les plans des angles β et β', les convexités des surfaces ayant d'ailleurs lieu dans le même sens; et si, par deux points quelconques m et m', on mène deux plans perpendiculaires à SB, on aura

$$\frac{m'o'}{m'i'} = \frac{mo}{mi},$$

ce qui nous dit déjà que, quel que soit le point m' de SB, par lequel on mène le plan perpendiculaire, le rapport des courbures des surfaces des deux cônes sera *constant*.

Si l'on fait ensuite

$$\beta' = \tfrac{1}{2}\pi,$$

auquel cas le cône dont la courbure sera prise pour unité aura un angle au centre égal à un droit; et

$$Sm' = 1,$$

ce qui donnera

$$m'i' = 1,$$

il viendra

$$\frac{mo}{mi} = \frac{m'o'}{m'i'} = \frac{\tang \frac{1}{2}\beta}{1};$$

d'où

$$m'o' = \tang \tfrac{1}{2}\beta,$$

ce qui donnera, pour la courbure absolue du cône SA,

$$\frac{1}{\tang \frac{1}{2}\beta}.$$

Ainsi, *tang $\frac{1}{2}\beta$ sera le rayon de courbure absolue de la surface des tangentes.*

Remarque. Si, au lieu de mesurer cette seconde courbure par le rapport $\frac{1}{\left(\frac{m'o'}{m'i'}\right)}$, qui la rend *constante* pour un même angle au centre β, on la mesurait au moyen du rapport

$$\frac{1}{\left(\frac{ds}{dt'}\right)} = \frac{1}{\rho \operatorname{tang} \frac{1}{2} \beta},$$

cette expression *variant* avec le rayon ρ, pour un même angle β, et pouvant *ne pas varier* pour un angle différent de β, ne permettrait pas de comparer entre elles les secondes courbures de la proposée.

Arrivons maintenant à notre objet.

Fig. 2.

Soient :

F...ABCD...F′ la courbe proposée,

Bb', Cc', Dd',... ses tangentes,

et Bc_2, Cc_2,... les axes de ses cônes osculateurs.

I.

On a vu, dans notre première Note, *que le lieu géométrique des axes des cônes osculateurs de la courbe* FF′ *était celui des centres de courbure de tous les points de la surface des tangentes.*

II.

La surface des axes des cônes osculateurs de la courbe FF′ étant formée par les intersections de plans perpendiculaires aux normales principales, ou, ce qui est la même chose, à la fois tangents à cette courbe et perpendiculaires à ses plans osculateurs, est *une surface développable.*

III.

Soit $b'c'd'$... une développante de la proposée dans laquelle

$$b'c' = ds_1 = sdt,$$

s étant l'arc Bb' développé.

Les plans normaux-tangents b'Bc_2, c'Bc_2 à la courbe FF′ seront les plans normaux de la développante $b'c'd'$..., et, par conséquent, *la surface des axes des cônes osculateurs de* FF′ *sera la surface de toutes les développées de cette développante.*

Ainsi, *la courbe* FF′, *qui est une de ces développées, se transformera en une* LIGNE DROITE *lorsque l'on rabattra, dans un plan, la surface des axes de ses cônes osculateurs.*

On vérifie facilement cette proposition par l'analyse suivante :

La développante $b'c'd'$... a son plan osculateur $b'c''c'$ perpendiculaire à l'intersection Bc'' de ses deux plans normaux consécutifs.

Son angle de contingence sera donc

$$(3) \qquad b'c''c' = \frac{dt}{\sin\frac{1}{2}\beta} = dt_1;$$

son angle conique sera

$$(4) \qquad c''c'd'' = d\tfrac{1}{2}\beta = dt'_1,$$

et ses deux équations de courbure seront

$$(5) \qquad \rho_1\, dt_1 = ds_1,$$

$$(6) \qquad dt_1 = dt'_1 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\beta_1,$$

en désignant par β_1 l'angle au centre de son cône osculateur.

La dernière est indépendante de l'arc s développé.

La figure donne

$$b'c'' = \rho_1 = s\sin\tfrac{1}{2}\beta,$$

ce qui s'accorde avec l'équation (5).

Or, soit

$$\mathrm{BC}\, d_2 = \tfrac{1}{2}\beta,$$

on aura

$$c''c'd'' = \mathrm{B}c_2\mathrm{C} = \mathrm{C}d_2\mathrm{D} = d\tfrac{1}{2}\beta,$$

à un infiniment petit près du second ordre. D'ailleurs

$$d_2\mathrm{CD} = \pi - (\tfrac{1}{2}\beta - d\tfrac{1}{2}\beta) - d\tfrac{1}{2}\beta = \pi - \tfrac{1}{2}\beta,$$

d'où

$$\mathrm{BC}\, d_2 + d_2\mathrm{CD} = \pi. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarques. 1°. Soit PQR un des plans normaux de la courbe FF'. Si l'on rabat, dans ce plan, la surface des développées, en même temps que tous les plans normaux générateurs de cette surface, *chaque point de la courbe glissera le long de cette courbe qui se réduira au seul point* F *contenu dans le plan* PQR, *tandis que toutes les tangentes se confondront en une seule qui sera celle perpendiculaire au plan.*

2°. Or, si l'on applique cette remarque ainsi que la proposition précédente, à l'hélice, on arrivera à de curieux résultats.

En effet, soit a le rayon de courbure constant d'une hélice FF'.

La courbe des centres de cette hélice étant l'arete de rebroussement de sa surface polaire, et étant perpendiculaire au rayon a commun à l'hélice et à cette courbe, *deviendra*, dans le rabattement de la surface polaire, *un cercle de rayon a, ayant pour centre le point auquel l'hélice se sera réduite.*

Réciproquement, la surface des tangentes de l'hélice FF′ étant la polaire de sa ligne des centres, en rabattant cette surface dans un plan, *l'hélice se transformera en un cercle de rayon a, ayant pour centre le point auquel se sera réduite, dans le rabattement, la ligne des centres de l'hélice.* D'où l'on voit qu'une hélice quelconque peut toujours se transformer en

Un *point*,
Une *droite*,
Et un *cercle*.

3°. Les deux premieres transformations ont lieu quelle que soit la courbe FF′. Elles ont lieu toutes les trois lorsque la courbe FF′ a un rayon de courbure constant.

IV.

Soit $c'''z$... une développée de la développante $b'c'd'$....

Son plan osculateur sera $b'c'''c'$.

Les plans $b'Bc'''$, $c'Bc'''$, normaux à la développante, étant à la fois des plans tangents à la développée $c'''z$... et perpendiculaires à ses deux plans osculateurs consécutifs, *leur intersection* Bc''' *sera l'axe du cône osculateur de cette développée.*

Donc *la surface des axes des cônes osculateurs de la courbe* FF′ *sera encore la surface des axes des cônes osculateurs des développées de toutes ses développantes.*

V.

Il suit de là que *la surface des développées de la courbe* FF′ *est en même temps celle des axes des cônes osculateurs de toutes ces développées.*

Il suit aussi de ce qui a été dit § III, *remarque* 1°, que *si l'on*

développe la surface des développées, le point F *de* FF′, *situé dans le plan développé, décrira, dans le développement, la courbe* FF′. *Le rayon de courbure, en chaque point, sera la perpendiculaire abaissée du point* F *sur l'arête de la surface polaire formant l'axe actuel du mouvement.*

Le point F étant arbitraire, on voit que *la surface des développées de* FF′ *appartient à une infinité de courbes décrites dans un même mouvement, ayant toutes leurs côtés parallèles chacun à chacun à ceux de* FF′; *et, par conséquent, leurs angles de contingence et coniques égaux chacun à chacun.*

L'arête de rebroussement de la surface polaire est le lieu des centres des sphères osculatrices de toutes ces courbes.

VI.

L'arête de rebroussement $c_2 d_2 e_2 \ldots$ de la surface des axes des cônes osculateurs, déterminée de position dans l'espace par la distance

$$\mathrm{B}c_2 = \frac{ds \sin \frac{1}{2}\beta}{d\frac{1}{2}\beta}.$$

a pour équation de courbure conique

$$7) \qquad dt'_1 = dt_1 \cot \tfrac{1}{2}\beta_1.$$

On trouverait facilement qu'elle a pour équation de courbure circulaire

$$8 \qquad \rho_2\, dt_1 = ds_2,$$

dans laquelle

$$ds_2 = d(\mathrm{B}c_2) - ds \cos \tfrac{1}{2}\beta,$$

$$= d\left(\frac{ds \sin \frac{1}{2}\beta}{d\frac{1}{2}\beta}\right) - ds \cos \tfrac{1}{2}\beta.$$

Cette arête est aussi le lieu des centres des sphères osculatrices de toutes les développantes, et de toutes les courbes telles que $yy_1 \ldots$ *menées parallèlement à une développante quelconque* $b'c'd' \ldots$.

VII.

Une développée telle que $c\ z$... a une infinité de développantes telles que yy_1..., $b'c'd'$.... Et, réciproquement, une courbe telle que yy_1... a une infinité de développées susceptibles d'être tracées sur la surface des axes des cônes osculateurs de la courbe FF'.

Il en est de même de toute développée tracée sur la surface polaire de la courbe FF'.

La courbe FF' *jouit donc, à l'exclusion de toute autre, de la double propriété d'être à la fois* UNE DÉVELLOPPANTE COMMUNE *à une série de développées susceptibles d'être tracées sur la surface polaire, lesquelles sont ses propres développées, et* UNE DÉVELOPPÉE COMMUNE *à une série de développantes de développées susceptibles d'être tracées sur la surface des axes des cônes osculateurs de* FF', *lesquelles développantes sont toutes celles de la proposée.*

Dans un prochain article, nous nous proposerons de faire voir que :

1°. *La surface des axes des cônes osculateurs d'une courbe quelconque* FF' *a tous ses plans générateurs communs avec les plans tangents aux deux infinis, à toutes les surfaces gauches formées par les perpendiculaires élevées de tous les points de ses développantes sur les plans osculateurs de toutes ces courbes; ce qui rend la surface des axes des cônes osculateurs de* FF' ASYMPTOTIQUE *de toutes ces surfaces gauches; et chacune de ces dernières asymptotique de toutes les autres.*

Cette propriété appartient à la surface polaire de la courbe FF', *laquelle est* ASYMPTOTIQUE *de la surface gauche formée par les normales élevées en chaque point de cette courbe sur son plan osculateur.*

2°. *La surface développable formée par des plans menés par les différents points de la courbe* FF', *et perpendiculairement aux axes des cônes osculateurs, est* ASYMPTOTIQUE *de la surface gauche formée par les normales principales de la courbe* FF'.

Cette surface développable est d'ailleurs celle des intersections des plans de bases de toutes les hélices osculatrices de la proposée

3°. *La surface des axes des cônes osculateurs de l'arête de rebroussement $c_2 d_2 e_2 \ldots$ de la surface des axes des cônes osculateurs de la proposée,* EMBRASSE, *dans toute son étendue, la surface gauche formée par les normales principales de la courbe* FF′, *et réciproquement, selon la ligne de striction de cette surface gauche, qui est le lieu des centres des cercles de bases de toutes les hélices osculatrices de la proposée* FF′.

Extrait d'une Lettre de M. Voizot à M. Liouville.

Châtillon-sur-Seine, le 24 mai 1852.

La Note que j'ai eu l'honneur de vous adresser en mai 1851 [*] se terminait par l'énoncé de quelques propositions sur de certaines surfaces gauches inhérentes à une courbe à double courbure. A cette époque, j'avais déjà constaté géométriquement l'existence de ce théorème :

Une surface gauche quelconque a pour surface asymptotique une surface développable formée par les intersections des plans menés par toutes les génératrices de la surface réglée, perpendiculairement aux lignes de plus courte distance correspondantes.

Dans un travail sur les surfaces en général, que je termine en ce moment, j'ai eu l'occasion de vérifier ce théorème par l'analyse, relativement à l'hyperboloïde de révolution à une seule nappe.

Soit

$$F = x^2 + y^2 - M^2 z^2 - N^2 = 0 \tag{1}$$

l'équation de cette surface, rapportée à trois axes rectangulaires, celui des z étant l'axe de révolution.

L'équation du plan passant par une génératrice quelconque, sur

[*] C'est la Note ci-dessus.

laquelle se trouve le point x, y, z, perpendiculairement à la plus courte distance entre cette génératrice et la suivante, sera

$$(2) \qquad x' + ay' - M^2 bz' = 0,$$

a et b étant des fonctions de x, y, z tirées de l'équation

$$F = 0,$$

par le calcul différentiel.

Si l'on différentie l'équation (2) par rapport à a et a b, il viendra l'équation

$$(3) \qquad y' da - M^2 z' db = 0,$$

qui sera celle d'un plan coupant celui représenté par l'équation (2) selon une génératrice de la surface asymptotique cherchée.

En faisant les calculs indiqués par da et db, simplifiant au moyen de l'équation (1) et égalant à zéro les multiplicateurs de dx et de dy, on trouvera, ce que l'on pouvait prévoir, l'équation unique

$$(4) \qquad y'b - z'a = 0.$$

Des considérations géométriques font voir que la génératrice du lieu cherché, représentée par les équations (2) et (4), a pour projection, dans le plan des x, y,

$$(5) \qquad y' - ax' = 0.$$

Éliminant a et b entre les équations (2), (4) et (5), on aura, pour l'équation du lieu cherché,

$$(6) \qquad x'^2 + y'^2 - M^2 z'^2 = 0.$$

Or, cette équation étant celle du cône asymptotique de la surface

$$F = 0,$$

il s'ensuit que le théorème avancé est vérifié sur l'hyperboloïde de révolution à une nappe.

Corollaire I. L'équation (6) étant indépendante de N, on en con-

clut que *tous les hyperboloïdes à une nappe que l'on obtient en donnant à* N *toutes les valeurs possibles sont asymptotiques l'un de l'autre, et qu'ils ont tous pour surface développable asymptotique* UNIQUE *le cône représenté par l'équation* (6).

Corollaire II. Une surface développable étant, en général, une surface gauche dont toutes les plus courtes distances sont nulles, et dont l'arête de rebroussement correspond à la ligne de striction, il s'ensuit que *la surface asymptotique d'une surface développable est cette surface elle-même.*

THÈSE DE MÉCANIQUE.

Sur le développement des Fonctions en Séries ordonnées suivant les Fonctions X_n *et* Y_n;

PAR M. OSSIAN BONNET.

On sait que les fonctions X_n et Y_n, introduites dans l'analyse par Legendre, sont d'un très-grand secours dans plusieurs théories importantes, en particulier dans la théorie de l'attraction des sphéroïdes et dans celle de la figure des planètes; parmi les nombreuses propriétés dont jouissent ces fonctions, une des plus remarquables consiste en ce que toute fonction de deux angles θ et φ, donnée arbitrairement entre les limites $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, $\varphi = 0$ et $\varphi = 2\pi$, et assujettie à la seule condition de ne pas devenir infinie entre ces limites, peut toujours être développée en série convergente ordonnée suivant les fonctions Y_n. C'est à Laplace que l'on doit cette importante proposition; il y avait été conduit par des considérations indirectes et qui, de son propre aveu, sont insuffisantes; plus tard, Poisson, qui s'était servi du résultat de Laplace, dans plusieurs problèmes de Mécanique et de Physique mathématique, a cherché à l'établir rigoureusement. On peut voir dans le XIXe cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, dans les *Additions à la Connaissance des Temps* pour les années 1829 et 1831, et enfin dans la *Théorie mathématique de la Chaleur*, page 212, la démonstration de cet illustre analyste. Cette démonstration suppose, comme on le reconnaît aisément, la fonction qu'il s'agit de développer et ses dérivées premières, continues par rapport à θ et à φ, conditions qui peuvent ne pas être satisfaites, même pour des cas très-simples; la démonstration de Poisson est donc incomplète. Depuis, M. Lejeune-Dirichlet a publié, dans le

tome XVII du Journal de M. Crelle, la première et je crois l'unique démonstration entièrement rigoureuse du théorème de Laplace. Je me propose, dans cette Thèse, de donner une nouvelle démonstration plus directe que celle de M. Dirichlet, et, afin que mon travail présente un ensemble complet, je ferai préalablement une exposition rapide des principales propriétés des fonctions X_n et Y_n, en ne m'attachant à démontrer que les moins connues de ces propriétés.

§ Ier.

Propriétés des fonctions X_n.

THÉORÈME I. *L'expression* $(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$, *où* x *est un nombre compris entre* -1 *et* $+1$ *et* α *un nombre positif moindre que* 1, *est développable en série convergente ordonnée suivant les puissances entières et positives de* α.

Remarque. On appelle X_n le coefficient de α^n dans le développement de $(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$.

THÉORÈME II. *On a, en général,*

$$X_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n}\left\{x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)}x^{n-4} - \ldots\right\}$$

THÉORÈME III. *Posant* $x = \cos\gamma$, *on a, comme seconde valeur de* X_n,

$$X_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\cos n\gamma + \frac{1.3.5\ldots(2n-3)(1)}{2.4.6\ldots(2n-2)2}\cos(n-2)\gamma + \ldots$$
$$+ \frac{1.3.5\ldots(2n-2t-1)}{2.4.6\ldots(2n-2t)}\frac{1.3\ldots(2t-1)}{2.4\ldots 2t}\cos(n-2t)\gamma + \ldots.$$

Corollaire. Les coefficients de $\cos n\gamma$, $\cos(n-2)\gamma$, etc., dans la valeur précédente, étant positifs, on voit que la plus grande valeur que puisse prendre X_n, quand γ varie, correspond à $\gamma = 0$ ou $x = 1$; or, dans ce cas, X_n est 1, puisque $(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ se réduit à

$\frac{1}{1-\alpha}$: donc les fonctions X_n sont généralement moindres que 1 et elles n'atteignent la valeur 1 que pour $x = 1$.

THÉORÈME IV. *Posant, comme dans le théorème précédent, $x = \cos\gamma$, et, de plus, $\sqrt{-1} = i$, on a, pour troisième valeur de X_n,*

$$X_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\cos\gamma + i\sin\gamma\cos\omega)^n\, d\omega.$$

Démonstration. On sait que toute expression de la forme

$$\frac{1}{\sqrt{A^2 + B}}$$

peut se représenter par l'intégrale définie

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\omega}{A - iB\cos\omega}$$

où $i = \sqrt{-1}$. Soit donc

$$A = 1 - \alpha\cos\gamma, \quad B = \alpha\sin\gamma,$$

nous aurons

$$(1 - 2\alpha\cos\gamma + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\omega}{1 - \alpha\cos\gamma - i\alpha\sin\gamma\cos\omega};$$

développant les deux membres suivant les puissances entières et positives de α, et identifiant les deux développements, on trouve le résultat énoncé.

THÉORÈME V. *Les trois fonctions consécutives X_{n-1}, X_n, X_{n+1}, sont liées par la relation*

$$(n+1)X_{n+1} - (2n+1)xX_n + nX_{n-1} = 0.$$

Corollaire. On déduit de la relation précédente, et en s'aidant des principes de M. Sturm, que les racines de l'équation

$$X_n = 0$$

sont réelles, inégales, comprises entre -1 et $+1$, et telles, qu'entre deux d'entre elles consécutives se trouve une et une seule racine

réelle de l'équation

$$X_{n-1} = 0.$$

THÉORÈME VI. *Les indices m et n étant différents, l'intégrale définie*

$$\int_{-1}^{+1} X_m X_n \, dx$$

sera toujours nulle. Si ces indices sont égaux, on aura

$$\int_{-1}^{+1} X_n^2 \, dx = \frac{2}{2n+1}.$$

THÉORÈME VII. *On a*

$$X_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n.2^n} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n}.$$

THÉORÈME VIII. *La fonction X_n vérifie l'équation différentielle du second ordre*

$$(1) \qquad \frac{d\left(1-x^2\right)\frac{dX_n}{dx}}{dx} + n(n+1)X_n = 0.$$

Remarque. Le produit de X_n par une constante est la seule fonction entière de x, qui vérifie l'équation (1).

THÉORÈME IX. *Les indices m et n étant différents, l'intégrale définie*

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d^r X_m}{dx^r} \frac{d^r X_n}{dx^r} (1-x^2)^r \, dx$$

sera toujours nulle. Si ces indices sont égaux, on aura

$$\int_{-1}^{+1} \left(\frac{d^r X_n}{dx^r}\right)^2 (1-x^2)^r \, dx = \frac{2}{2n+1} \frac{\pi(n+r)}{\pi(n-r)}.$$

$\pi(k)$ représentant, en général, le produit $1.2.3\ldots k$.

THÉORÈME X. *Les deux fonctions consécutives X_n et X_{n+1} sont liées par la relation différentielle*

$$\frac{1}{n+1}(1-x^2)\frac{dX_n}{dx} = xX_n - X_{n+1}.$$

Démonstration. D'après l'équation (1), on a

$$\frac{1}{n+1}(1-x^2)\frac{dX_n}{dx} = -n\int_1^x X_n\,dx;$$

il suffira donc de montrer que

$$-n\int_{-1}^{x} X_n\,dx = xX_n - X_{n-1},$$

ou, en se rappelant la valeur donnée par le théorème VII, que

$$\frac{-1}{1.2.3\ldots(n-1)2^n}\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{1.2.3\ldots n.2^n}x\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} - \frac{1}{1.2.3\ldots(n+1)2^{n+1}}\frac{d^{n+1}(x^2-1)^{n+1}}{dx^{n+1}},$$

ou bien encore que

$$\frac{d^{n+1}(x^2-1)^{n+1}}{dx^{n+1}} = 2(n+1)x\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} + 2n(n+1)\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}.$$

Mais

$$\frac{d^{n+1}(x^2-1)^{n+1}}{dx^{n+1}} = (x^2-1)\frac{d^{n+1}(x^2-1)^n}{dx^{n+1}}$$

$$+ 2(n+1)x\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} + n(n+1)\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}};$$

donc il faut que

$$(x^2-1)\frac{d^{n+1}(x^2-1)^n}{dx^{n+1}} = n(n+1)\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}.$$

Or, en différentiant par rapport à x, et multipliant par $\frac{1}{1.2.3\ldots n.2^n}$, on trouve

$$\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{dX_n}{dx} + n(n+1)X_n = 0.$$

Théorème XI. *Posant $x = \cos\gamma$, et supposant que γ varie entre les limites α et $\pi-\alpha$, où α est un nombre déterminé aussi petit qu'on le veut, mais cependant différent de 0, on a, pour toutes ces valeurs*

de γ.

$$X_n = \frac{2\cos\left(n\gamma + \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2n\pi\sin\gamma}} + (-1)^n \frac{\cos\left(n\gamma + \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{2n\sqrt{2n\pi\sin\gamma}}$$

$$+ \frac{\cot\gamma\sin\left(n\gamma + \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{4n\sqrt{2n\pi\sin\gamma}} + \frac{p}{n^2\sqrt{n}},$$

p étant une fonction de γ et de n qui reste toujours au-dessous d'une certaine limite fixe.

Démonstration. D'après le théorème VIII, on a

$$\frac{d\left(1-x^2\right)\frac{dX_n}{dx}}{dx} + n(n+1)X_n = 0,$$

et, en changeant x en $\cos\gamma$,

$$\frac{d^2X_n}{d\gamma^2} + \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}\frac{dX_n}{d\gamma} + n(n+1)X_n = 0.$$

Posons $X_n = u\sin^{-\frac{1}{2}}\gamma$, afin de faire disparaître le second terme, on viendra

$$\frac{d^2u}{d\gamma^2} + \left(n+\frac{1}{2}\right)^2 u = -\frac{u}{4\sin^2\gamma},$$

ou

$$(1) \qquad \frac{d^2u}{d\gamma^2} + \rho^2 u = -\frac{u}{4\sin^2\gamma},$$

en faisant $n + \frac{1}{2} = \rho$.

Multiplions maintenant cette équation par $\sin\rho\gamma\, d\gamma$, et intégrons de α à γ, nous aurons

$$\sin\rho\gamma\frac{du}{d\gamma} - \rho u\cos\rho\gamma = C - \frac{1}{4}\int_\alpha^\gamma \frac{u\sin\rho\gamma\, d\gamma}{\sin^2\gamma},$$

ou bien, en remplaçant, sous le signe $\int$, la variable γ par γ', afin de la distinguer de la valeur particulière qui représente la limite supérieure, et appelant u' ce que devient u par ce changement,

$$(2) \qquad \sin\rho\gamma\frac{du}{d\gamma} - \rho u\cos\rho\gamma = C - \frac{1}{4}\int_\alpha^\gamma \frac{u'\sin\rho\gamma'\, d\gamma'}{\sin^2\gamma'}.$$

multipliant de même l'équation (1) par $\cos\rho\gamma\,d\gamma$, et intégrant de α à γ, on a

$$(3)\qquad \cos\rho\gamma\,\frac{du}{d\gamma} + \rho u \sin\rho\gamma = C' - \frac{1}{4}\int_\alpha^\gamma \frac{u'\cos\rho\gamma'\,d\gamma'}{\sin^2\gamma'}.$$

Éliminant $\frac{du}{d\gamma}$ entre les équations (2) et (3), il vient

$$u = \frac{C'\sin\rho\gamma - C\cos\rho\gamma}{\rho} + \frac{1}{4\rho}\int_\alpha^\gamma \frac{u'\sin\rho(\gamma'-\gamma)\,d\gamma'}{\sin^2\gamma'},$$

ou bien, en substituant à C et C' deux nouvelles constantes δ et ε, convenablement choisies,

$$u = \frac{\delta\cos(\rho\gamma+\varepsilon)}{\rho} + \frac{1}{4\rho}\int_\alpha^\gamma \frac{u'\sin\rho(\gamma'-\gamma)\,d\gamma'}{\sin^2\gamma'}.$$

Ce résultat fait connaître les différents termes du développement de u, suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{\rho}$: en effet, on en déduit successivement

$$u = \frac{\delta\cos(\rho\gamma+\varepsilon)}{\rho} + \frac{\delta}{4\rho^2}\int_\alpha^\gamma \frac{\cos(\rho\gamma'+\varepsilon)\sin\rho(\gamma'-\gamma)\,d\gamma'}{\sin^2\gamma'}$$
$$+ \frac{1}{16\rho}\int_\alpha^\gamma \frac{\sin\rho(\gamma'-\gamma)\,d\gamma'}{\sin^2\gamma'}\int_\alpha^{\gamma'} \frac{u''\sin\rho(\gamma''-\gamma')\,d\gamma''}{\sin^2\gamma''},$$

puis

$$u = \frac{\delta\cos(\rho\gamma+\varepsilon)}{\rho} + \frac{\delta}{4\rho}\int_\alpha^\gamma \frac{\cos(\rho\gamma'+\varepsilon)\sin\rho(\gamma'-\gamma)\,d\gamma'}{\sin^2\gamma'}$$
$$+ \frac{\delta}{16\rho}\int_\alpha^\gamma \frac{\sin\rho(\gamma'-\gamma)\,d\gamma'}{\sin^2\gamma'}\int_\alpha^{\gamma'} \frac{\cos(\rho\gamma''+\varepsilon)\sin\rho(\gamma''-\gamma')\,d\gamma''}{\sin^2\gamma''}$$
$$+ \frac{1}{64\rho^2}\int_\alpha^\gamma \frac{\sin\rho(\gamma'-\gamma)\,d\gamma'}{\sin^2\gamma'}\int_\alpha^{\gamma'} \frac{\sin\rho(\gamma''-\gamma')\,d\gamma''}{\sin^2\gamma''}\int_\alpha^{\gamma''} \frac{u'''\sin\rho(\gamma'''-\gamma'')\,d\gamma'''}{\sin^2\gamma''};$$

ainsi de suite. On peut remarquer que, pour éviter toute confusion, nous changeons sous le signe $\int$ successivement γ' en γ'', γ''', ... ; ce qui transforme u' en u'', u''', ...

Nous ne ferons usage, dans ce qui va suivre, que de la valeur de u, écrite en dernier lieu, mais après l'avoir mise sous une forme beaucoup

plus simple. Il est clair que u ou bien $X_n \sin^{\frac{1}{2}}\gamma$ est, pour toutes les valeurs de ρ et pour toutes les valeurs de γ, depuis α jusqu'à $\pi - \alpha$, constamment inférieur, en valeur absolue, à 1; d'ailleurs $\sin^2\gamma'$, $\sin^2\gamma''$, $\sin^2\gamma'''$ sont au moins égaux à $\sin^2\alpha$. D'après cela, l'intégrale triple

$$\int_\alpha^\gamma \frac{\sin\rho(\gamma'-\gamma)\,d\gamma'}{\sin^2\gamma'}\int_\alpha^{\gamma'}\frac{\sin\rho(\gamma''-\gamma')\,d\gamma''}{\sin^2\gamma''}\int_\alpha^{\gamma''}\frac{u''\sin\rho(\gamma''-\gamma'')\,d\gamma''}{\sin^2\gamma'''}$$

ne peut jamais dépasser, quel que soit ρ et quel que soit γ, depuis α jusqu'à $\pi-\alpha$, un certain nombre déterminé; il en est de même évidemment de l'intégrale double

$$\int_\alpha^\gamma \frac{\sin\rho(\gamma'-\gamma)\,d\gamma'}{\sin^2\gamma'}\int_\alpha^{\gamma'}\frac{\cos(\rho\gamma'+\varepsilon)\sin\rho(\gamma''-\gamma')\,d\gamma''}{\sin^2\gamma''}.$$

on peut donc écrire

$$u = \frac{\delta\cos(\rho\gamma+\varepsilon)}{\rho} + \frac{\delta}{4}\int_\alpha^\gamma \frac{\cos(\rho\gamma'+\varepsilon)\sin\rho(\gamma''-\gamma')\,d\gamma''}{\sin^2\gamma'} + \frac{p\delta}{\rho} + \frac{q}{\rho}.$$

p et q restant finis pour toutes les valeurs de ρ et pour les valeurs de γ, comprises entre α et $\pi-\alpha$. De plus, si l'on remplace dans l'intégrale le produit de sinus et cosinus par une somme de sinus, il vient

$$\frac{\delta}{8\rho^2}\int_\alpha^\gamma \frac{\sin(2\rho\gamma'-\rho\gamma+\varepsilon)\,d\gamma'}{\sin^2\gamma'} - \frac{\delta}{8\rho^2}\sin(\rho\gamma+\varepsilon)\int_\alpha^\gamma \frac{d\gamma'}{\sin^2\gamma'}$$

or le premier terme, en remarquant que

$$\sin(2\rho\gamma'-\rho\gamma+\varepsilon) = \frac{1}{2\rho}\frac{d\cos(2\rho\gamma'-\rho\gamma+\varepsilon)}{d\gamma'},$$

et appliquant le procédé de l'intégration par parties, se met aisément sous la forme $\frac{p\delta}{\rho}$, p étant, comme p, une certaine fonction de ρ et de γ, qui ne dépasse jamais une limite fixe; on peut donc grouper ce terme avec $\frac{p\delta}{\rho}$ dans la valeur de u, et il vient finalement

$$u = \frac{\delta\cos(\rho\gamma+\varepsilon)}{\rho} - \frac{\delta}{8\rho^2}\sin(\rho\gamma+\varepsilon)\int_\alpha^\gamma \frac{d\gamma'}{\sin^2\gamma'} + \frac{p\delta}{\rho} + \frac{q}{\rho}.$$

p et q sont, comme plus haut, des fonctions de ρ et γ, qui restent pour toutes les valeurs de ρ et pour les valeurs de γ comprises entre α et $\pi - \alpha$, constamment au-dessous d'une certaine limite fixe.

Occupons-nous maintenant de la détermination des constantes δ et ε introduites par l'intégration de l'équation (1). Pour cela, remarquons que, lorsque $\gamma = \frac{\pi}{2}$, on a, suivant le degré de parité de n,

$$u = X_{2k+1} = 0.$$

$$u = X_{2k} = (-1)^k \frac{1.3.5\ldots(2k-1)}{2.4.6\ldots 2k} - (-1)^k \frac{1.2.3\ldots 2k}{2^k 1.2.3\ldots k}$$

$$= (-1)^k \frac{\sqrt{2\pi}\,.\,2k)^{2k+\frac{1}{2}} e^{-2k+\frac{1}{2k}-\frac{\theta}{880k}}}{2^{2k}\,.\,2\pi k^{2k+1} e^{-2k-\frac{1}{6k}-\frac{\theta'}{180k^3}}} = (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k\pi}} e^{-\frac{1}{8k}+\frac{\theta''}{k^2}}.$$

θ et θ' étant compris entre 0 et 1, et, par suite, θ'' entre $-\frac{1}{2880}$ et $\frac{1}{180}$; nous obtenons ainsi les deux relations

$$0 = \frac{\delta \sin\left(\frac{\pi}{4}+\varepsilon\right)}{2k+\frac{3}{2}} + \frac{\delta \cos\left(\frac{\pi}{4}+\varepsilon\right)}{8\left(2k+\frac{3}{2}\right)^2} \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\gamma'}{\sin^2\gamma'} - \frac{p\delta}{\left(2k+\frac{3}{2}\right)} + \frac{q}{\left(2k+\frac{3}{2}\right)^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{k\pi}} e^{-\frac{1}{8k}-\frac{\theta''}{k^2}}$$

$$= \frac{\delta \cos\left(\frac{\pi}{4}+\varepsilon\right)}{2k+\frac{1}{2}} - \frac{\delta \sin\left(\frac{\pi}{4}+\varepsilon\right)}{8\left(2k+\frac{1}{2}\right)^2} \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\gamma'}{\sin^2\gamma'} + \frac{p\delta}{\left(2k+\frac{1}{2}\right)} - \frac{q}{\left(2k+\frac{1}{2}\right)^2}.$$

dans lesquelles p et q n'ont pas la même signification que dans l'égalité (4), et représentent, comme dans tout ce qui va suivre, deux nombres fonctions de k seulement qui restent, quel que soit k, au-dessous d'une certaine limite fixe. Ordonnant les seconds membres par rapport aux puissances croissantes de $\frac{1}{k}$, groupant, dans $\frac{p\delta}{k^2}$ et $\frac{q}{k^2}$,

tous les termes de même forme, et posant, pour simplifier,

$$\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\gamma'}{\sin^2\gamma'} = a,$$

ces égalités deviennent

$$a - 0 = \frac{\delta \sin\left(\frac{\pi}{4} + \varepsilon\right)}{2k} - \frac{\delta}{8k^2}\left[3\sin\left(\frac{\pi}{4} + \varepsilon\right) - \frac{a}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \varepsilon\right)\right] + \frac{p\delta}{k} + \frac{q}{k^2},$$

$$\frac{1}{\sqrt{k\pi}} e^{\frac{1}{8k} + \frac{\theta'}{k^2}}$$

$$- \frac{\delta \cos\left(\frac{\pi}{4} + \varepsilon\right)}{2k} - \frac{\delta}{8k^2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \varepsilon\right) + \frac{a}{4}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \varepsilon\right)\right] + \frac{p\delta}{k} + \frac{q}{k^2},$$

d'où, en faisant la somme membre à membre de leurs carrés et simplifiant,

$$\frac{1}{k\pi} e^{-\frac{1}{4k} + \frac{2\theta'}{k^2}} = \frac{\delta}{4k} - \frac{\delta^2}{8k}(2 + \sin 2\varepsilon) + \frac{p\delta^2}{k^2} + \frac{q\delta}{k^2} + \frac{r}{k^2},$$

ou mieux,

$$b \quad \frac{1}{k\pi} - \frac{1}{4k\pi} + \frac{1}{32k\pi} = \frac{\delta}{4k} - \frac{\delta^2}{8k}(2 + \sin 2\varepsilon) + \frac{p\delta^2}{k^2} + \frac{q\delta}{k^2} + \frac{r}{k^2},$$

r étant un nombre de même nature que p et q, toujours fini, quel que soit k.

L'égalité (b) montre facilement que δ est de la forme $2\sqrt{\frac{k}{\pi}}(1 + \zeta)$, ζ s'annulant avec $\frac{1}{k}$; puis l'égalité (a) que $\varepsilon = -\frac{\pi}{4} + \eta$, η s'annulant aussi avec $\frac{1}{k}$. Reste donc à trouver ζ et η; or, à cause des valeurs précédentes de δ et de ε, les égalités (a) et (b) peuvent se simplifier et s'écrire ainsi :

$$a' \qquad 0 = \sin\eta + \frac{1}{4k}\left(3\sin\eta - \frac{a}{4}\cos\eta\right) + \frac{p'}{k^2},$$

$$b' \qquad \frac{1}{k\pi} - \frac{1}{4k\pi} = \frac{\delta}{4k} - \frac{\delta^2}{8k}(2 - \cos 2\eta) + \frac{r'}{k}.$$

L'égalité (a') ne contenant que η, fait connaître cette inconnue: on peut d'abord la mettre sous la forme

$$\left(1 - \frac{3}{4k}\right) \operatorname{tang} \eta + \frac{a}{16k} + \frac{p}{k^2} = 0,$$

et de là on tire

$$\operatorname{tang} \eta = -\frac{a}{16k} + \frac{p}{k^2}.$$

par conséquent,

$$\eta = -\frac{a}{16k} + \frac{p}{k^2}.$$

L'égalité (b'), qui peut, à cause de la valeur de η, s'écrire ainsi :

$$\frac{1}{k\pi} - \frac{1}{4k^2\pi} = \frac{\delta^2}{4k^2} - \frac{\delta^2}{8k} + \frac{p}{k}.$$

donne ensuite

$$\delta^2 = \frac{\frac{1}{k\pi} - \frac{1}{4k^2\pi} - \frac{p}{k^2}}{\frac{1}{4k^2} - \frac{1}{8k}} = \frac{4k}{\pi} - \frac{1}{\pi} + \frac{p}{k},$$

d'où

$$\delta = 2\sqrt{\frac{k}{\pi}} + \frac{1}{4\sqrt{k\pi}} + \frac{p}{k\sqrt{k}}.$$

Ainsi les constantes δ et ε ont respectivement pour valeur,

$$\delta = 2\sqrt{\frac{k}{\pi}} + \frac{1}{4\sqrt{k\pi}} + \frac{p}{k\sqrt{k}},$$

$$\varepsilon = -\frac{\pi}{4} - \frac{a}{16k} + \frac{q}{k^2},$$

p et q étant des fonctions de k jouissant de la propriété de ne pas pouvoir dépasser une certaine limite fixe.

Dans les valeurs précédentes de δ et de ε, k represente la moitié de l'indice n de X_n quand cet indice est pair, ou la moitié de l'indice diminuée de $\frac{1}{2}$ quand cet indice est impair: or il convient d'introduire

l'indice lui-même dans les valeurs de δ et de ε; faisant la substitution, on trouve facilement

$$\delta = \sqrt{\frac{2n}{\pi}} \pm \frac{1}{2\sqrt{2n\pi}} + \frac{p}{n\sqrt{n}}, \qquad \varepsilon = -\frac{\pi}{4} + \frac{a}{8n} + \frac{q}{n^2},$$

le signe + du second terme de δ convenant au cas de n pair, et le signe — au cas de n impair.

Reprenons la valeur de u fournie par l'équation (4), et écrivons-la comme il suit :

$$u = \frac{\delta \cos\left(n\gamma + \frac{\gamma}{2} - \varepsilon\right)}{n} - \frac{\delta \cos\left(n\gamma + \frac{\gamma}{2} + \varepsilon\right)}{2n}$$

$$- \frac{\delta}{8n^2} \sin\left(n\gamma - \frac{\gamma}{2} + \varepsilon\right) \int_{\alpha}^{\gamma} \frac{d\gamma'}{\sin^2\gamma'} + \frac{p\delta}{n} + \frac{q}{n},$$

en ordonnant par rapport aux puissances de $\frac{1}{n}$; puis remplaçons δ et ε par leurs valeurs précédemment obtenues, il viendra

$$u = \frac{2\cos\left(n\gamma + \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2n\pi}} + \frac{(-1)^n \cos\left(n\gamma - \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{2n\sqrt{2n\pi}}$$

$$+ \frac{\left(a - \int_{\alpha}^{\gamma} \frac{d\gamma}{\sin^2\gamma}\right) \sin\left(n\gamma + \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{4n\sqrt{2n\pi}} + \frac{p}{n\sqrt{n}},$$

p étant maintenant une fonction de γ, quoique jouissant toujours de la même propriété; ou mieux

$$u = \frac{2\cos\left(n\gamma + \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2n\pi}} + \frac{(-1)^n \cos\left(n\gamma - \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{2n\sqrt{2n\pi}}$$

$$- \frac{\cot\gamma \sin\left(n\gamma + \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{4n\sqrt{2n\pi}} + \frac{p}{n\sqrt{n}},$$

en se rappelant les valeurs de a et de $\int_{\alpha}^{\gamma} \frac{d\gamma'}{\sin^2\gamma'}$.

Divisant enfin par $\sin^{\frac{1}{2}}\gamma$, afin d'avoir X_n, on trouve

$$X_n = \frac{2\cos\left(n\gamma + \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2n\pi\sin\gamma}} + (-1)^n \frac{\cos\left(n\gamma + \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{2n\sqrt{2n\pi\sin\gamma}}$$

$$+ \frac{\cot\gamma\sin\left(n\gamma + \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{4n\sqrt{2n\pi\sin\gamma}} + \frac{P}{n^2\sqrt{n}},$$

comme il fallait le démontrer.

§ II.

Propriétés des fonctions Y_n.

Si, dans l'expression $(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$, on suppose

$$x = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi'),$$

le coefficient de α^n, qui jusqu'ici a été désigné par X_n, deviendra ce qu'on appelle habituellement P_n.

Théorème I. *La fonction* P_n *satisfait à l'équation aux différences partielles*

$$(1) \qquad \frac{d\left(\sin\theta\frac{dP_n}{d\theta}\right)}{\sin\theta\, d\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{d^2P_n}{d\varphi^2} + n(n+1)P_n = 0.$$

Remarque. P_n n'est pas la seule fonction entière des trois quantités $\cos\theta$, $\sin\theta\cos\varphi$, $\sin\theta\sin\varphi$, qui vérifie l'équation (1); on donnera plus bas, théorème IV, la forme générale des fonctions qui jouissent de cette double propriété, et que l'on appelle fonctions Y_n.

Théorème II. *On a*

$$P_n = X_n X'_n + \frac{2\Pi(n-1)}{\Pi(n+1)}\sin\theta\sin\theta'\frac{dX_n}{dx}\frac{dX'_n}{dx'}\cos(\varphi - \varphi')$$

$$+ \frac{2\Pi(n-2)}{\Pi(n+2)}\sin^2\theta\sin^2\theta'\frac{d^2X_n}{dx^2}\frac{d^2X'_n}{dx'^2}\cos 2(\varphi - \varphi') + \ldots$$

$\Pi(k)$ *représentant en général le produit* $1.2.3\ldots k$, *et* X_n *et* X'_n *étant*

les coefficients de α^n dans les développements de $(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$, et de $(1 - 2\alpha x' + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$, où l'on fait d'ailleurs

$$x = \cos\theta, \quad x' = \cos\theta'.$$

Théorème III. *On a*

$$\int_0^{2\pi} P_n \, d\varphi = 2\pi X_n X'_n,$$

X_n et X'_n ayant la même signification que dans le théorème précédent.

Théorème IV. *On a*

$$Y_n = a X_n + (b' \cos\varphi + c' \sin\varphi) \frac{dX_n}{dx} \sin\theta$$
$$+ (b'' \cos 2\varphi + c'' \sin 2\varphi) \frac{d^2 X_n}{dx^2} \sin^2\theta + \ldots,$$

X_n étant toujours le coefficient de α^n dans le développement de $(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ où l'on suppose

$$x = \cos\theta,$$

et $a, b', c', b'', c'', \ldots$ représentant des constantes quelconques par rapport à θ et à φ.

Théorème V. *On a, m et n étant différents,*

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} Y_m Y_n \sin\theta \, d\theta = 0.$$

Théorème VI. *On a*

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} Y_n P_n \sin\theta \, d\theta = \frac{4\pi}{2n+1} Y'_n,$$

en appelant Y'_n ce que devient Y_n quand on y fait

$$\theta = \theta' \quad \text{et} \quad \varphi = \varphi'.$$

Théorème VII. *On a*

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} P_n^2 \sin\theta \, d\theta = \frac{4\pi}{2n+1}.$$

§ III.

Développement des fonctions de deux angles en séries ordonnées suivant les fonctions Y_n.

1. La formule qui sert à développer toute fonction de deux angles θ et φ en série ordonnée suivant les fonctions Y_n est exprimée par l'égalité suivante,

$$(a)\quad f(\theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{n=\infty} (2n+1) \int_0^{2\pi} \sin\theta' d\theta' \int_0^{2\pi} P_n f(\theta', \varphi') d\varphi'.$$

Cette égalité a lieu pour toutes les valeurs de θ et de φ comprises entre les limites $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, $\varphi = 0$ et $\varphi = 2\pi$, et la fonction $f(\theta, \varphi)$ dont elle donne le développement, n'est assujettie qu'à la seule condition de ne pas devenir infinie. Quand le système de valeurs attribuées à θ et φ rend $f(\theta, \varphi)$ discontinue, le premier membre, qui n'a plus alors aucun sens précis, doit être remplacé par la valeur moyenne de la fonction $f(\theta, \varphi)$ répondant au système des valeurs de θ et de φ considérées. Voici, d'ailleurs, ce que l'on entend par valeur moyenne d'une fonction pour un système de valeurs des variables, rendant cette fonction discontinue. Prenons trois axes de coordonnées rectangulaires et regardons, pour plus de commodité, θ comme l'angle inférieur à π que forme une certaine droite OA issue de l'origine avec l'axe OZ, et φ comme l'angle positif que fait le plan de OA et de OZ avec le plan ZOX, de manière qu'à chaque système de valeurs de θ et de φ réponde une et une seule droite issue de l'origine; ou mieux, en représentant ces droites par leur point de rencontre avec une sphère S de rayon 1 et ayant le point O pour centre, un et un seul point de la sphère S. Ceci admis, supposons la fonction $f(\theta, \varphi)$ discontinue pour un système de valeurs de θ et φ répondant à un certain point A de la sphère S; on devra en conclure que la limite vers laquelle tend $f(\theta, \varphi)$, à mesure qu'on s'approche indéfiniment du point A en suivant une certaine ligne tracée sur la surface S et issue du point A, est variable avec la position de cette ligne qu'on peut supposer être un grand cercle dans le voisinage du point A; or, appelons ω l'angle variable qu'un arc de grand cercle

quelconque AM, issu du point A, fait avec un autre arc de grand cercle fixe AB, issu du même point, et soit $F(\omega)$ la limite vers laquelle tend la fonction $f(\theta, \varphi)$, quand on s'approche du point A en suivant la ligne MA; l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\omega)\, d\omega$$

sera la valeur moyenne de la fonction $f(\theta, \varphi)$ relative au point A.

Il est presque inutile de dire que lorsque $f(\theta, \varphi)$ n'est pas discontinue pour le point A, il y a égalité entre la valeur moyenne et la valeur propre de la fonction en ce point.

2. Pour démontrer l'égalité (a), nous chercherons à sommer la série

$$(b)\qquad \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\int_0^{\pi}\sin\theta'\, d\theta'\int_0^{2\pi} P\, f(\theta', \varphi')\, d\varphi';$$

à cet effet, nous considérerons d'abord la série

$$(c)\qquad \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\,\alpha^n\int_0^{\pi}\sin\theta'\, d\theta'\int_0^{2\pi} P\, f(\theta', \varphi')\, d\varphi',$$

que l'on obtient en multipliant les différents termes de la précédente par les puissances successives d'un nombre α positif et moindre que 1; puis, ayant obtenu la somme de cette série, nous déterminerons la limite vers laquelle elle tend à mesure que α s'approche indéfiniment de 1; cette limite sera la somme de la série (b) si toutefois cette dernière série est convergente, comme cela résulte d'un théorème connu dû à Abel.

3. Posons

$$\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi') = \cos\gamma$$

et

$$(1 - 2\alpha\cos\gamma + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = V;$$

nous aurons, pour toutes les valeurs de α moindres que 1,

$$V = P_0 + P_1\alpha + P_2\alpha^2 + \ldots + P_n\alpha^n + \ldots;$$

de là on déduit aisément

$$V + 2\alpha \frac{dV}{d\alpha} = \frac{1-\alpha^2}{(1-2\alpha\cos\gamma+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= P_0 + 3P_1\alpha + 5P_2\alpha^2 + \ldots + (2n+1)P_n\alpha^n + \ldots,$$

égalité qui subsiste aussi pour toutes les valeurs de α moindres que 1.

Multipliant les deux membres par $f(\theta', \varphi')\sin\theta' d\theta' d\varphi'$, et intégrant par rapport à θ' de 0 à π, et par rapport à φ' de 0 à 2π, il vient

$$(1-\alpha^2)\int_0^{\pi}\sin\theta' d\theta'\int_0^{2\pi}\frac{f(\theta', \varphi')d\varphi'}{(1-2\alpha\cos\gamma+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \sum_{n=0}^{n=\infty}(2n+1)\alpha^n\int_0^{\pi}\sin\theta' d\theta'\int_0^{2\pi}P_n f(\theta', \varphi')d\varphi',$$

ce qui déjà nous fait connaître la somme de la série (c).

4. Déterminons, en second lieu, la limite vers laquelle tend l'intégrale

$$(d)\qquad (1-\alpha^2)\int_0^{\pi}\sin\theta' d\theta'\int_0^{2\pi}\frac{f(\theta', \varphi')d\varphi'}{(1-2\alpha\cos\gamma+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}},$$

à mesure que α s'approche indéfiniment de 1, en lui restant constamment moindre. Reprenons la sphère S, appelons $d\sigma'$ l'élément de cette sphère qui répond au point M pour lequel

$$ZOM = \theta' \quad \text{et} \quad (\widehat{ZOM, ZOX}) = \varphi';$$

si N représente le point pour lequel

$$ON = \alpha, \quad ZON = \theta, \quad (\widehat{ZON, ZOX}) = \varphi,$$

et que A soit le point de la sphère S situé à l'extrémité du rayon ON, nous pourrons mettre l'intégrale (d) sous la forme

$$(e)\qquad (1+\alpha)\,AN\int\int\frac{f(\theta', \varphi')d\sigma'}{\overline{MN}^3}.$$

Cette nouvelle intégrale est étendue à tous les éléments de la sphère S; mais, comme il ne s'agit ici que de trouver la limite vers laquelle elle tend à mesure que α s'approche de 1, ou à mesure que le point N s'approche du point A, on peut évidemment se contenter de l'étendre à la portion de la sphère comprise dans un contour quelconque comprenant le point A, car l'autre partie de l'intégrale aura toujours zéro pour limite. Prenons donc pour définir les limites de l'intégrale un petit cercle ayant le point A pour pôle et supposons son rayon sphérique assez petit pour que, dans l'intérieur de ce cercle, il n'y ait pas d'autres points que le point A dont les coordonnées θ et φ puissent rendre discontinue la fonction $f(\theta, \varphi)$. On comprendra facilement que cette dernière condition peut toujours être remplie, en remarquant que les solutions de continuité de $f(\theta, \varphi)$ ne correspondent qu'à des points isolés et en nombre fini de la sphère S, et que cette fonction ne saurait être discontinue pour tous les points d'une ligne tracée sur la surface S, sans quoi la formule que nous nous proposons d'établir pourrait cesser d'être exacte. Ceci posé, transformons encore l'intégrale (c). Appelons γ l'angle MOA et ω l'angle que le plan MOA fait avec un plan fixe conduit suivant OA, le plan ZOA par exemple. En supposant à l'élément $d\sigma$ une forme convenable, nous pourrons le considérer comme égal à $\sin\gamma\, d\gamma\, d\omega$, et si nous appelons $f_1(\gamma, \omega)$ la fonction $f(\theta, \varphi)$ exprimée en γ et ω, notre intégrale deviendra

$$(1-\alpha)\,\mathrm{AN}\int_0^{\omega+\pi} d\omega \int_0^{\gamma} \frac{f_1(\gamma, \omega)\sin\gamma\, d\gamma}{(1+\mathrm{ON}^2-2\,\mathrm{ON}\cos\gamma)^2},$$

γ étant le rayon sphérique du contour qui détermine les limites de l'intégrale.

5. Occupons-nous de l'intégrale simple

$$\mathrm{AN}\int_0^{\gamma} \frac{f_1(\gamma, \omega)\sin\gamma\, d\gamma}{(1+\mathrm{ON}^2-2\,\mathrm{ON}\cos\gamma)^2}.$$

Intégrons par parties, ce qui est permis ici, puisque $f_1(\gamma, \omega)$ est con-

tinue entre les limites de l'intégration; il viendra

$$f = \left\{ \begin{aligned} &\left[\frac{AN}{ON}\,\frac{f_1(\gamma,\omega)}{(1+\overline{ON}^2-2ON\cos\gamma)^{\frac{1}{2}}}\right]_{\gamma=0} - \left[\frac{AN}{ON}\,\frac{f_1(\gamma,\omega)}{(1+\overline{ON}^2-2ON\cos\gamma)^{\frac{1}{2}}}\right]_{\gamma=\gamma'} \\ &\qquad - \frac{AN}{ON}\int_0^{\gamma'} \frac{\frac{df_1}{d\gamma}\,d\gamma}{(1+\overline{ON}^2-2ON\cos\gamma)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \right.$$

Le premier terme de cette somme est égal à $\frac{f_1(0,\omega)}{ON}$, et se réduit à $f_1(0,\omega)$ quand le point N coïncide avec le point A : le second a évidemment zéro pour limite. Passons au troisième

$$\frac{AN}{ON}\int_0^{\gamma'} \frac{\frac{df}{d\gamma}\,d\gamma}{(1+\overline{ON}^2-2ON\cos\gamma)^{\frac{1}{2}}}.$$

La fonction $\frac{df}{d\gamma}$, qui entre sous le signe $\int$ dans cette intégrale, peut présenter, entre les limites 0 et γ' de l'intégration, un certain nombre de changements de signes; toutefois, ce nombre doit être fini, sans quoi la fonction $f_1(\gamma,\omega)$ aurait, dans le voisinage du point A, un nombre infini de maxima ou minima, hypothèse qu'il faut nécessairement écarter. Décomposons l'intégrale en une série d'autres, de telle sorte qu'entre les limites de chacune, la fonction $\frac{df}{d\gamma}$ ait constamment le même signe; et soit

$$\frac{AN}{ON}\int_{\gamma_k}^{\gamma_{k+1}} \frac{\frac{df_1}{d\gamma}\,d\gamma}{(1+\overline{ON}^2-2ON\cos\gamma)^{\frac{1}{2}}}$$

l'une de ces nouvelles intégrales; comme $\frac{AN}{(1+\overline{ON}^2-2ON\cos\gamma)^{\frac{1}{2}}}$ est au plus égal à 1 et que $\frac{df}{d\gamma}$ a constamment le même signe de γ_k à γ_{k+1}, cette intégrale a une valeur absolue moindre que celle de la diffé-

rence

$$\frac{1}{ON}[f_1(\gamma_{k-1}, \omega) - f_1(\gamma_k, \omega)],$$

et, par conséquent, aussi petite que l'on veut: car $f_1(\gamma, \omega)$ est une fonction continue de γ, et les deux valeurs γ_k, γ_{k-1} de γ ont une différence aussi petite que l'on veut, puisqu'elles sont toutes deux moindres que γ', qui peut être supposé aussi petit que l'on veut; on a ainsi, pour le troisième terme de la somme (f), un nombre fini de quantités aussi petites que l'on veut, et, par conséquent, une quantité aussi petite que l'on veut; de là nous pouvons conclure que la limite vers laquelle tend l'intégrale simple

$$AN\int_0^{\gamma'} \frac{f_1(\gamma, \omega)\sin\gamma\, d\gamma}{(1 + \overline{ON}^2 - 2\,ON\cos\gamma)^{\frac{3}{2}}}$$

est égale à $f_1(0, \omega)$, et, par conséquent, que celle vers laquelle tend l'intégrale double

$$(1 - \alpha)\,AN\int_0^{2\pi} d\omega\int_0^{\gamma'} \frac{f_1(\gamma, \omega)\sin\gamma\, d\gamma}{(1 + \overline{ON}^2 - 2\,ON\cos\gamma)^{\frac{3}{2}}}$$

est

$$2\int_0^{2\pi} f_1(0, \omega)\, d\omega,$$

c'est-à-dire le produit par 4π de la valeur moyenne de $f(\theta, \varphi)$ au point A.

6. Il nous reste, et c'est là la principale difficulté de la question, à démontrer la convergence de la série (b). Transformons d'abord le terme général

$$2n + 1\int_0^{\pi} \sin\theta'\, d\theta'\int_0^{2\pi} P_n f(\theta', \varphi')\, d\varphi'$$

de cette série, en substituant aux variables θ' et φ' les variables γ et ω, dont nous avons fait usage précédemment; il viendra, en observant que P_n s'exprime au moyen de γ seulement,

$$2n + 1\int_0^{\pi} P_n \sin\gamma\, d\gamma\int_0^{2\pi} f_1(\gamma, \omega)\, d\omega.$$

ou bien

$$(g) \qquad (2n+1)\int_0^{\pi} P_n F(\gamma) \sin\gamma\, d\gamma,$$

en posant, pour simplifier,

$$\int_0^{2\pi} f_1(\gamma, \omega)\, d\omega = F(\gamma).$$

Faisons encore $\cos\gamma = x$; P_n deviendra X_n, et si nous appelons $\varphi(x)$ ce que devient $F(\gamma)$, nous aurons

$$(g') \qquad (2n+1)\int_{-1}^{+1} X_n \varphi(x)\, dx$$

comme seconde valeur du terme général de la série, qui, dans ce qui va suivre, sera employé concurremment avec la valeur (g).

7. Avant d'aller plus loin, il est nécessaire de signaler une propriété très-importante des fonctions $F(\gamma)$ et $\varphi(x)$: ces deux fonctions, qui peuvent présenter un nombre fini quelconque de solutions de continuité entre les limites 0 et π, -1 et $+1$ des intégrales où elles entrent, ne peuvent jamais être discontinues pour ces limites mêmes. Ainsi, par exemple $F(\gamma)$ ne saurait être discontinue pour

$$\gamma = 0.$$

En effet, remarquons que $F(0)$ est égal à $\int_0^{2\pi} f_1(0, \omega)\, d\omega$, c'est-à-dire au produit par 2π de la valeur moyenne de $f_1(\gamma, \omega)$ pour le point A; or on peut évidemment toujours tracer autour d'un point A un cercle assez petit pour que, dans son intérieur, il n'y ait pas d'autre discontinuité de la fonction $f_1(\gamma, \omega)$ que celle qui peut avoir lieu au point A; on en déduit qu'en prenant γ suffisamment petit, $f_1(\gamma, \omega)$ est aussi près que l'on veut de $f_1(0, \omega)$, quel que soit d'ailleurs ω; par suite, que $\int_0^{2\pi} f_1(\gamma, \omega)\, d\omega$ est aussi près que l'on veut de $\int_0^{2\pi} f_1(0, \omega)\, d\omega$.

8. Cette propriété étant admise, appelons ε un nombre déterminé assez petit pour que, entre -1 et $-1+\varepsilon$ et entre $1-\varepsilon$ et 1, il n'y ait aucune solution de continuité de la fonction $\varphi(x)$; nous pourrons de-

composer l'intégrale (g') de la manière suivante :

$$(2n+1)\int_{-1}^{-1-\varepsilon} X_n \varphi(x)\,dx + (2n+1)\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} X_n \varphi(x)\,dx$$
$$+ (2n+1)\int_{1-\varepsilon}^{1} X_n \varphi(x)\,dx,$$

et tout consistera à prouver que les trois séries ayant pour termes généraux respectifs les termes de la somme précédente sont convergentes, ou plus simplement, d'après un théorème d'Abel, que les trois séries

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} n\int_{-1}^{-1-\varepsilon} X_n \varphi(x)\,dx,$$

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} n\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} X_n \varphi(x)\,dx,$$

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} n\int_{1-\varepsilon}^{1} X_n \varphi(x)\,dx,$$

le sont.

9. Considérons d'abord la série

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} n\int_{-1}^{-1-\varepsilon} X_n \varphi(x)\,dx;$$

en nous rappelant que X_n vérifie l'équation différentielle

$$\frac{d\left(1-x^2\right)\frac{dX_n}{dx}}{dx} + n(n+1)X_n = 0,$$

nous pouvons mettre le terme général de notre série sous la forme

$$-\frac{1}{n+1}\int_{-1}^{-1-\varepsilon} \varphi(x)\,\frac{d\left(1-x^2\right)\frac{dX_n}{dx}}{dx}\,dx.$$

Intégrant par parties, ce qui est permis ici, puisque $\varphi(x)$ est continue

entre -1 et $-1+\varepsilon$, on a

$$-\frac{\left[\varphi(x)(1-x^2)\frac{dX_n}{dx}\right]_{x=-1+\varepsilon}}{n+1}+\frac{1}{n+1}\int_{-1}^{-1+\varepsilon}\varphi'(x)(1-x^2)\frac{dX_n}{dx}\,dx.$$

Or,

$$\frac{1}{n+1}(1-x^2)\frac{dX_n}{dx}=x\,X_n-X_{n+1}.$$

d'après le théorème X du § Ier; d'ailleurs la série

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}(x\,X_n-X_{n+1})_{x=-1+\varepsilon}$$

est convergente; donc déjà la série

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{\left[\varphi(x)(1-x^2)\frac{dX_n}{dx}\right]_{x=-1+\varepsilon}}{n+1}$$

est convergente, et il suffit de démontrer que la série

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{n+1}\int_{-1}^{-1+\varepsilon}\varphi'(x)(1-x^2)\frac{dX_n}{dx}\,dx,$$

ou

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\int_{-1}^{-1+\varepsilon}\varphi'(x)(x\,X_n-X_{n+1})\,dx,$$

l'est aussi. Pour cela, remarquons que la série

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}(x\,X_n-X_{n+1}),$$

qui est convergente, avons-nous dit, pour $x=-1+\varepsilon$, l'est aussi pour $x=-1$. En effet, ses différents termes se réduisent à zéro pour cette hypothèse; il est donc possible de fixer un nombre A que ne dépasse jamais, en valeur absolue, la somme

$$\sum_{n=0}^{n=n}(x\,X_n-X_{n+1}).$$

quel que soit n et quel que soit x de -1 à $-1+\varepsilon$. Cela étant, on voit aisément que l'intégrale

$$\int_{-1}^{-1+\varepsilon} \varphi'(x) \sum_{n=0}^{n=n} (x X_n - X_{n+1})\, dx$$

est, quel que soit n, aussi près que l'on veut de zéro, en ayant soin de prendre ε suffisamment petit [il faut pourtant que $\varphi'(x)$ ne change de signe, ou que $\varphi(x)$ ne devienne *maximum* ou *minimum*, qu'un nombre fini de fois entre -1 et $-1+\varepsilon$]; il suffit de décomposer cette intégrale en une série d'autres, de façon qu'entre les limites de chacune, $\varphi'(x)$ ait toujours le même signe, puis d'observer que chacune de ces intégrales partielles est, en valeur absolue, moindre que A multiplié par la différence positive des valeurs que prend $\varphi(x)$ lorsqu'on remplace x par les deux limites de l'intégrale.

10. Il ne sera pas inutile, pour lever toutes les difficultés, de montrer comment on peut trouver une valeur de A, ce qui nous permettra en même temps d'établir la convergence de la série

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} (x X_n - X_{n+1}),$$

que nous avons admise un peu plus haut. Rétablissons $\cos\gamma$ à la place de x, et P_n à la place de X_n.

On sait que l'on a (théorème IV, § Ier)

$$P_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\cos\gamma + i\sin\gamma\cos\omega)^n d\omega;$$

d'où l'on tire, en posant, pour simplifier, $\cos\gamma + i\sin\gamma\cos\omega = z$,

$$\sum_{n=0}^{n=1} P_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1})\, d\omega = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1-z^n}{1-z}\, d\omega,$$

$$\sum_{n=0}^{n=1} P_{n+1} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (z + z^2 + \ldots + z^n)\, d\omega = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{z(1-z^n)}{1-z}\, d\omega.$$

et

$$\sum_{n=0}^{n=n-1} (\cos\gamma P_n - P_{n+1}) = \frac{-i}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin\gamma(1-z^2)}{1-z}\cos\omega\, d\omega$$

$$= -\frac{i\sin\gamma}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos\omega\, d\omega}{1-\cos\gamma - i\sin\gamma\cos\omega} + \frac{i\sin\gamma}{\pi}\int_0^\pi \frac{(\cos\gamma + i\sin\gamma\cos\omega)\cos\omega\, d\omega}{1-\cos\gamma - i\sin\gamma\cos\omega}.$$

Ne prenons que les parties réelles de ces intégrales, car la somme de leurs parties imaginaires est évidemment nulle; nous trouverons, en considérant d'abord la première intégrale,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin^2\gamma\cos^2\omega\, d\omega}{(1-\cos\gamma)^2 + \sin^2\gamma\cos^2\omega},$$

ou bien, excluant le cas de $\gamma = 0$, pour lequel, du reste, la somme

$$\sum_{n=0}^{n=n-1} (\cos\gamma P_n - P_{n+1})$$

est nulle,

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\frac{\gamma}{2}\cos^2\omega\, d\omega}{\sin^4\frac{\gamma}{2} + \cos^2\frac{\gamma}{2}\cos^2\omega};$$

divisant, sous le signe $\int$, par $\cos^2\frac{\gamma}{2}\cos^4\omega$, ce qui exige qu'on laisse encore de côté le cas de $\gamma = \pi$, pour lequel on a aussi

$$\sum_{n=0}^{n=n-1} (\cos\gamma P_n - P_{n+1}) = 0,$$

il vient

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\,\mathrm{tang}\,\omega}{(1+\mathrm{tang}^2\omega)\left(1+\mathrm{tang}^2\frac{\gamma}{2}+\mathrm{tang}^2\frac{\gamma}{2}\mathrm{tang}^2\omega\right)} = 1 - \sin\frac{1}{2}\gamma.$$

Ainsi, la partie réelle de la première intégrale est toujours moindre que 1.

Occupons-nous de la seconde intégrale

$$\frac{i \sin \gamma}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{(\cos \gamma + i \sin \gamma \cos \omega)^n \cos \omega \, d\omega}{(1 - \cos \gamma - i \sin \gamma \cos \omega)}.$$

Il est évident que le module de $(\cos \gamma + i \sin \gamma \cos \omega)^n$ est au plus égal à 1 : donc la partie réelle et la partie imaginaire de cette expression sont, aussi séparément, au plus égales à 1, en valeur absolue : cela montre que la valeur absolue de la partie réelle de l'intégrale précédente est au plus égale à

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \gamma \cos \omega \, d\omega}{(1 - \cos \gamma)^2 + \sin^2 \gamma \cos^2 \omega} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \gamma (1 - \cos \gamma) \cos \omega \, d\omega}{(1 - \cos \gamma)^2 + \sin^2 \gamma \cos^2 \omega}.$$

Mais la première de ces intégrales est moindre que 1, comme on l'a déjà vu ; quant à la seconde, en excluant les cas de $\gamma = 0$ et de $\gamma = \pi$, on la ramène à celle-ci :

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \frac{1}{2} \gamma \cos \frac{1}{2} \gamma \cos \omega \, d\omega}{\sin^2 \frac{1}{2} \gamma + \cos^2 \frac{1}{2} \gamma \cos^2 \omega} = \frac{4}{\pi} \cos^2 \frac{1}{4} \gamma \operatorname{tang} \frac{1}{4} \gamma \log \frac{1}{\operatorname{tang} \frac{1}{4} \gamma} :$$

mais, γ variant de 0 à π ou $\operatorname{tang} \frac{1}{4} \gamma$ de 0 à 1, le *maximum* de $\operatorname{tang} \frac{1}{4} \gamma \log \frac{1}{\operatorname{tang} \frac{1}{4} \gamma}$ est $\frac{1}{e}$: cela prouve que l'intégrale considérée est moindre que $\frac{4}{\pi e} < 1$. Ainsi, on a une valeur pour A, en prenant $1 + 1 + 1$ ou 3.

11. Il est démontré, par ce qui précède, que la série

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} n \int_{-1}^{1} X_n \varphi(x) \, dx$$

est convergente. On établirait de même la convergence de la série

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} n \int_{-1}^{1} X_n \varphi(x) \, dx.$$

Il ne nous reste donc à considérer que celle qui a pour terme général

$$n\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} X_n \varphi(x)\,dx,$$

ou, en rétablissant γ à la place de x,

$$n\int_{\alpha}^{\pi-\alpha} F(\gamma)\,P_n \sin\gamma\,d\gamma,$$

α étant un nombre déterminé, positif, mais aussi voisin que l'on veut de zéro.

12. Remplaçons P_n, qui ne diffère de X_n que par l'échange de x en $\cos\gamma$, par la valeur fournie par le théorème XI du § Ier; on reconnaîtra aisément que la question se ramène à démontrer la convergence des séries

$$\sum\int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \sqrt{n}\cos n\gamma \sin\gamma \tang^{\pm\frac{1}{2}}\frac{\gamma}{2}\,F(\gamma)\,d\gamma,$$

$$\sum\int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \sqrt{n}\sin n\gamma \sin\gamma \tang^{\pm\frac{1}{2}}\frac{\gamma}{2}\,F(\gamma)\,d\gamma,$$

$$\sum\int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \frac{1}{\sqrt{n}}\cos n\gamma \cos\gamma \tang^{\pm\frac{1}{2}}\frac{\gamma}{2}\,F(\gamma)\,d\gamma,$$

$$\sum\int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \frac{1}{\sqrt{n}}\sin n\gamma \cos\gamma \tang^{\pm\frac{1}{2}}\frac{\gamma}{2}\,F(\gamma)\,d\gamma,$$

$$\sum\int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \frac{1}{n\sqrt{n}}\,p\sin\gamma\,F(\gamma)\,d\gamma,$$

ou les sommes s'étendent à toutes les valeurs entières de n, et celle des séries

$$\sum\int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \frac{1}{\sqrt{n}}\cos n\gamma \sin\gamma \tang^{\pm\frac{1}{2}}\frac{\gamma}{2}\,F(\gamma)\,d\gamma,$$

$$\sum\int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \frac{1}{\sqrt{n}}\sin n\gamma \sin\gamma \tang^{\pm\frac{1}{2}}\frac{\gamma}{2}\,F(\gamma)\,d\gamma,$$

où les sommes s'étendent successivement à toutes les valeurs paires et à toutes les valeurs impaires de n. D'abord il est inutile de s'occuper de la série

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}\int_{\alpha}^{\pi-\alpha} p\sin\gamma\,F(\gamma)\,d\gamma,$$

puisque la série $\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ est convergente, et que la fonction $p \sin\gamma F(\gamma)$ reste toujours finie entre les limites de l'intégration; quant aux autres, je dis qu'il suffira de faire voir que les deux séries

$$\sum \int_\alpha^\beta \sqrt{n} \cos n\gamma \Phi(\gamma)\, d\gamma, \qquad \sum \int_\alpha^\beta \sqrt{n} \sin n\gamma \Phi(\gamma)\, d\gamma,$$

où les sommes s'étendent à toutes les valeurs entières de n, et où $\Phi(\gamma)$ désigne une fonction ou un produit de fonctions indépendantes de n, ne devenant jamais infinies entre α et β, et ne présentant entre ces limites qu'un nombre fini de maxima ou minima, sont convergentes.

Supposons, en effet, ce point établi; il en résultera que les séries

$$\sum \int_\alpha^{\pi-\gamma} \sqrt{n} \cos n\gamma \sin\gamma \operatorname{tang}^{\pm\frac{1}{2}} \frac{\gamma}{2} F(\gamma)\, d\gamma,$$

$$\sum \int_\alpha^{\pi-\gamma} \sqrt{n} \sin n\gamma \sin\gamma \operatorname{tang}^{\pm\frac{1}{2}} \frac{\gamma}{2} F(\gamma)\, d\gamma,$$

$$\sum \int_\alpha^{\pi-\gamma} \sqrt{n} \cos n\gamma \cos\gamma \operatorname{tang}^{\pm\frac{1}{2}} \frac{\gamma}{2} F(\gamma)\, d\gamma,$$

$$\sum \int_\alpha^{\pi-\gamma} \sqrt{n} \cos n\gamma \cos\gamma \operatorname{tang}^{\pm\frac{1}{2}} \frac{\gamma}{2} F(\gamma)\, d\gamma,$$

ou les sommes s'étendent à toutes les valeurs entières de n, sont convergentes, et, par conséquent, d'après le théorème d'Abel, déjà employé, que les suivantes :

$$\sum \int_\alpha^{\pi-\gamma} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos n\gamma \sin\gamma \operatorname{tang}^{\pm\frac{1}{2}} \frac{\gamma}{2} F(\gamma)\, d\gamma,$$

$$\sum \int_\alpha^{\pi-\gamma} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin n\gamma \sin\gamma \operatorname{tang}^{\pm\frac{1}{2}} \frac{\gamma}{2} F(\gamma)\, d\gamma,$$

$$\sum \int_\alpha^{\pi-\gamma} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos n\gamma \cos\gamma \operatorname{tang}^{\pm\frac{1}{2}} \frac{\gamma}{2} F(\gamma)\, d\gamma,$$

$$\sum \int_\alpha^{\pi-\gamma} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin n\gamma \cos\gamma \operatorname{tang}^{\pm\frac{1}{2}} \frac{\gamma}{2} F(\gamma)\, d\gamma.$$

ou les sommes s'étendent également à toutes les valeurs entieres de n, le sont aussi; d'un autre côté, il est facile de démontrer que si des séries de la forme

$$\sum \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\cos n\gamma}{\sqrt{n}} \Phi(\gamma)\, d\gamma, \quad \sum \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin n\gamma}{\sqrt{n}} \Phi(\gamma)\, d\gamma,$$

ou $\Phi(\gamma)$ représente une fonction ou un produit de fonctions indépendantes de n et toujours finies entre α et β, sont convergentes quand on étend les sommes à toutes les valeurs entieres de n, il en est de même lorsqu'on n'étend ces sommes qu'aux valeurs paires ou impaires. En effet, supposons que n doive toujours être pair dans la première somme par exemple, nous pourrons la mettre sous la forme

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \sum \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\cos n\gamma}{\sqrt{n}} \Phi\left(\frac{\gamma}{2}\right) d\gamma,$$

le signe s'étendant à toutes les valeurs entieres de n, et cette série étant convergente, il en sera de même de la premiere; si n doit toujours être impair, nous pourrons mettre la même somme sous la forme

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \sum \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\gamma}{\sqrt{n+\frac{1}{2}}} \Phi\left(\frac{\gamma}{2}\right) d\gamma,$$

puis sous celle-ci,

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \sum \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\cos n\gamma \cos\frac{\gamma}{2}}{\sqrt{n}} \Phi\left(\frac{\gamma}{2}\right) d\gamma$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}} \sum \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin n\gamma \sin\frac{\gamma}{2}}{\sqrt{n}} \Phi\left(\frac{\gamma}{2}\right) d\gamma + \sum \int_{\alpha}^{\beta} \frac{p\, d\gamma}{n\sqrt{n}}.$$

toutes ces nouvelles sommes s'étendant aux valeurs paires et impaires de n, et p représentant une fonction de γ et de n, toujours au-dessous d'une certaine limite. Or les trois dernieres séries sont convergentes, il en est donc de même de la série proposée. On voit par là que les

séries

$$\sum \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos n\gamma \sin \gamma \operatorname{tang}^{\pm \frac{1}{2}} \frac{\gamma}{2} F(\gamma)\, d\gamma,$$

$$\sum \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos n\gamma \sin \gamma \operatorname{tang}^{\pm \frac{1}{2}} \frac{\gamma}{2} F(\gamma)\, d\gamma.$$

ou les sommes s'étendent tantôt aux valeurs paires, tantôt aux valeurs impaires de n, seront convergentes, s'il en est ainsi lorsque les sommes s'étendent à toutes les valeurs entières de n. Ainsi, comme on l'avait énoncé, tout se réduit à établir la convergence des séries

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \sqrt{n} \cos n\gamma\, \Phi(\gamma)\, d\gamma, \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \sqrt{n} \sin n\gamma\, \Phi(\gamma)\, d\gamma,$$

où $\Phi(\gamma)$ représente, nous le répétons, une fonction ou un produit de fonctions, indépendantes de n, ne devenant jamais infinies entre α et $\pi-\alpha$, et ne présentant entre ces limites qu'un nombre fini de maxima et minima. Nous allons, pour cela, évaluer d'abord les deux sommes

$$\sum_{n=1}^{n=n} \frac{\cos n\gamma}{\sqrt{n}}, \qquad \sum_{n=1}^{n=n} \frac{\sin n\gamma}{\sqrt{n}}.$$

13. Or on a

$$\frac{1}{\Gamma\frac{1}{2}} \int_0^1 x^{n-1} \log^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x}\right) dx = \frac{1}{\sqrt{n}};$$

d'où

$$\frac{1}{\Gamma\frac{1}{2}} \int_0^1 \log^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x}\right) \left(e^{\gamma\sqrt{-1}} + x e^{2\gamma\sqrt{-1}} + x^2 e^{3\gamma\sqrt{-1}} + \ldots + x^{n-1} e^{n\gamma\sqrt{-1}}\right) dx$$

$$= \sum_{n=1}^{n=n} \frac{e^{n\gamma\sqrt{-1}}}{\sqrt{n}};$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\cos n\gamma}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\Gamma\frac{1}{2}} \int_0^1 \log^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x}\right) \frac{\cos\gamma - x - x^n \cos(n+1)\gamma + x^{n+2}\cos n\gamma}{1 + x^2 - 2x\cos\gamma} dx,$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin n\gamma}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\Gamma\frac{1}{2}} \int_0^1 \log^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x}\right) \frac{\sin\gamma - x^n \sin(n+1)\gamma + x^{n+2}\sin n\gamma}{1 + x^2 - 2x\cos\gamma} dx.$$

différentiant par rapport à γ, et ne développant les calculs que pour les termes dépendants de n, il vient

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \sqrt{n}\sin n\gamma = \frac{1}{\Gamma\frac{1}{2}} \int_0^1 \log^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x}\right) \frac{2x^{n+1}\sin\gamma\cos n\gamma - 2x^{n+2}\sin\gamma\cos(n+1)\gamma}{(1 + x^2 - 2x\cos\gamma)^2} dx$$

$$+ \frac{1}{\Gamma\frac{1}{2}} \int_0^1 \log^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x}\right) \frac{-(n+1)x^n \sin(n+1)\gamma + nx^{n-1}\sin n\gamma}{1 + x^2 - 2x\cos\gamma} dx + k,$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \sqrt{n}\cos n\gamma = \frac{1}{\Gamma\frac{1}{2}} \int_0^1 \log^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x}\right) \frac{2x^{n+1}\sin\gamma\sin(n+1)\gamma - 2x^{n+2}\sin\gamma\sin n\gamma}{(1 + x^2 - 2x\cos\gamma)^2} dx$$

$$+ \frac{1}{\Gamma\frac{1}{2}} \int_0^1 \log^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x}\right) \frac{-(n+1)x^n \cos(n+1)\gamma + nx^{n-1}\cos n\gamma}{(1 + x^2 - 2x\cos\gamma)} dx + k';$$

k et k' représentant des fonctions de γ indépendantes de n et jouissant de la propriété de rester au-dessous d'une limite fixe, lorsque γ varie de α à $\pi - \alpha$.

Actuellement on peut remarquer que puisque, en général,

$$\frac{1}{\Gamma\frac{1}{2}} \int_0^1 \log^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x}\right) x^{p-1} dx = \frac{1}{\sqrt{p}},$$

on a aussi

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^1 \log^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x}\right)\frac{x^{p-1}\,dx}{1+x^2-2x\cos\gamma} = \frac{M}{\sqrt{p}},$$

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^1 \log^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x}\right)\frac{x^{p-1}\,dx}{1+x^2-2x\cos\gamma} = \frac{N}{\sqrt{p}}.$$

M et N étant des fonctions de p et de γ qui, pour toutes les valeurs de p et pour les valeurs de γ comprises entre α et $\pi-\alpha$, restent au-dessous d'une certaine limite fixe, et qui jouissent en outre de la propriété de constamment décroître, lorsqu'après avoir fixé p on fait croître γ de α à $\pi-\alpha$; d'après cela, les formules ci-dessus deviennent

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\sqrt{n}\cos n\gamma = \frac{M(n+1)\cos(n+1)\gamma}{\sqrt{n+1}} + \frac{M_1 n\cos n\gamma}{\sqrt{n+2}}$$

$$+\frac{N\sin\gamma\sin(n+1)\gamma}{\sqrt{n+2}} + \frac{N_1\sin\gamma\sin n\gamma}{\sqrt{n+3}} = k,$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\sqrt{n}\sin n\gamma = \frac{M(n+1)\sin(n+1)\gamma}{\sqrt{n+1}} + \frac{M_1 n\sin n\gamma}{\sqrt{n+2}}$$

$$-\frac{N\sin\gamma\cos(n+1)\gamma}{\sqrt{n+2}} - \frac{N_1\sin\gamma\cos n\gamma}{\sqrt{n+3}} = k',$$

M, M_1, N, N_1 étant des quantités analogues aux quantités M et N précédemment définies, et l'on a

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\int_\alpha^{\pi-\alpha}\sqrt{n}\cos n\gamma\,\Phi(\gamma)\,d\gamma = \int_\alpha^{\pi-\alpha}\frac{M(n+1)\cos(n+1)\gamma\,\Phi(\gamma)\,d\gamma}{\sqrt{n+1}}$$

$$+\int_\alpha^{\pi-\alpha}\frac{M_1 n\cos n\gamma\,\Phi(\gamma)\,d\gamma}{\sqrt{n+2}} + \int_\alpha^{\pi-\alpha}\frac{N\sin\gamma\sin(n+1)\gamma\,\Phi(\gamma)\,d\gamma}{\sqrt{n+2}}$$

$$+\int_\alpha^{\pi-\alpha}\frac{N_1\sin\gamma\sin n\gamma\,\Phi(\gamma)\,d\gamma}{\sqrt{n+3}} + \int_\alpha^{\pi-\alpha}k\,\Phi(\gamma)\,d\gamma.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\sqrt{n}\sin n\gamma\Phi(\gamma)\,d\gamma=\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\frac{M(n+1)\sin(n+1)\gamma\Phi(\gamma)\,d\gamma}{\sqrt{n+1}}$$

$$-\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\frac{M\,n\sin n\gamma\Phi(\gamma)\,d\gamma}{\sqrt{n+2}}-\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\frac{N\sin\gamma\cos(n+1)\gamma\Phi(\gamma)\,d\gamma}{\sqrt{n+2}}$$

$$-\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\frac{N\sin\gamma\cos n\gamma\Phi(\gamma)\,d\gamma}{\sqrt{n+3}}-\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}k'\Phi(\gamma)\,d\gamma;$$

de telle sorte que, pour établir la convergence des deux séries

$$\sum\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\sqrt{n}\cos n\gamma\Phi(\gamma)\,d\gamma,\quad \sum\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\sqrt{n}\sin n\gamma\Phi(\gamma)\,d\gamma,$$

il suffit de faire voir que les limites vers lesquelles tendent les différentes expressions

$$\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\frac{M(n+1)\cos(n+1)\gamma\Phi(\gamma)\,d\gamma}{\sqrt{n+1}},\qquad \int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\frac{M\,n\cos n\gamma\Phi(\gamma)\,d\gamma}{\sqrt{n+2}},$$

$$\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\frac{N\sin\gamma\sin(n+1)\gamma\Phi(\gamma)\,d\gamma}{\sqrt{n+2}},\qquad \int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\frac{N\sin\gamma\sin n\gamma\Phi(\gamma)\,d\gamma}{\sqrt{n+3}},$$

$$\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\frac{M(n+1)\sin(n+1)\gamma\Phi(\gamma)\,d\gamma}{\sqrt{n+1}},\qquad \int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\frac{M\,n\sin n\gamma\Phi(\gamma)\,d\gamma}{\sqrt{n+2}},$$

$$\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\frac{N\sin\gamma\cos(n+1)\gamma\Phi(\gamma)\,d\gamma}{\sqrt{n+2}},\qquad \int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\frac{N\sin\gamma\cos n\gamma\Phi(\gamma)\,d\gamma}{\sqrt{n+3}},$$

à mesure que n croît, sont toutes finies et déterminées, puisque les deux intégrales

$$\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}k\Phi(\gamma)\,d\gamma,\quad \int_{\alpha}^{\pi-\alpha}k'\Phi(\gamma)\,d\gamma$$

sont indépendantes de n et finies. A cet effet, nous démontrerons, il est clair que cela suffit, que zéro est la limite des deux intégrales

$$\sqrt{n}\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}M\cos n\gamma\Phi(\gamma)\,d\gamma,\quad \sqrt{n}\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}M\sin n\gamma\Phi(\gamma)\,d\gamma,$$

dans lesquelles $\Phi(\gamma)$ représente, comme plus haut, un produit de

fonctions de γ ne devenant jamais infinies entre α et $\pi - \alpha$, et n'ayant entre ces limites qu'un nombre fini de maxima ou minima, et M une fonction de γ et de n qui, pour toutes les valeurs de n et pour toutes les valeurs de γ, depuis α jusqu'à $\pi - \alpha$, reste au-dessous d'une certaine limite, et décroît lorsque γ croît.

14. Divisons l'intervalle compris entre α et $\pi - \alpha$ en une série d'autres, de façon que dans chacun de ces nouveaux intervalles les facteurs qui composent $\Phi(\gamma)$ varient dans le même sens; soient a et b les limites d'un quelconque de ces intervalles, appelons p, p_1, p_2 les facteurs de $\Phi(\gamma)$ qui vont en diminuant, lorsque γ augmente de a à b, et q, q_1, q_2 ceux qui vont en augmentant; soit d'ailleurs A un nombre positif supérieur à la valeur absolue de chacun des deux produits

$$\mathrm{M}pp_1p_2, \quad qq_1q_2$$

pour toutes les valeurs de n et pour les valeurs de γ depuis a jusqu'à b; nous pourrons écrire la partie des deux intégrales ci-dessus qui se rapporte à l'intervalle compris entre a et b, de la manière suivante :

$$-\int_a^b \psi n \cos n\gamma\,(\mathrm{A} + \mathrm{M}pp_1p_2)(\mathrm{A} - qq_1q_2)\,d\gamma$$

$$+\mathrm{A}\int_a^b \psi n \cos n\gamma\,(\mathrm{A} + \mathrm{M}pp_1p_2)\,d\gamma$$

$$-\mathrm{A}\int_a^b \psi n \cos n\gamma\,(\mathrm{A} - qq_1q_2)\,d\gamma - \mathrm{A}^2\int \psi n \cos n\gamma\,d\gamma,$$

$$-\int_a^b \psi n \sin n\gamma\,(\mathrm{A} + \mathrm{M}pp_1p_2)(\mathrm{A} - qq_1q_2)\,d\gamma$$

$$+\mathrm{A}\int_a^b \psi n \sin n\gamma\,(\mathrm{A} + \mathrm{M}pp_1p_2)\,d\gamma$$

$$+\mathrm{A}\int_a^b \psi n \sin n\gamma\,(\mathrm{A} - qq_1q_2)\,d\gamma - \mathrm{A}^2\int_a^b \psi n \sin n\gamma\,d\gamma;$$

remarquant alors que les intégrales définies

$$\int_a^b \psi n \cos n\gamma\,d\gamma, \quad \int_a^b \psi n \sin n\gamma\,d\gamma$$

sont, quelles que soient les limites, inférieures à $\frac{2}{\sqrt{n}}$, et que les expressions

$$(A - M pp_1 p_2), \quad (A - qq_1 q_2), \quad (A + M pp_1 p_2), (A - qq_1 q_2)$$

sont positives et décroissantes, on verra aisément, d'après un lemme de calcul intégral que j'ai démontré dans le tome XIV de ce Recueil, que la partie considérée des deux intégrales

$$\int_\alpha^{\pi-\alpha} \sqrt{n} \cos n\gamma \, \Phi(\gamma) \, d\gamma, \quad \int_\alpha^{\pi-\alpha} \sqrt{n} \sin n\gamma \, \Phi(\gamma) \, d\gamma$$

est moindre qu'un nombre de la forme $\frac{k}{\sqrt{n}}$, k étant indépendant de n et au-dessous d'une certaine limite, et, par conséquent, aussi petite qu'on le veut, en prenant n suffisamment grand. Ce que nous avons dit de la partie des intégrales précédentes, qui se rapporte à l'intervalle compris entre a et b, nous pourrions le dire de tous les autres intervalles en lesquels nous avons décomposé l'intervalle de α à $\pi - \alpha$: donc le nombre de ces intervalles étant fini, puisque le nombre des maxima et minima, compris entre α et $\pi - \alpha$, des différents facteurs p, p_1, p_2, q, q_1, q_2 de $\Phi(\gamma)$, est lui-même limité, nous pouvons conclure que les intégrales totales

$$\int_\alpha^{\pi-\alpha} \sqrt{n} \cos n\gamma \, \Phi(\gamma) \, d\gamma, \quad \int_\alpha^{\pi-\alpha} \sqrt{n} \sin n\gamma \, \Phi(\gamma) \, d\gamma$$

sont aussi petites que l'on veut, en prenant n suffisamment grand.

15. *Nota.* Si dans la formule

$$f(\theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{n=\infty} (2n+1) \int_0^\pi \sin \theta' \, d\theta' \int_0^{2\pi} P \, f(\theta', \varphi') \, d\varphi',$$

qui donne le développement d'une fonction de deux angles en série ordonnée suivant les fonctions Y, on suppose la fonction $f(\theta, \varphi)$ indépendante de φ, on trouve

$$f(\theta) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{n=\infty} (2n+1) \int_0^\pi f(\theta') \sin \theta' \, d\theta' \int_0^{2\pi} P_n \, d\varphi'$$

ou bien, posant $\cos\theta = x$, $\cos\theta' = x'$, appelant $F(x)$ ce que devient $f(\theta)$ et se rappelant le théorème III du § II,

$$F(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{2n+1}{2} X_n \int_{-1}^{+1} F(x') X_n' \, dx'.$$

C'est la formule par laquelle on développe une fonction d'une variable x (x restant compris entre -1 et $+1$), en série ordonnée suivant les fonctions X_n. Il ne faut pas perdre de vue que lorsqu'on attribue à x une valeur qui rend la fonction $F(x)$ discontinue, l'égalité précédente n'est exacte qu'en ayant soin de remplacer le premier membre par la valeur moyenne de la fonction, c'est-à-dire ici par $\frac{F(x-\varepsilon)+F(x+\varepsilon)}{2}$, ε étant un nombre infiniment petit.

THÈSE D'ASTRONOMIE.

Sur la Théorie mathématique des Cartes géographiques;

PAR M. OSSIAN BONNET.

INTRODUCTION.

Une carte géographique n'est autre chose qu'une représentation sur une surface déterminée, que l'on suppose ordinairement plane, de la surface de la terre ou de l'une de ses parties. Cette représentation peut être faite suivant une loi quelconque; toutefois, dans les premières cartes qu'on a construites, elle a toujours été soumise aux règles de la perspective. Les cartes étaient ainsi de simples projections coniques ou cylindriques, et les différences qui existaient entre elles, provenaient de la position donnée à l'œil et au plan de projection. On connaît ces différentes cartes, dont les plus remarquables sont dues à Ptolémée. Plus tard, quelques astronomes abandonnèrent le mode de représentation par perspective, qui avait dû se présenter tout naturellement à l'esprit, mais que rien n'obligeait à suivre, et ils regardèrent les lignes correspondantes aux méridiens et aux parallèles, comme des lignes tout à fait quelconques que l'on pouvait, dans chaque cas, choisir arbitrairement, suivant la destination de la carte. C'est ainsi que furent construites les cartes marines réduites ou par latitudes croissantes, dans lesquelles on s'imposait la condition que les rumbs de vent fussent représentés par des droites faisant entre elles les mêmes angles que ces rumbs faisaient dans la rose de compas. Enfin, Lambert envisagea la théorie des cartes géographiques sous un point de vue général extrêmement important. Il remarqua que le plus grand degré de perfection d'une carte était de reproduire la figure des différentes parties de la carte, de manière qu'il y eût constamment

similitude entre une partie quelconque de la terre et la partie correspondante de la carte; mais cette condition étant généralement impossible à remplir, à moins de supposer à la surface de la carte une forme particulière, Lambert se proposa de déterminer les lignes des méridiens et des parallèles par la condition que la similitude eût lieu seulement entre les éléments infiniment petits. Sans doute, de cette manière, une portion finie de la terre était déformée sur la carte, mais les angles faits sur la carte étaient toujours égaux aux angles correspondants sur la surface du globe, propriété importante que l'on avait reconnue au système de représentation de Ptolémée. Lambert ne résolut pas d'une manière complète le problème général qu'il s'était posé; après lui, plusieurs géomètres, Euler, Lagrange, s'occupèrent avec succès de la question, mais en supposant toujours à la terre la forme d'une sphère ou tout au plus d'une surface de révolution; ce fut M. Gauss qui, dans un Mémoire couronné par l'Académie de Copenhague, résolut, le premier, le problème dans toute sa généralité et sans faire aucune hypothèse sur la surface de la terre et sur celle de la carte. Nous nous proposons, dans cette Thèse, d'exposer la théorie des cartes géographiques au point de vue indiqué par Lambert. Notre travail n'offre rien d'essentiellement nouveau. Nous n'avons eu d'autre but que de simplifier les solutions des questions traitées avant nous par Lagrange, Euler, M. Gauss.

---

1. Soient deux surfaces quelconques S et S' représentant la surface de la terre et celle de la carte. Supposons que l'on ait exprimé les trois coordonnées x, y, z rectangulaires d'un point quelconque m de la surface S, en fonction de deux variables indépendantes u et v, et les coordonnées x', y', z' d'un point m' de la surface S', au moyen de deux autres variables u' et v'; de telle sorte que la première surface soit définie par trois équations de la forme

$$(1)\qquad x = f(u, v), \quad y = f_1(u, v), \quad z = f_2(u, v),$$

et la seconde par trois équations telles que

$$(2)\qquad x' = \varphi(u', v'), \quad y' = \varphi_1(u', v'), \quad z' = \varphi_2(u', v');$$

il s'agira de faire correspondre les points m et m' ou de déterminer u'

et v' en fonction de u et de v, de façon qu'un élément $m m_1$ de la surface S′ ait, avec l'élément correspondant mm_1 de la surface S, un rapport indépendant de la direction de ces éléments et variable seulement avec la position des points m et m'.

2. Différentiant les équations (1), on trouve aisément que l'élément de la surface S, qui se termine aux points (u, v), $(u + du, v + dv)$, est

$$ds = \sqrt{E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2},$$

en posant

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2 = E,$$

$$\frac{dx}{du}\frac{dx}{dv} + \frac{dy}{du}\frac{dy}{dv} + \frac{dz}{du}\frac{dz}{dv} = F,$$

$$\left(\frac{dx}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dv}\right)^2 = G;$$

de même, l'élément de la surface S′, qui se termine aux points (u', v'), $(u' + du', v' + dv')$, est

$$ds' = \sqrt{E' du'^2 + 2F' du'\, dv' + G' dv'^2},$$

en posant

$$\left(\frac{dx'}{du'}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{du'}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{du'}\right)^2 = E',$$

$$\frac{dx'}{du'}\frac{dx'}{dv'} + \frac{dy'}{du'}\frac{dy'}{dv'} + \frac{dz'}{du'}\frac{dz'}{dv'} = F',$$

$$\left(\frac{dx'}{dv'}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{dv'}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{dv'}\right)^2 = G'.$$

L'équation du problème devient ainsi

$$(3) \qquad \frac{E' du'^2 + 2F' du'\, dv' + G' dv'^2}{E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2} = n^2,$$

n^2 étant une certaine fonction de u et de v. Pour pouvoir déduire de cette équation les valeurs de u' et v', il faut d'abord la simplifier, en particularisant les variables u, v, u' et v'. Nous choisirons ces variables de manière que l'on ait

$$E = 0, \quad G = 0, \quad E' = 0, \quad G' = 0.$$

Mais prouvons d'abord qu'il existe de telles variables et montrons comment on peut les obtenir.

3. Je considère l'équation différentielle

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = 0, \tag{4}$$

et je suppose qu'on en ait déduit une intégrale contenant une constante arbitraire. Soit

$$F(u, v) = C$$

cette intégrale résolue par rapport à la constante. Evidemment la fonction $F(u, v)$ sera imaginaire, car les valeurs de $\frac{dv}{du}$ déduites de l'équation (4) sont imaginaires; nous pouvons donc poser

$$F(u, v) = U + V\sqrt{-1}.$$

U et V étant des fonctions réelles de u et de v, et notre intégrale deviendra

$$U + V\sqrt{-1} = C.$$

Cette intégrale renfermant, par hypothèse, une constante arbitraire, si on la différentie et qu'on tire $\frac{dv}{du}$, on trouvera une valeur qui devra être identiquement égale, quels que soient u et v, à l'une des deux valeurs de $\frac{dv}{du}$, que l'on déduit de l'équation (4); quant à l'autre valeur, comme elle est conjuguée de la première, elle sera évidemment fournie par l'équation

$$dU - dV\sqrt{-1} = 0.$$

Nous pouvons conclure de là que l'on a identiquement

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = M\,(dU^2 + dV^2),$$

M étant une certaine fonction de u et de v. Posant maintenant

$$U + V\sqrt{-1} = \alpha, \quad U - V\sqrt{-1} = \beta,$$

α et β étant de nouvelles variables, on aura

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = \mu\,d\alpha\,d\beta,$$

μ étant ce que devient M quand on y remplace u et v par leurs valeurs en α et β.

Ainsi, en prenant les variables α et β, l'élément de la surface S a la forme que nous voulions obtenir. Appelant de même

$$U' + V'\sqrt{-1} = C'$$

une intégrale quelconque de l'équation

$$(5) \qquad E'du'^2 + 2F'du'dv' + G'dv'^2 = 0,$$

nous verrions que le carré de l'élément de la surface S' peut se mettre sous la forme $M'(dU'^2 + dV'^2)$, et puis, en posant

$$U' + V'\sqrt{-1} = \alpha', \quad U' - V'\sqrt{-1} = \beta',$$

sous la forme voulue $\mu' d\alpha' d\beta'$; introduisant dans l'équation (3) les variables α, β, α', β', cette équation devient

$$\mu' d\alpha' d\beta' = n^2 \mu d\alpha d\beta,$$

et rien n'est plus simple maintenant que d'obtenir α' et β'.

4. En effet, remplaçons $d\alpha'$ par $\frac{d\alpha'}{d\alpha} d\alpha + \frac{d\alpha'}{d\beta} d\beta$, et $d\beta'$ par $\frac{d\beta'}{d\alpha} d\alpha + \frac{d\beta'}{d\beta} d\beta$, il vient

$$\frac{d\alpha'}{d\alpha}\frac{d\beta'}{d\alpha} d\alpha^2 + \frac{d\alpha'}{d\beta}\frac{d\beta'}{d\beta} d\beta^2 + \left(\frac{d\alpha'}{d\alpha}\frac{d\beta'}{d\beta} + \frac{d\alpha'}{d\beta}\frac{d\beta'}{d\alpha}\right) d\alpha d\beta = n^2 \frac{\mu}{\mu'} d\alpha d\beta,$$

d'où

$$\frac{d\alpha'}{d\alpha}\frac{d\beta'}{d\alpha} = 0, \quad \frac{d\alpha'}{d\beta}\frac{d\beta'}{d\beta} = 0,$$

et, par conséquent,

$$\frac{d\alpha'}{d\beta} = 0, \quad \frac{d\beta'}{d\alpha} = 0,$$

ou

$$\frac{d\alpha'}{d\alpha} = 0, \quad \frac{d\beta'}{d\beta} = 0;$$

c'est-à-dire, en intégrant,

$$\alpha' = F(\alpha), \quad \beta' = F_1(\beta).$$

$$\alpha' = \Phi_1(\beta), \quad \beta' = \Phi_1(\alpha).$$

3. Nous aurions pu obtenir les résultats précédents en exprimant une autre propriété du système de représentation considéré, d'après laquelle l'angle de deux éléments quelconques de la surface S est toujours égal à l'angle des deux éléments correspondants de la surface S'.

Prenons, pour définir les différents points des deux surfaces S et S', les variables U, V et U', V' : de manière que pour l'une et l'autre surface, les lignes coordonnées forment deux systèmes orthogonaux, divisant la surface en carrés. Le cosinus de l'angle compris entre les éléments mm_1, mm_2 de la première surface, qui partent du point (U, V) et se terminent respectivement aux points $(U + dU, V + dV)$, $(U + \delta U, V + \delta V)$, sera, en laissant le signe de côté,

$$\frac{dV\,\delta U - dU\,\delta V}{\sqrt{(dU^2 + dV^2)(\delta U^2 + \delta V^2)}};$$

de même, le cosinus de l'angle formé par les éléments $m'm'_1$, $m'm'_2$ correspondants de la seconde surface, sera

$$\frac{dV'\,\delta U' - dU'\,\delta V'}{\sqrt{(dU'^2 + dV'^2)(\delta U'^2 + \delta V'^2)}};$$

nous aurons donc, pour l'équation du problème,

$$\frac{dV\,\delta U - dU\,\delta V}{\sqrt{(dU^2 + dV^2)(\delta U^2 + \delta V^2)}} = \frac{dV'\,\delta U' - dU'\,\delta V'}{\sqrt{(dU'^2 + dV'^2)(\delta U'^2 + \delta V'^2)}},$$

ou bien, en introduisant les variables α, β, α', β',

$$\frac{d\beta\,\delta\alpha - d\alpha\,\delta\beta}{\sqrt{d\alpha\,d\beta\,\delta\alpha\,\delta\beta}} = \frac{d\beta'\,\delta\alpha' - d\alpha'\,\delta\beta'}{\sqrt{d\alpha'\,d\beta'\,\delta\alpha'\,\delta\beta'}},$$

d'où

$$d\alpha'\,d\beta'\,\delta\alpha'\,\delta\beta'\,(d\beta\,\delta\alpha - d\alpha\,\delta\beta)^2 = d\alpha\,d\beta\,\delta\alpha\,\delta\beta\,(d\beta'\,\delta\alpha' - d\alpha'\,\delta\beta')^2.$$

Posons

$$\delta\alpha' = \frac{d\alpha'}{d\alpha}\,\delta\alpha + \frac{d\alpha'}{d\beta}\,\delta\beta, \quad \delta\beta' = \frac{d\beta'}{d\alpha}\,\delta\alpha + \frac{d\beta'}{d\beta}\,\delta\beta,$$

et supposant fixes les éléments mm_1, $m'm'_1$, faisons varier les éléments

mm_2, $m'm'_2$; c'est-à-dire, supposant $d\alpha$, $d\beta$, $d\alpha'$, $d\beta'$ constants, faisons varier $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\alpha'$, $\delta\beta'$. L'égalité ci-dessus étant une identité, il ne pourra y avoir dans le premier membre d'autres termes en $\delta\alpha$ et $\delta\beta$ que ceux qui se trouvent dans le second; ainsi les termes en $\delta\alpha^2$ et $\delta\beta^2$ du premier membre devront disparaître, ce qui exige que

$$\frac{d\alpha'}{d\alpha}\frac{d\beta'}{d\alpha} = 0, \qquad \frac{d\alpha'}{d\beta}\frac{d\beta'}{d\beta} = 0.$$

d'où

$$\frac{d\alpha'}{d\beta} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\beta'}{d\alpha} = 0,$$

ou bien

$$\frac{d\alpha'}{d\alpha} = 0, \quad \frac{d\beta'}{d\beta} = 0;$$

et, en intégrant,

$$\alpha' = F(\alpha) \quad \text{et} \quad \beta' = F_1(\beta),$$

ou bien

$$\alpha' = \Phi(\beta) \quad \text{et} \quad \beta' = \Phi_1(\alpha),$$

comme nous l'avions déjà obtenu.

6. Avant de particulariser les fonctions F et F_1 ou Φ et Φ_1, pour déduire de ce qui précède quelques systèmes de représentation, il est nécessaire de faire deux remarques importantes.

7. Substituons à α, β, α' et β' leurs valeurs en U, V, U' et V'; les deux solutions de notre problème deviendront

$$(6)\qquad \begin{cases} U' + V'\sqrt{-1} = F(U + V\sqrt{-1}), \\ U' - V'\sqrt{-1} = F_1(U - V\sqrt{-1}), \end{cases}$$

et

$$(7)\qquad \begin{cases} U' + V'\sqrt{-1} = \Phi(U - V\sqrt{-1}), \\ U' - V'\sqrt{-1} = \Phi_1(U + V\sqrt{-1}). \end{cases}$$

Or, U' et V' devant être réels comme U et V, les deux fonctions F_1 et Φ_1 ne peuvent pas être prises arbitrairement, une fois que les fonctions F et Φ ont été fixées. Il faut évidemment, si la fonction F est réelle, que F_1 soit la même fonction; et si F est une fonction imaginaire, que F_1 soit la fonction imaginaire conjuguée obtenue en chan-

geant $\sqrt{-1}$ en $-\sqrt{-1}$ dans la première; il en est de même de la fonction Φ_1 à l'égard de Φ. Ainsi chacune de nos solutions ne contient qu'une fonction arbitraire, qui peut toutefois être imaginaire aussi bien que réelle.

8. Nous avons obtenu deux solutions pour notre problème. Ces solutions conviennent toutes les deux, mais elles se distinguent l'une de l'autre en ce que l'une correspond à une similitude directe entre les éléments superficiels des deux surfaces, et l'autre à une similitude inverse. Entrons à ce sujet dans quelques développements. Une surface représentée, en général, par l'équation $f(x, y, z) = 0$, partage l'espace en deux régions : l'une, qu'on peut appeler extérieure à la surface pour laquelle $f(x, y, z)$ est positif; l'autre, que l'on nomme région intérieure, pour laquelle $f(x, y, z)$ est négatif. Si l'on se place dans la région extérieure, on voit les éléments de la surface issus d'un même point m disposés d'une certaine manière; et si l'on se place dans la région intérieure, on voit les mêmes éléments disposés d'une manière inverse; de telle sorte que si de deux éléments mm_1, mm_2, le second paraît à droite pour un spectateur situé dans la région externe de la surface, inversement pour un spectateur situé dans la partie intérieure, l'élément mm_2 paraîtra à gauche de mm_1. Ceci posé, plaçons-nous, par rapport à chacune des surfaces S et S', dans une région déterminée; soient mm_1, mm_2 deux éléments de la surface S partant du point m, et $m'm'_1$, $m'm'_2$ les deux éléments correspondants de la surface S', déterminés au moyen des solutions trouvées plus haut : pour les deux solutions on aura

$$\frac{mm_1}{m'm'_1} = \frac{mm_2}{m'm'_2}, \qquad \text{angle } m_1mm_2 = \text{angle } m'_1m'm'_2;$$

mais, pour l'une, $m'm'_2$ nous paraîtra à gauche ou à droite de $m'm'_1$, selon que mm_2 sera lui-même à gauche ou à droite de mm_1; et, pour l'autre, ce sera l'inverse, $m'm'_2$ nous paraîtra à droite ou à gauche de $m'm'_1$, selon que mm_2 sera à gauche ou à droite de mm_1. Ainsi, dans les deux cas, les deux triangles mm_1m_2, $m'm'_1m'_2$ sont semblables, mais la similitude est directe dans le premier cas, et inverse dans le second. Quant à la solution qui correspond à la similitude directe, on

comprend qu'elle dépend uniquement de la manière dont on se place par rapport aux surfaces.

Démontrons la propriété que nous venons d'énoncer, et donnons un critérium certain pour reconnaître le genre de similitude qui correspond à une solution déterminée.

9. Appelons

$$f(x, y, z) = 0, \quad \varphi(x', y', z') = 0$$

les équations des surfaces S et S', et plaçons-nous, par rapport à chacune des surfaces, dans la région extérieure, c'est-à-dire dans la région pour laquelle le premier membre de son équation est positif. Enfin, supposons que l'on adopte la première solution obtenue au n° 5, c'est-à-dire qu'on lie les points de la première surface à ceux de la seconde par la relation

$$U' + V'\sqrt{-1} = F(U + V\sqrt{-1})$$

et par la relation conjuguée

$$U' - V'\sqrt{-1} = F_1(U - V\sqrt{-1}).$$

Pour pouvoir comparer plus facilement les figures formées par les points m ou (x, y, z) de la première surface aux figures formées par les points correspondants m' ou (x', y', z') de la seconde, nous considérerons six autres systèmes de points intermédiaires, tous situés dans le plan des xy : le système des points μ ayant pour coordonnées rectangulaires $(x, y, 0)$; le système des points ν ayant pour coordonnées rectangulaires $(u, v, 0)$; le système des points π ayant pour coordonnées $(U, V, 0)$; le système des points π' ayant pour coordonnées $(U', V', 0)$; le système des points ν' ayant pour coordonnées $(u', v', 0)$; enfin le système des points μ' ayant pour coordonnées $(x', y', 0)$. Ces nouveaux systèmes de points considérés entre eux, ou avec les systèmes de points m et m', ne donneront pas nécessairement des systèmes semblables dans leurs éléments infiniment petits, mais deux de ces systèmes pourront être semblablement ou inversement placés; je veux dire par là que, dans deux systèmes, les éléments linéaires issus d'un même point pourront paraître placés de la même manière ou d'une manière inverse. A ce point de vue, nous pourrons donc com-

parer le système des points m au système des points μ, le système des points μ au système des points ν, ainsi de suite; et cela nous permettra de décider si la similitude qui existe entre les éléments superficiels formés par les deux systèmes de points m et m' est directe ou inverse. Ajoutons, pour qu'il n'y ait aucune ambiguïté, que les systèmes de points situés dans le plan des xy sont toujours vus du côté où se trouvent les z positifs. En comparant les deux systèmes de points m et μ, on reconnaît aisément qu'ils paraissent semblablement ou inversement placés, selon que, pour passer de la surface S à sa région extérieure par un déplacement parallèle à l'axe des z, il faut augmenter ou diminuer le z du point de la surface, ou bien si $e\,dx + f\,dy + g\,dz$ est la différentielle totale du premier membre $f(x, y, z)$ de l'équation de S, selon que g est positif ou négatif; de même les systèmes des points m' et μ' paraissent semblablement ou inversement placés, selon que

$$g' = \frac{d\varphi(x', y', z')}{dz}$$

est positif ou négatif. Considérons maintenant les deux systèmes de points μ et ν. Soient ds la distance des deux points infiniment voisins (x, y), $(x + dx, y + dy)$ du premier système, et a l'angle positif que cette distance prolongée du premier vers le second point fait avec la partie positive des x, de manière que

$$dx = ds \cos a, \quad dy = ds \sin a.$$

Soient de même $d\sigma$ la distance des deux points correspondants (u, v), $(u + du, v + dv)$ du second système, et α l'angle positif que cette distance prolongée du premier vers le second point fait avec la partie positive des x, de manière que

$$du = d\sigma \cos \alpha, \quad dv = d\sigma \sin \alpha;$$

nous tirerons de là, en remarquant que x et y sont des fonctions connues de u et v,

$$ds \cos a = \left(\frac{dx}{du} \cos \alpha + \frac{dx}{dv} \sin \alpha\right) d\sigma$$

$$ds \sin a = \left(\frac{dy}{du} \cos \alpha + \frac{dy}{dv} \sin \alpha\right) d\sigma.$$

d'où

$$\operatorname{tang} a = \frac{\frac{dy}{du}\cos\alpha + \frac{dy}{dv}\sin\alpha}{\frac{dx}{du}\cos\alpha + \frac{dx}{dv}\sin\alpha};$$

regardant x et y comme constantes, et a et α comme variables, la différentiation donne

$$\frac{da}{d\alpha} = \frac{\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}}{\left(\frac{dx}{du}\cos\alpha + \frac{dx}{dv}\sin\alpha\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\cos\alpha + \frac{dy}{dv}\sin\alpha\right)^2}$$

$$= \left(\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}\right)\frac{d\tau^2}{ds^2}.$$

Cela nous montre que les angles a et α varient dans le même sens ou en sens inverse, selon que $\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}$ est positif ou négatif; par conséquent, que les systèmes des points μ et ν paraissent semblablement ou inversement placés, selon que $\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}$ est positif ou négatif. On verrait, par un raisonnement analogue, que les systèmes des points ν et π paraissent semblablement ou inversement placés, selon que $\frac{dU}{du}\frac{dV}{dv} - \frac{dU}{dv}\frac{dV}{du}$ est positif ou négatif; que les systèmes des points π et π' paraissent semblablement ou inversement placés, selon que $\frac{dU'}{dU}\frac{dV'}{dV} - \frac{dU'}{dV}\frac{dV'}{dU}$ est positif ou négatif; que les systèmes des points π' et ν' paraissent semblablement ou inversement placés, selon que $\frac{dU'}{du'}\frac{dV'}{dv'} - \frac{dU'}{dv'}\frac{dV'}{du'}$ est positif ou négatif; enfin, que les systèmes des points μ' et ν' paraissent semblablement ou inversement placés, selon que $\frac{dx'}{du'}\frac{dy'}{dv'} - \frac{dx'}{dv'}\frac{dy'}{du'}$ est positif ou négatif. Réunissant tous ces résultats entre eux et à ceux qui ont été obtenus relativement aux systèmes de points m et μ, m' et μ', on voit qu'en définitive les deux systèmes de points m et m' sont semblablement ou inversement placés.

selon que le produit

$$\frac{dt\,dz}{dz'\,dt'}\left(\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv}-\frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{dx'}{du'}\frac{dy'}{dv'}-\frac{dx'}{dv'}\frac{dy'}{du'}\right)\left(\frac{dU}{du}\frac{dV}{dv}-\frac{dU}{dv}\frac{dV}{du}\right)\left(\frac{dU'}{du'}\frac{dV'}{dv'}-\frac{dU'}{dv'}\frac{dV'}{du'}\right)\left(\frac{dU}{dU}\frac{dV}{dV}-\frac{dU}{dV}\frac{dV}{dU}\right)$$

est positif ou négatif. On peut remarquer que, dans ce produit, les six premiers facteurs ne dépendent que des surfaces considérées et nullement de la liaison que l'on suppose exister entre les deux systèmes de points m et m' situés sur ces surfaces. Il suffira donc d'avoir égard au septième facteur $\frac{dU'}{dU}\frac{dV'}{dV}-\frac{dU'}{dV}\frac{dV'}{dU}$ pour connaître l'influence de cette liaison. Or, si l'on a

$$U'+V'\sqrt{-1}=F(U+V\sqrt{-1}),$$

on trouve aisément

$$\frac{dU'}{dU}\frac{dV'}{dV}-\frac{dU'}{dV}\frac{dV'}{dU}=\left(\frac{dU'}{dU}\right)^2+\left(\frac{dU'}{dV}\right)^2,$$

et, par conséquent, un résultat positif. Si

$$U'+V'\sqrt{-1}=\Phi(U-V\sqrt{-1}),$$

on trouve

$$\frac{dU'}{dU}\frac{dV'}{dV}-\frac{dU'}{dV}\frac{dV'}{dU}=-\left(\frac{dU'}{dU}\right)^2-\left(\frac{dU}{dV}\right)^2,$$

et, par conséquent, un résultat négatif. Cela montre, comme nous l'avions annoncé, que des deux solutions obtenues au n° 5, l'une donne une similitude directe, l'autre une similitude inverse. On voit, en même temps, que la première solution, quand on se place dans la région extérieure pour l'une et l'autre surface, correspond à la similitude directe ou à la similitude inverse, selon que le produit

$$\frac{dt\,dz}{dz'\,dz'}\left(\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv}-\frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{dx'}{du'}\frac{dy'}{dv'}-\frac{dx'}{dv'}\frac{dy'}{du'}\right)\left(\frac{dU}{du}\frac{dV}{dv}-\frac{dU}{dv}\frac{dV}{du}\right)\left(\frac{dU'}{du'}\frac{dV'}{dv'}-\frac{dU'}{dv'}\frac{dV}{du'}\right)$$

est positif ou négatif.

10. Reprenons les solutions générales du problème de Lambert obtenues au n° 5, et comme la seconde solution se déduit de la première, en changeant $\sqrt{-1}$ en $-\sqrt{-1}$ dans les seconds membres, bor-

nons-nous à considérer la première :

$$(5)\quad \begin{cases} U' + V'\sqrt{-1} = F(U + V\sqrt{-1}), \\ U' - V'\sqrt{-1} = F_1(U - V\sqrt{-1}), \end{cases}$$

où, d'après la remarque faite au n° **7**, F_1 représente la fonction conjuguée de F.

Proposons-nous de trouver le rapport d'agrandissement n en fonction de u et de v.

Différentiant les équations (5), on trouve aisément

$$dU'^2 + dV'^2 = F'(U + V\sqrt{-1})\,F'_1(U - V\sqrt{-1})(dU^2 + dV^2).$$

en appelant F′ la dérivée de F et F'_1 celle de F_1. Or les carrés des éléments des surfaces S et S′ sont respectivement

$$M(dU^2 + dV^2), \quad M'(dU'^2 + dV'^2),$$

M et M′ étant des fonctions connues, la première de U et V, la seconde de U′ et V′; donc le rapport des carrés de ces éléments ou n^2 sera

$$\frac{M'}{M}F'(U + V\sqrt{-1})\,F'_1(U - V\sqrt{-1});$$

par conséquent,

$$n = \sqrt{\frac{M'}{M}F'(U + V\sqrt{-1})\,F'_1(U - V\sqrt{-1})}.$$

Substituant dans M′, à la place de U′ et V′, leurs valeurs déduites des équations (5), et puis exprimant U et V en u et v, la question se trouvera résolue.

11. Cherchons encore, avant de sortir des généralités, la relation qui existe entre les courbures géodésiques de deux courbes correspondantes tracées sur les surfaces S et S′, relation qui nous sera utile dans la suite. Soient A une courbe quelconque tracée sur la surface S, et A′ la courbe correspondante tracée sur la surface S′. Appelons ds l'élément de la première courbe, ds' l'élément correspondant de la seconde, de manière que

$$ds' = n\,ds.$$

Prenons les différentielles des deux membres, relatives à un déplacement normal aux courbes A et A′, et indiquons ces différentielles par la caractéristique δ; nous aurons

$$\delta ds' = n\delta ds + ds\delta n.$$

Mais, $\delta\sigma$ étant le déplacement infiniment petit, normal à la courbe A, qui a eu lieu sur la premiere surface, et $\delta\sigma'$ le déplacement correspondant, normal à la courbe A′, qui a eu lieu sur la seconde surface, on a

$$\delta\sigma = n\delta\sigma';$$

on tire de là

$$\frac{\delta ds}{ds'\delta\sigma'} = \frac{1}{n}\frac{\delta ds}{ds\delta\sigma} + \frac{1}{n^2}\frac{\delta n}{\delta\sigma}.$$

D'ailleurs, d'après une formule de notre Mémoire sur la théorie générale des surfaces, $\frac{\delta ds}{ds\delta\sigma}$, $\frac{\delta ds'}{ds'\delta\sigma'}$ sont, au signe près, les courbures géodésiques des courbes A et A′ : en appelant $\left(\frac{\cos\varphi}{\rho}\right)_s$, $\left(\frac{\cos\varphi}{\rho}\right)_{s'}$ ces courbures géodésiques, on a donc

$$(6)\qquad \left(\frac{\cos\varphi}{\rho}\right)_{s'} = \frac{1}{n}\left(\frac{\cos\varphi}{\rho}\right)_s + \frac{1}{n^2}\frac{\delta n}{\delta\sigma} = \frac{1}{n}\left(\frac{\cos\varphi}{\rho}\right)_s + \frac{\delta\frac{1}{n}}{\delta\sigma}.$$

Remarquons, toutefois, que cette égalité n'a lieu avec les signes que nous avons affectés aux différents termes des deux membres, que sous certaines conditions. Ainsi il faut, 1° que la relation qui existe entre les points des surfaces S et S′ corresponde à une similitude directe entre les éléments superficiels, pour le cas où l'on se place dans la région extérieure de chaque surface; 2° que les déplacements infiniment petits normaux à la courbe A et indiqués par la caractéristique δ se trouvent du côté qui sert à fixer la courbure géodésique de cette courbe.

12. Arrivons maintenant aux applications.

D'après la méthode exposée au n° **3**, on voit que le problème de Lambert, considéré dans toute sa généralité, n'offre d'autres difficultés que celles de mettre les carrés des éléments de la surface de la terre

et de celle de la carte, sous la forme

$$ds^2 = M(dU^2 + dV^2), \quad ds'^2 = M'(dU'^2 + dV'^2),$$

ou, ce qui revient au même, de trouver pour ces deux surfaces deux systèmes de lignes orthogonales les divisant en carrés infiniment petits. Or on connaît de semblables lignes dans les surfaces développables, les surfaces de révolution, les surfaces du second ordre, les surfaces peu différentes d'une sphère; donc, en n'attribuant à la surface de la terre et à celle de la carte que l'une de ces formes, on saura résoudre le problème de Lambert. Il serait inutile de faire des applications pour les différents cas que l'on vient d'indiquer, ces applications ne peuvent offrir d'intérêt que comme exercices de calcul; nous supposerons donc immédiatement, comme on le fait toujours en géographie, que la terre soit une surface de révolution et que la surface de la carte soit un plan. Les équations représentées au n° **8** par

$$f(x, y, z) = 0, \quad \varphi(x', y', z') = 0$$

deviendront ainsi

$$z = f(\sqrt{x^2 + y^2}) = 0, \quad z' = 0,$$

en plaçant convenablement les surfaces par rapport aux axes des coordonnées x, y, z et x', y', z', ce qui peut toujours être fait. La première équation peut être remplacée par les trois suivantes :

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = f(u),$$

u étant positif et v compris entre $-\pi$ et π, et les lignes coordonnées

$$u = \text{const.}, \quad v = \text{const.}$$

sont alors évidemment les parallèles et les méridiens de la terre. De même, l'équation de la carte peut être remplacée par les trois équations

$$x' = u', \quad y' = v', \quad z' = 0;$$

de là on déduit

$$ds = \sqrt{du^2[1 + f'(u)^2] + u^2 dv^2}, \quad ds' = \sqrt{du'^2 + dv'^2}.$$

Intégrant, conformément à la méthode générale, les équations

$$ds = 0, \quad ds' = 0,$$

on trouve

$$U + V\sqrt{-1} = \int \frac{1}{u}\sqrt{1 + f'(u)^2}\, du + v\sqrt{-1},$$

$$U' + V'\sqrt{-1} = u' + v'\sqrt{-1} = x' + y'\sqrt{-1}.$$

Ainsi

$$U = \int \frac{1}{u}\sqrt{1 + f'(u)^2}\, du, \quad V = v,$$

$$U' = u' = x', \quad V' = v' = y';$$

et les formules obtenues au n° 5 donnent

$$x' + y'\sqrt{-1} = F(U + V\sqrt{-1}) = F\left(\int \frac{1}{u}\sqrt{1 + f'(u)^2}\, du + v\sqrt{-1}\right).$$

$$x' - y'\sqrt{-1} = F_1(U - V\sqrt{-1}) = F_1\left(\int \frac{1}{u}\sqrt{1 + f'(u)^2}\, du - v\sqrt{-1}\right).$$

et

$$x' + y'\sqrt{-1} = \Phi(U - V\sqrt{-1}) = \Phi\left(\int \frac{1}{u}\sqrt{1 + f'(u)^2}\, du - v\sqrt{-1}\right).$$

$$x' - y'\sqrt{-1} = \Phi_1(U + V\sqrt{-1}) = \Phi_1\left(\int \frac{1}{u}\sqrt{1 + f'(u)^2}\, du + v\sqrt{-1}\right)$$

13. Cherchons quelle est celle des deux solutions qui correspond à la similitude directe, quand on se place dans la région extérieure à chaque surface. Pour cela, formons l'expression

$$\frac{df}{dz}\frac{d\zeta}{dz'}\left(\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{dx'}{du'}\frac{dy'}{dv'} - \frac{dx'}{dv'}\frac{dy'}{du'}\right)\left(\frac{dU}{du}\frac{dV}{dv} - \frac{dU}{dv}\frac{dV}{du}\right)\left(\frac{dU'}{du'}\frac{dV'}{dv'} - \frac{dU'}{dv'}\frac{dV'}{du'}\right)$$

du n° 9, nous trouvons aisément

$$\sqrt{1 + f'(u)^2},$$

c'est-à-dire un résultat positif; donc, d'après ce qui a été dit au n° 9, la similitude directe correspond à la première solution. Nous ne considérerons, en conséquence, que cette solution.

14. Dans le cas actuel, on a

$$M = u^2, \quad M' = 1;$$

donc le rapport n d'agrandissement est

$$n = \frac{\sqrt{F'(U+V\sqrt{-1})F'_1(U-V\sqrt{-1})}}{u}$$

$$= \frac{\sqrt{F'\left(\int \frac{1}{u}\sqrt{1+f'(u)^2}\,du + v\sqrt{-1}\right)F'_1\left(\int \frac{1}{u}\sqrt{1+f'(u)^2}\,du - v\sqrt{-1}\right)}}{u};$$

nous le mettrons sous la forme

$$n = \frac{1}{u\Omega},$$

en posant, pour simplifier,

$$\frac{1}{\sqrt{F'(U+V\sqrt{-1})F'_1(U-V\sqrt{-1})}} = \Omega.$$

15. Enfin, la relation générale qui lie les courbures géodésiques de deux courbes conjuguées devient

$$(7)\qquad \frac{1}{\rho'} = \frac{1}{n}\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_s + \frac{\partial\frac{1}{n}}{\partial\sigma},$$

ρ' étant le rayon de courbure de la courbe tracée sur la carte, précédé d'un signe qui se détermine d'ailleurs par la règle relative aux courbures géodésiques.

16. La relation précédente peut se mettre sous une forme plus simple quand la courbe A, tracée sur le globe terrestre, est un méridien ou un parallèle. En effet, supposons d'abord que la courbe A soit un méridien, c'est-à-dire une courbe pour laquelle v soit constant; on aura

$$\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_s = 0,$$

par conséquent

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{\partial\frac{1}{n}}{\partial\sigma}.$$

Mais

$$\frac{1}{n} = u\Omega;$$

donc

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{\partial u\Omega}{\partial\sigma} = \frac{u\,\partial\Omega}{\partial\sigma}.$$

et en remarquant que $\delta\sigma = u\,dv = u\,dV$,

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{d\Omega}{dV}.$$

Supposons, en second lieu, que la courbe A soit un parallèle, c'est-à-dire une courbe pour laquelle u soit constant : on aura

$$\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_{\rho} = \frac{1}{u\sqrt{1-f'(u)^2}},$$

$$\frac{\delta\frac{1}{n}}{\delta\sigma} = \frac{\delta u\,\Omega}{\delta\sigma} = \Omega\frac{\delta u}{\delta\sigma} + u\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma} = -\frac{\Omega}{\sqrt{1-f'(u)^2}} - \frac{d\Omega}{dU}$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{\rho'} = -\frac{d\Omega}{dU}.$$

Ces deux résultats, qui sont de Lagrange, peuvent s'établir directement comme il suit.

17. Prenons l'expression

$$\frac{dy'\,d^2x' - dx'\,d^2y'}{(dx'^2 + dy'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

de la courbure dans une courbe plane quelconque, rapportée aux coordonnées rectangulaires x' et y'; pour en déduire la courbure de la courbe transformée d'un méridien et celle de la transformée d'un parallèle, il faudra successivement considérer x' et y' comme fonctions de U seulement, ou de V seulement dans la relation générale

$$x + y'\sqrt{-1} = F(U + V\sqrt{-1}).$$

Or, on déduit de cette relation

$$dx = \alpha\,dU - \beta\,dV, \quad dy' = \beta\,dU + \alpha\,dV,$$

en appelant, pour simplifier, α la partie réelle et β le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans la dérivée, par rapport à U, de $F(U + V\sqrt{-1})$. Pour les méridiens où V est constant, on aura donc

$$dx' = \alpha\,dU, \quad dy' = \beta\,dU.$$

par suite

$$d^2x' = \frac{d\alpha}{dU}dU^2, \qquad d^2y' = \frac{d\beta}{dU}dU^2,$$

ce qui donne, en substituant dans l'expression générale de la courbure,

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{\beta\frac{d\alpha}{dU} - \alpha\frac{d\beta}{dU}}{(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Pour les parallèles, U est constant; on a donc

$$dx' = -\beta dV, \qquad dy' = \alpha dV,$$

$$d^2x' = -\frac{d\beta}{dV}dV^2, \qquad d^2y' = \frac{d\alpha}{dV}dV^2,$$

et, par suite, la courbure est

$$\frac{1}{\rho'_1} = \frac{\beta\frac{d\alpha}{dV} - \alpha\frac{d\beta}{dV}}{(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Je remarque maintenant que l'on a

$$\frac{d\alpha}{dV} = \frac{d\beta}{dU}, \qquad \frac{d\beta}{dV} = \frac{d\alpha}{dU};$$

donc les expressions précédentes de $\frac{1}{\rho'}$ et de $\frac{1}{\rho'_1}$ peuvent se changer en celles-ci :

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{\beta\frac{d\beta}{dV} + \alpha\frac{d\alpha}{dV}}{(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \frac{1}{\rho'_1} = \frac{\beta\frac{d\beta}{dU} + \alpha\frac{d\alpha}{dU}}{(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ou bien

$$\frac{1}{\rho'} = -\frac{d\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}}{dV}, \qquad \frac{1}{\rho'_1} = \frac{d\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}}{dU}.$$

Ces résultats coïncident, sauf un signe, qu'il serait, du reste, bien facile d'expliquer, avec ceux qui ont été obtenus plus haut. En effet, d'après la définition de α et de β, et la forme des fonctions F et F_1, il

est clair que

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\sqrt{F'(U+V\sqrt{-1})\,F'_1(U-V\sqrt{-1})}=\frac{1}{\Omega}.$$

18. Reprenons les relations

$$x'+y'\sqrt{-1}=F(U+V\sqrt{-1}),\quad x'-y'\sqrt{-1}=F_1(U-V\sqrt{-1}),$$

qui lient les différents points de la carte aux points correspondants du globe terrestre, et cherchons à déterminer les fonctions arbitraires F et F_1. Or je remarque que, si l'on fait $V=0$, on a pour les coordonnées des points de la courbe qui représente le méridien initial,

$$x'+y'\sqrt{-1}=F(U),\quad x'-y'\sqrt{-1}=F_1(U);$$

ces deux égalités contenant deux fonctions arbitraires, savoir, la partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-1}$ de F, on voit que le premier méridien peut être représenté par une courbe quelconque, et que la latitude peut varier sur ce méridien suivant une loi aussi quelconque. En effet, supposons que, pour ce méridien,

$$x'=\varphi(U),\quad y'=\psi(U),$$

on aura

$$F(U)=\varphi(U)+\sqrt{-1}\,\psi(U),\quad F_1(U)=\varphi(U)-\sqrt{-1}\,\psi(U),$$

et, par suite, les relations générales qui déterminent tous les points de la carte deviendront

$$x'+y'\sqrt{-1}=\varphi(U+V\sqrt{-1})+\sqrt{-1}\,\psi(U+V\sqrt{-1}),$$
$$x'-y'\sqrt{-1}=\varphi(U-V\sqrt{-1})-\sqrt{-1}\,\psi(U-V\sqrt{-1}).$$

19. Mais cette manière de déterminer les fonctions arbitraires, quoique la plus simple et la plus naturelle, n'est pas néanmoins celle qui convient le mieux à notre objet. En effet, il vaut mieux profiter de l'indétermination des deux fonctions qui entrent dans F et F_1, de manière à faire acquérir à la carte quelque nouvelle propriété qui rende sa construction facile ou son emploi commode.

20. Voyons d'abord s'il est possible d'obtenir un mode de repré-

sentation pour lequel une portion finie quelconque de la terre soit toujours semblable à la partie correspondante de la carte. Il faut, pour cela, évidemment que le rapport d'agrandissement

$$n = \sqrt{F'(U + V\sqrt{-1})\,F'_1(U - V\sqrt{-1})}$$

soit constant, ce qui entraîne, comme condition nécessaire, mais non suffisante, que la fonction

$$\sqrt{F'(U + V\sqrt{-1})\,F'_1(U - V\sqrt{-1})}$$

ne dépende que de U. Or posons

$$(8) \qquad F'(U + V\sqrt{-1}) = \rho(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi),$$

ρ et φ étant des fonctions réelles de U et de V. Comme F'_1 est la fonction conjuguée de F, on aura

$$F'_1(U - V\sqrt{-1}) = \rho(\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi);$$

donc

$$\sqrt{F'(U + V\sqrt{-1})\,F'_1(U - V\sqrt{-1})} = \rho.$$

Différentions maintenant, d'abord par rapport à U, puis par rapport à V, les deux membres de l'égalité (8); il viendra

$$F''(U + V\sqrt{-1}) = \frac{d\rho}{dU}(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$$
$$+ \rho(-\sin\varphi + \sqrt{-1}\cos\varphi)\frac{d\varphi}{dU},$$

$$\sqrt{-1}\,F''(U + V\sqrt{-1}) = \rho(-\sin\varphi + \sqrt{-1}\cos\varphi)\frac{d\varphi}{dV},$$

en appelant F'' la dérivée seconde de la fonction F; donc,

$$\frac{d\rho}{dU}\cos\varphi - \rho\sin\varphi\frac{d\varphi}{dU} = \rho\cos\varphi\frac{d\varphi}{dV},$$

$$\frac{d\rho}{dU}\sin\varphi + \rho\cos\varphi\frac{d\varphi}{dU} = \rho\sin\varphi\frac{d\varphi}{dV},$$

d'où

$$\frac{d\varphi}{dV} = \frac{\frac{d\rho}{dU}}{\rho}; \quad \frac{d\varphi}{dU} = 0.$$

Ces égalités montrent que $\frac{\frac{d\rho}{dU}}{\rho}$ doit être une constante, et par conséquent que ρ est de la forme ae^{mU}, a et m étant des constantes. Jusqu'ici nous avons exprimé seulement que ρ était fonction de U, c'est-à-dire que le rapport d'agrandissement avait la même valeur pour tous les points d'un même parallèle; pour que ce rapport soit constant, il faut de plus que ρ soit le produit de u par une constante. Or, de l'égalité

$$e^{mU} = au,$$

qui exprime cette propriété, on tire

$$dU = \frac{1}{m}\frac{du}{u}.$$

mais

$$dU = \frac{1}{u}\sqrt{1 - f'(u)^2}\,du;$$

donc

$$\sqrt{1 - f'(u)^2} = \frac{1}{m}.$$

Ainsi $f'(u)$ est constant, et le méridien de la surface de révolution qui représente la surface de la terre et dont l'équation, par rapport à l'axe des z et à un axe des u perpendiculaire au premier, est $z = f(u)$, devient une ligne droite. Ce n'est donc que dans le cas où l'on supposerait la terre cylindrique ou conique, que le rapport d'agrandissement pourrait être constant.

21. Proposons-nous, en second lieu, de déterminer les fonctions arbitraires par la condition qu'une série de points de la surface du globe occupent une position déterminée sur la surface de la carte. On peut ici supposer la fonction F réelle, et alors F_1 étant égal à F, on n'a plus qu'une seule fonction à considérer. Cette fonction doit avoir des valeurs connues pour une série de valeurs de u et de v ou

de la variable $U + V\sqrt{-1}$ dont elle dépend; donc, au moyen des formules d'interpolation, on pourra toujours la déterminer.

22. On pourrait aussi assujettir le rapport d'agrandissement n à avoir une même valeur déterminée pour une série de points du globe terrestre; au moyen des formules d'interpolation, on trouverait encore aisément les fonctions arbitraires : mais toutes ces déterminations, qui ont d'ailleurs leur importance en géographie, n'offrent aucune difficulté.

23. Passons à une question beaucoup plus difficile et proposons-nous, avec Lagrange, de déterminer les fonctions arbitraires, de telle sorte qu'il en résulte pour les méridiens et pour les parallèles des courbes d'une nature donnée. Le problème posé ainsi, dans toute sa généralité, offre des difficultés peut-être insurmontables, nous nous bornerons à considérer le cas où les courbes données sont des cercles. Du reste, on peut remarquer que ce cas, qui comprend les projections stéréographiques et les cartes marines, est suffisant pour les besoins de la géographie; car il est naturel que dans la construction des cartes on préfère toujours le cercle à toute autre courbe, à cause de la facilité et de l'exactitude avec laquelle on peut le tracer.

24. Nous avons vu au n° **16** que le rayon de courbure de la courbe des méridiens était donné par la formule

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{d\Omega}{dV}.$$

Si l'on veut que la courbe des méridiens soit un cercle, il faudra que cette courbure ne varie que d'un méridien à un autre et soit par conséquent fonction de V seul; donc $\frac{d^2\Omega}{dV\,dU}$ sera nul. Il résulte d'abord de là cette conséquence importante, que par cela même que les méridiens sont représentés par des cercles, les parallèles le sont aussi. En effet, la condition $\frac{d^2\Omega}{dU\,dV} = 0$ montre que la courbure $\frac{d\Omega}{dU}$ des parallèles est fonction de U seul, par conséquent constante pour tous les points d'un même parallèle. On prouverait de la même manière que si les lignes des parallèles sont des cercles, les lignes des méridiens le sont aussi; et la condition commune à la circularité des uns et des autres

est $\frac{d^2\Omega}{dU\,dV} = 0$. Voyons donc quelle doit être la forme des fonctions arbitraires pour que cette condition soit remplie.

25. Posons, pour simplifier,

$$\frac{1}{\sqrt{F'(z)}} = \varphi(z), \quad \frac{1}{\sqrt{F'_1(z)}} = \psi(z),$$

ce qui donne

$$\Omega = \varphi(U + V\sqrt{-1})\,\psi(U - V\sqrt{-1}).$$

La condition

$$\frac{d^2\Omega}{dU\,dV} = 0$$

deviendra

$$\varphi''(U + V\sqrt{-1})\,\psi(U - V\sqrt{-1}) - \psi''(U - V\sqrt{-1})\,\varphi(U + V\sqrt{-1}) = 0,$$

en appelant φ'' et ψ'' les dérivées secondes des fonctions φ et ψ.

L'égalité précédente peut se mettre sous la forme

$$\frac{\varphi''(U + V\sqrt{-1})}{\varphi(U + V\sqrt{-1})} = \frac{\psi''(U - V\sqrt{-1})}{\psi(U - V\sqrt{-1})}.$$

Or le second membre, d'après la nature des fonctions φ et ψ, se déduisant du premier par l'échange de $\sqrt{-1}$ en $-\sqrt{-1}$, cette égalité ne peut exister que si les deux membres se réduisent à une même constante réelle k; on a donc

$$\frac{\varphi''(U + V\sqrt{-1})}{\varphi(U + V\sqrt{-1})} = k,$$

d'où

$$\varphi(U + V\sqrt{-1}) = Ae^{\sqrt{k}(U + V\sqrt{-1})} + Be^{-\sqrt{k}(U + V\sqrt{-1})}.$$

A et B étant des constantes quelconques, réelles ou imaginaires, et, par conséquent,

$$F(U + V\sqrt{-1}) = P + \frac{e^{-\sqrt{k}(U + V\sqrt{-1})}}{Me^{\sqrt{k}(U + V\sqrt{-1})} + Ne^{-\sqrt{k}(U + V\sqrt{-1})}},$$

M, N, P étant des nouvelles constantes de même nature que A et B.

Quant à la constante $\sqrt{k}$, comme son carré peut être aussi bien négatif que positif, elle peut de même être réelle ou imaginaire; mais on peut remarquer que la valeur que reçoit le second membre de l'égalité précédente pour une valeur de k négative et égale à $-c^2$, se déduit de la valeur que l'on obtient pour $k = c^2$, en changeant seulement U en V et V en $-$ U. Cela étant, nous nous contenterons d'attribuer une valeur positive c^2, il viendra ainsi

$$F(U + V\sqrt{-1}).$$

ou bien

$$(9) \qquad x' + y'\sqrt{-1} = P + \frac{e^{c(U+V\sqrt{-1})}}{Me^{c(U+V\sqrt{-1})} + Ne^{-c(U+V\sqrt{-1})}}.$$

Ce résultat peut être considérablement simplifié.

26. Je remarque d'abord que l'on peut toujours supposer nulle la constante P, car cela revient à ajouter une simple constante à x' et y', c'est-à-dire à transporter les axes des x' et des y' parallèlement à eux-mêmes. De plus, les constantes M et N que nous avons dit être réelles ou imaginaires peuvent être supposées réelles et même positives. En effet, on peut, dans tous les cas, poser $M = me^{\gamma\sqrt{-1}}$, $N = ne^{\beta\sqrt{-1}}$, m et n étant positifs, et notre formule devient

$$x' + y'\sqrt{-1} = \frac{e^{-c(U+V\sqrt{-1})}}{me^{c\left[U+\left(V+\frac{\alpha}{c}\right)\sqrt{-1}\right]} + ne^{-c\left[U+\left(V-\frac{\beta}{c}\right)\sqrt{-1}\right]}}.$$

Multiplions le premier membre par $\cos\beta + \sqrt{-1}\sin\beta$, et le second par $e^{\beta\sqrt{-1}}$, puis posons

$$x'\cos\beta - y'\sin\beta = x'_1, \quad x'\sin\beta + y'\cos\beta = y_1;$$

nous aurons

$$x'_1 + y'_1\sqrt{-1} = \frac{e^{-c\left[U+\left(V-\frac{\beta}{c}\right)\sqrt{-1}\right]}}{me^{c\left[U+\left(V+\frac{\alpha}{c}\right)\sqrt{-1}\right]} + ne^{-c\left[U+\left(V-\frac{\beta}{c}\right)\sqrt{-1}\right]}}.$$

Or, x_1 et y'_1 sont évidemment les coordonnées correspondantes à x

et y' dans un système d'axes rectangulaires (OX'_1, OY'_1) que l'on obtient en faisant tourner de l'angle β le système des axes (OX', OY'); le second membre de la dernière équation ne diffère du second membre de l'équation (9), après qu'on y a fait $P = 0$, $M = m$, $N = n$, qu'en ce que $V + \frac{\alpha - \beta}{c}$ est mis à la place de V, comme on le voit aisément, en réduisant ces seconds membres au même numérateur 1. Donc, si l'on prend d'avance les axes des (X'_1, Y'_1) pour axes des (X', Y') et si l'on recule le méridien initial à partir duquel se comptent les longitudes V, de l'angle $\frac{\alpha - \beta}{c}$, la dernière équation se confondra avec l'équation (9). On peut donc toujours supposer réelles et positives les constantes M et N.

27. Pour déduire de l'équation (9) simplifiée, comme il vient d'être dit, les valeurs de x' et y' en U et V, multiplions, dans le second membre, haut et bas par $Me^{c(U - V\sqrt{-1})} + Ne^{-c(U - V\sqrt{-1})}$, il viendra

$$x' + y'\sqrt{-1} = \frac{Me^{-cV\sqrt{-1}} + Ne^{-2cU}}{M^2 e^{2cU} + 2MN\cos 2cV + N^2 e^{-2cU}},$$

et en égalant séparément les parties réelles et les parties imaginaires,

$$x' = \frac{M\cos 2cV + Ne^{-2cU}}{M^2 e^{2cU} + 2MN\cos 2cV + N^2 e^{-2cU}},$$

$$y' = \frac{-M\sin 2cV}{M^2 e^{2cU} + 2MN\cos 2cV + N^2 e^{-2cU}}.$$

28. Si entre ces équations, on élimine U, on obtiendra une relation entre x', y', V, qui représentera tous les cercles répondant aux différents méridiens, et, réciproquement, si l'on élimine V, on aura une équation en x', y', U, qui sera l'équation commune à tous les cercles répondant aux différents parallèles. Pour faciliter les éliminations, il convient de faire d'abord la somme des carrés des deux équations; on trouve

$$x'^2 + y'^2 = \frac{e^{-2cU}}{M^2 e^{2cU} + 2MN\cos 2cV + N^2 e^{-2cU}}.$$

et cela permet de mettre les équations sous la forme plus simple

$$\frac{x'}{x'^2 + y'^2} = N + Me^{2cU} \cos 2cV,$$

$$\frac{y'}{x'^2 + y'^2} = - Me^{2cU} \sin 2cV.$$

29. Eliminant, maintenant, la variable U, on a

$$(10) \qquad x'^2 + y'^2 - \frac{x'}{N} \operatorname{cotang} 2cV - \frac{y'}{N} = 0.$$

La circonférence représentée par cette équation passe par l'origine O des coordonnées et par le point A de OX, qui a $\frac{1}{N}$ pour abscisse; de plus, elle coupe l'axe des x, au point O, sous un angle égal à $\pi - 2cV$ ou à $-2cV$ suivant que $V = v$ est positif ou négatif; ajoutons que, dans le premier cas, on ne doit prendre que le segment situé du coté des y négatifs, et, dans le second, que le segment situé du côté des y positifs.

30. Eliminons, en second lieu, la variable V: on trouve

$$(11) \qquad x'^2 + y'^2 - \frac{2Nx'}{M^2 e^{4cU} - N^2} - \frac{1}{M^2 e^{4cU} - N^2} = 0.$$

La circonférence représentée par cette équation a l'axe des x pour diamètre. Pour achever de la définir, je vais chercher un système de deux points situés sur l'axe des x, et tels que leurs distances à un point quelconque de la circonférence soient dans un rapport constant. A cet effet, je prends l'équation

$$x'^2 + y'^2 = k^2 [(x' - a')^2 + y'^2],$$

qui représente le lieu des points dont les distances à deux points situés sur l'axe des x, et ayant pour abscisses a et a', ont un rapport k, et j'identifie avec l'équation ci-dessus; il vient

$$\frac{-2a + 2a'k^2}{1 - k^2} = \frac{2N}{M^2 e^{4cU} - N^2}, \quad \frac{k^2 a' - a}{1 - k^2} = \frac{1}{M^2 e^{4cU} - N^2}.$$

On vérifie ces deux équations en posant

$$a' = 0, \quad a = \frac{1}{N}, \quad k = \frac{M}{N} e^{2cU};$$

donc les circonférences représentant les différents parallèles du globe terrestre, sont les lieux de points dont les distances aux deux points fixes A et O déjà obtenus au n° **29**, sont dans un rapport constant et égal à $\frac{M}{N} e^{2cU}$.

31. Il convient de transporter l'origine des coordonnées au milieu de OA, afin de simplifier les équations (10) et (11); on trouve ainsi, en posant $OA = \frac{1}{N} = 2a$,

$$(12) \qquad x'^2 + y'^2 - 2a \operatorname{cotang} 2cV \,.\, y' = a^2$$

pour l'équation des méridiens, et

$$x'^2 + y'^2 + 2a \frac{4a^2 M^2 e^{4cU} + 1}{4a^2 M^2 e^{4cU} - 1} x' = -a^2$$

pour celle des parallèles.

Cette dernière équation peut se mettre sous une forme plus élégante : faisant $4a^2 M^2 = e^{4ch}$, le coefficient de x' deviendra

$$2a \frac{e^{4cU + 4ch} + 1}{e^{4cU + 4ch} - 1} = 2a \frac{e^{2c(U+h)} + e^{-2c(U+h)}}{e^{2c(U+h)} - e^{-2c(U+h)}}$$

$$= -2a\sqrt{-1} \operatorname{cotang} 2c \frac{(U+h)}{\sqrt{-1}}.$$

et l'équation sera

$$(13) \qquad x'^2 + y'^2 - 2a\sqrt{-1} \operatorname{cotang} 2cU_1 \, x' = -a^2.$$

en posant

$$U + h = U_1 \sqrt{-1}.$$

On doit remarquer que la constante h qui entre dans l'expression de U_1 n'a aucune influence sur la solution trouvée, et qu'elle ne sert qu'à fixer le parallèle terrestre qui correspond à un cercle déterminé de la série représentée par l'équation (13). Ainsi il n'y a, en réalité, dans notre solution, que deux constantes arbitraires c et a.

32. Il est utile de connaître les valeurs de x' et de y', en fonction

de U_1 et de V. Or, reprenons les valeurs

$$x' = \frac{M \cos 2cV + Ne^{2cU}}{M^2 e^{2cU} + 2MN \cos 2cV + N^2 e^{-2cU}}.$$

$$y' = -\frac{M \sin 2cV}{M^2 e^{2cU} + 2MN \cos 2cV + N^2 e^{-2cU}}.$$

obtenues au n° **27**. Changeons dans la première x' en $x' + \frac{1}{2N}$, pour tenir compte du déplacement d'origine opéré plus haut; ce qui donne

$$x' = \frac{N^2 e^{-2cU} - M^2 e^{2cU}}{2N(M^2 e^{2cU} + 2MN \cos 2cV + N^2 e^{-2cU})}.$$

puis introduisons les nouvelles notations, il viendra

$$x' = a \frac{e^{-2c(U+h)} - e^{2c(U+h)}}{e^{2c(U+h)} + 2\cos 2cV + e^{-2c(U+h)}} = -a\sqrt{-1}\,\frac{\sin 2cU_1}{\cos 2cU_1 + \cos 2cV}.$$

$$y' = -a\,\frac{\sin 2cV}{\cos 2cU_1 + \cos 2cV}.$$

33. De là on tire encore

$$x' + y'\sqrt{-1} = -a\sqrt{-1}\,\frac{\sin 2cU_1 + \sin 2cV}{\cos 2cU_1 + \cos 2cV} = -a\sqrt{-1}\,\operatorname{tang} c(U_1 + V),$$

par conséquent,

$$F(U + V\sqrt{-1}) = -a\sqrt{-1}\,\operatorname{tang} c(U_1 + V),$$

$$F_1(U - V\sqrt{-1}) = -a\sqrt{-1}\,\operatorname{tang} c(U_1 - V):$$

donc Ω, qui est égal à

$$\frac{1}{\sqrt{F'(U + V\sqrt{-1})\,F'_1(U - V\sqrt{-1})}},$$

devient

$$\Omega = \frac{\cos c(U_1 + V)\cos c(U_1 - V)}{ac}.$$

34. On peut obtenir une autre valeur de Ω d'une forme assez remarquable. Soient r et r' les distances d'un point quelconque (x', y')

aux points A et A′ situés sur l'axe des x et à la distance a de l'origine: nous aurons

$$r^2 = x'^2 + y'^2 + 2ax' + a^2, \quad r'^2 = x'^2 + y'^2 - 2ax' + a^2,$$

ou bien, d'après l'équation (13),

$$r^2 = 2ax'(1 + \sqrt{-1}\,\text{cotang}\,2cU_1),$$

$$r'^2 = 2ax'(-1 + \sqrt{-1}\,\text{cotang}\,2cU_1),$$

et, en substituant à x' sa valeur en U_1 et V,

$$r^2 = 2a^2\frac{\cos 2cU_1 - \sqrt{-1}\sin 2cU_1}{\cos 2cU + \cos 2cV}, \quad r'^2 = 2a^2\frac{\cos 2cU_1 + \sqrt{-1}\sin 2cU}{\cos 2cU + \cos 2cV}.$$

de là on déduit

$$rr' = \frac{a^2}{\cos c(U_1 + V)\cos c(U_1 - V)},$$

donc on a

$$\Omega = \frac{a}{crr'}.$$

55. Jusqu'à présent, nous n'avons fait aucune hypothèse sur la figure des méridiens terrestres: mais, pour pouvoir appliquer nos formules à la construction des cartes géographiques, il est nécessaire de connaître quelle fonction de la latitude est la variable u. Or, si l'on suppose la terre sphérique, ainsi qu'on le fait communément en géographie, et qu'on prenne, pour plus de simplicité, le rayon de la terre pour unité, on aura, s étant le complément de la latitude, $u = \sin s$; de plus, la fonction de u représentée par $f(u)$ dans le n° 12 sera ici $\cos s$; donc U, qui est égal en général à $\int_u^1 \sqrt{1 + f'(u)^2}\,du$, deviendra

$$U = \int \frac{ds}{\sin s} = \log \text{tang}\,\frac{s}{2}.$$

Si, au lieu de supposer la terre sphérique, on supposait qu'elle fût un sphéroïde elliptique aplati par les pôles, en appelant τ le complément de la latitude, ou l'angle de la normale avec l'axe des pôles,

on trouverait

$$U = \log\left[\operatorname{tang}^{\sigma}\left(\frac{1+\varepsilon\cos\sigma}{1-\varepsilon\cos\sigma}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}\right],$$

ε étant l'excentricité de l'ellipse méridienne; de manière qu'en appelant σ_1 un angle tel que

$$\operatorname{tang}\frac{\sigma_1}{2} = \operatorname{tang}\frac{\sigma}{2}\left(\frac{1+\varepsilon\cos\sigma}{1-\varepsilon\cos\sigma}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}},$$

l'expression de U aurait la même forme que dans le cas de la terre sphérique.

On sait que si l'on néglige les quantités de l'ordre ε^4, la relation précédente revient à cette autre

$$\sigma_1 = \sigma - \frac{\varepsilon^2}{2}\sin 2\sigma,$$

de manière qu'il est alors très-facile de tenir compte de l'aplatissement de la terre.

56. Résumons les règles qui résultent de ce qui précède, pour la construction d'une carte du système considéré, lorsqu'on suppose d'ailleurs la terre sphérique. Après avoir fixé la constante c, qui est, en quelque sorte, l'exposant de la carte, on prend sur une horizontale les points A et A′ où viennent se couper tous les méridiens, c'est-à-dire les pôles de la carte, en ayant soin de placer à droite le pôle boréal A; on connaît ainsi le méridien AA′ correspondant à $V = 0$, et le parallèle BB′, perpendiculaire au milieu de AA′, correspondant à $U_1 = 0$. Ce méridien et ce parallèle peuvent se rapporter à un lieu quelconque du globe terrestre, qui devient alors le centre de la carte. De la connaissance de ce lieu résulte celle du méridien, à partir duquel se comptent les longitudes, et celle de la constante h. Car, puisque pour le centre de la carte on a $V = 0$, $U_1 = 0$, d'après la valeur de V, le méridien à partir duquel se comptent les longitudes est précisément celui qui passe par le centre de la carte; et, d'après la valeur de U_1, si l'on appelle s_0 la valeur du complément de la latitude pour le centre de la carte, et par conséquent $\log\operatorname{tang}\frac{s_0}{2}$ la valeur de U pour ce même point, on a

$$h + \log\operatorname{tang}\frac{\sigma_0}{2} = 0, \quad \text{d'où} \quad h = -\log\operatorname{tang}\frac{\sigma_0}{2}.$$

Maintenant, pour obtenir la représentation du méridien correspondant à une longitude v, on décrit, avec AA′ pour base, un segment capable de l'angle $\pi - 2cv$, au-dessus de AA′, c'est-à-dire du côté des y négatifs, si v est positif, ou bien, un segment capable de $\pi + 2cv$, au-dessous de AA′, si v est négatif; et pour avoir la représentation du parallèle correspondant à la latitude $\frac{\pi}{2} - s$, et par conséquent à la valeur $\log \operatorname{tang} \frac{s}{2}$ de U, on décrit le cercle lieu des points dont le rapport des distances aux points A et A′ est égal à

$$\frac{M}{N} e^{2cU} = e^{2c(U+h)} = \frac{\left(\operatorname{tang} \frac{s}{2}\right)^{2c}}{\left(\operatorname{tang} \frac{s_0}{2}\right)^{2c}}.$$

On peut ainsi obtenir la représentation des différents méridiens et des différents parallèles, et, par conséquent, placer sur la carte tel lieu que l'on veut.

57. On voit que dans la construction de nos cartes il y a, comme indéterminées, d'abord la distance $AA = 2a$, dont dépend la grandeur ou l'échelle de la carte, puis la constante c, et enfin la position du lieu de la terre, que l'on prend comme centre de la carte. Nous allons nous proposer de fixer ces indéterminées, de manière à diminuer le plus possible l'altération causée par la représentation dans la grandeur des différents lieux de la terre. Cherchons le point pour lequel le rapport d'agrandissement, désigné ci-dessus par n, est un minimum, ou bien le point dans le voisinage duquel n est le moins altéré. La formule (7) du n° **15** nous permet de résoudre très-simplement cette question. En effet, si l'on applique cette formule à un méridien, elle nous montre immédiatement que les lieux dont la grandeur est la moins altérée en longitude sont ceux qui sont situés sur le méridien rectiligne AA′ de la carte, car pour ces points on a

$$\frac{\partial \frac{1}{n}}{\partial \tau} = 0, \qquad \left(\frac{\cos \theta}{\rho}\right)_s = 0,$$

et, par conséquent, $\frac{1}{\rho'}$ doit aussi être nul. Supposons, en second lieu,

que la formule se rapporte aux parallèles, on aura

$$\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_s = \frac{\cos s}{u}, \qquad \frac{1}{n} = u\Omega,$$

et si l'on veut que

$$\frac{\partial\frac{1}{n}}{\partial\tau} = 0,$$

c'est-à-dire que la déformation du lieu en latitude soit également minimum, il faudra que

$$\frac{1}{\rho'} = \Omega\cos s;$$

mais le rayon ρ' de la courbe transformée d'un parallèle est, en tenant compte du signe,

$$\frac{a\sqrt{-1}}{\sin 2cU_1};$$

Ω, qui a pour valeur générale

$$\frac{\cos c(U_1+V_1)\cos c(U_1-V_1)}{ac},$$

se réduit ici à

$$\frac{\cos^2 cU_1}{ac} = \frac{1+\cos 2cU_1}{2ac},$$

puisque, d'après la condition déjà trouvée, $V = 0$. Donc notre formule devient

$$(14)\qquad \frac{2c\sqrt{-1}\sin 2cU_1}{1+\cos 2cU_1} = -\cos s.$$

38. Nous pouvons obtenir un résultat beaucoup plus simple. Nommons k le rapport du point cherché aux points A et A', on sait que

$$k = e^{2c(U+h)} = \cos 2cU_1 + \sqrt{-1}\sin 2cU_1,$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{k} = \cos 2cU_1 - \sqrt{-1}\sin 2cU_1;$$

donc

$$\sqrt{-1}\sin 2cU_1 = \frac{1}{2}\left(k - \frac{1}{k}\right),$$

$$\cos 2cU_1 = \frac{1}{2}\left(k + \frac{1}{k}\right).$$

Substituant dans l'égalité (14), il vient

$$\frac{2c(k^2-1)}{2k+k^2+1} = -\cos s:$$

d'où

$$k = \frac{2c-\cos s}{2c+\cos s}.$$

Ainsi le point cherché, pour lequel la déformation de la carte est la moindre possible, est le point situé sur le méridien rectiligne AA' qui partage ce méridien en parties proportionnelles à $2c - \cos s$ et à $2c + \cos s$. On voit qu'en supposant ce point désigné sur le globe terrestre, ce qui fait connaître s, on peut encore le placer arbitrairement sur l'axe AA' de la carte, et que l'exposant $2c$ se trouve seulement alors déterminé.

39. Puisqu'il reste encore une indéterminée, assujettissons la seconde variation de $\frac{1}{n}$ dans le sens du méridien à être nulle; nous aurons

$$\frac{d\frac{1}{\rho'}}{dU} = \frac{1}{n}\frac{d\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_s}{dU}.$$

$\frac{1}{\rho'}$ et $\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_s$ se rapportant à un parallèle. Or

$$\frac{d\frac{1}{\rho'}}{dU} = -\frac{2c}{a}\cos 2c\,U_1,$$

puis, en supposant la terre sphérique, ce que nous n'avions pas fait encore,

$$\frac{d\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right)_s}{dU} = \frac{d\,\text{cotang}\,s}{dU} = -\frac{1}{\sin s}\cdot\frac{1}{n} = \sin s\cdot\frac{1+\cos 2c\,U_1}{2ac}:$$

donc, en substituant, on a

$$4c^2\cos 2c\,U_1 = 1 + \cos 2c\,U_1,$$

d'où

$$4c^2 = \left(\frac{k+1}{k^2+1}\right)^2,$$

et, à cause de la valeur de k obtenue plus haut,

$$2c = \sqrt{1 + \sin^2 s},$$

ce qui détermine $2c$, quand s est connu.

40. Ainsi, après avoir pris un lieu important M de la surface de la terre pour le point dans le voisinage duquel les lieux doivent être le moins altérés possible, on déterminera l'exposant de la carte par la condition $2c = \sqrt{1 + \sin^2 s_1}$, s_1 étant le complément de la latitude du point M, puis on prendra les pôles A et A', de façon que le rapport des distances de ces points au point M', qui représente le point M de la terre, soit $\frac{2c - \cos s_1}{2c + \cos s}$: enfin le coefficient h qui, en appelant s_0 le complément de la latitude du centre de la carte, est égal à log tang $\frac{s}{2}$, se déduira de ce que le rapport des distances M'A et M'A' ou $\frac{2c - \cos s}{2c + \cos s_1}$ doit être $\frac{\left(\text{tang}\,\frac{s_1}{2}\right)^{2c}}{\left(\text{tang}\,\frac{s}{2}\right)^{2c}}$, et la carte se trouvera entièrement déterminée, sauf l'échelle qui doit évidemment rester quelconque.

41. Nous terminerons en remarquant que le système général de représentation obtenu précédemment donne, comme cas particuliers, les cartes réduites et les cartes stéréographiques, et qu'il suffit pour cela de supposer l'exposant $2c$ de la carte égal à 0 ou à 1. En effet, si dans les valeurs de x' et y' du n° **32** on fait

$$c = 0,$$

et, en même temps,

$$a = \frac{m}{c} = \infty,$$

pour que les valeurs de x' et y' ne se réduisent pas à zéro, on trouve

aisément

$$x' = -mh - mU, \quad y' = -mV;$$

par conséquent, en supposant la terre sphérique,

$$x' = -mh - m \log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} s, \quad y' = -mv.$$

Ainsi les méridiens sont représentés par des droites parallèles à l'axe des x, et dont les distances à cet axe croissent proportionnellement à la longitude, et les parallèles sont des droites parallèles à l'axe des y, dont les distances à cet axe croissent proportionnellement aux logarithmes de la tangente de la moitié du complément de la latitude. C'est le système de Mercator ou des cartes réduites.

En faisant $2c = 1$, on a

$$x = -a\sqrt{-1}\,\frac{\sin U}{\cos U + \cos V}, \qquad y = -a\,\frac{\sin V}{\cos U + \cos V},$$

pour les valeurs de x' et y' en U_1 et V_1 et

$$x'^2 + y'^2 - 2a \operatorname{cotang} V\, y' = a^2.$$

(15) $$x'^2 + y'^2 - 2a\sqrt{-1} \operatorname{cotang} U_1\, x' = -a^2.$$

pour les équations des circonférences représentant les méridiens et les parallèles. Nous aurons démontré que ces résultats conviennent au mode de représentation de Ptolémée, si nous faisons voir qu'en supposant la terre sphérique, à tout cercle tracé sur la terre correspond un cercle sur la carte. Or un cercle de la sphère est représenté, en v et s, par une équation de la forme

$$A \sin s \cos v + B \sin s \sin v + C \cos s = D,$$

A, B, C, D étant des constantes; d'ailleurs

$$v = V,$$

puis

$$\log \operatorname{tang} \frac{s}{2} = U,$$

d'où

$$\sin s = \frac{2e^U}{1 + e^{2U}}, \quad \cos s = \frac{1 - e^{2U}}{1 - e^{2U}},$$

et, par conséquent,

$$\sin s = \frac{1}{\cos(U_1 + h\sqrt{-1})} \qquad \cos s = \sqrt{-1}\,\frac{\sin(U_1 + h\sqrt{-1})}{\cos(U_1 + h\sqrt{-1})};$$

donc l'équation d'un cercle de la terre est, en U_1 et V,

$$A\cos V + B\sin V + C\sqrt{-1}\sin(U_1 + h\sqrt{-1}) = D\cos(U_1 + h\sqrt{-1}),$$

ou plus simplement,

$$A\cos V + B\sin V + C_1\sqrt{-1}\sin U_1 + D_1\cos U_1 = 0,$$

C_1 et D_1 étant des nouvelles constantes. Maintenant les équations (15) nous donnent

$$\cos V = \frac{x'^2 + y'^2 - a^2}{\sqrt{[(x'-a)^2 + y'^2][(x'+a)^2 + y'^2]}},$$

$$\sin V = \frac{2ay'}{\sqrt{[(x'-a)^2 + y'^2][(x'+a)^2 + y'^2]}},$$

$$\cos U_1 = \frac{x'^2 + y'^2 + a^2}{\sqrt{[(x'-a)^2 + y'^2][(x'+a)^2 + y'^2]}},$$

$$\sqrt{-1}\sin U_1 = \frac{-2ax'}{\sqrt{[(x'-a)^2 + y'^2][(x'+a)^2 + y'^2]}};$$

donc, en substituant, il vient, pour l'équation de la projection du cercle de la terre,

$$A(x'^2 + y'^2 - a^2) + 2aBy' + D_1(x'^2 + y'^2 + a^2) - 2aC_1y' = 0,$$

ce qui est bien l'équation d'un cercle.

Nota. Au lieu de se donner comme condition que les angles formés sur la carte soient toujours égaux aux angles correspondants sur la surface du globe, on pourrait exiger que les différentes parties de la terre conservassent la même étendue, en se déformant d'ailleurs. On sait que plusieurs cartes, entre autres celles de Flamsteed, ont été construites d'après cette condition. Or, en supposant d'abord la surface de la terre et celle de la carte tout à fait quelconques, et exprimant les coordonnées des points de chaque surface au moyen de deux variables, comme nous l'avons fait au n° **1**, on trouve aisément que l'aire du triangle infiniment petit, tracé sur la première surface, et ayant

pour sommets les points (u, v), $(u + du, v + dv)$, $(u + \delta u, v + \delta v)$, est égale à

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{EG - F^2}\,(du\,\delta v - \delta u\,dv).$$

E, F et G étant les trois fonctions de u et de v, qui entrent dans l'expression de l'élément de la surface. De même l'aire du triangle correspondant tracé sur la seconde surface, et ayant pour sommets les points (u', v'), $(u' + du', v' + dv')$, $(u' + \delta u', v' + \delta v')$, est

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{E'G' - F'^2}\,(du'\,\delta v' - \delta u'\,dv');$$

donc la condition énoncée s'exprime par l'équation

$$\sqrt{E'G' - F'^2}\,(du'\,\delta v' - \delta u'\,dv') = \sqrt{EG - F^2}\,(du\,\delta v - \delta u\,dv);$$

ou bien, en posant

$$du = \frac{du}{du'}\,du' + \frac{du}{dv'}\,dv',$$

$$\delta u = \frac{du}{du'}\,\delta u' + \frac{du}{dv'}\,\delta v',$$

$$dv = \frac{dv}{du'}\,du' + \frac{dv}{dv'}\,dv',$$

$$\delta v = \frac{dv}{du'}\,\delta u' + \frac{dv}{dv'}\,\delta v',$$

et substituant,

$$\frac{du}{du'}\frac{dv}{dv'} - \frac{du}{dv'}\frac{dv}{du'} = \frac{\sqrt{E'G' - F'^2}}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Pour déduire de cette équation les valeurs de u et v, on se donnera arbitrairement v en fonction de u' et de v', et la détermination de u dépendra de l'intégration d'une équation aux différences partielles, linéaire et du premier ordre, qui dans beaucoup de cas se ramenera immédiatement aux quadratures.

Supposons la terre sphérique et la carte plane; faisons en conséquence $u' = x$, $v' = y$, $u = s$, $v = v$, s étant le complément de la latitude et v la longitude; nous aurons

$$\frac{ds}{dx}\frac{dv}{dy} - \frac{ds}{dy}\frac{dv}{dx} = \frac{1}{\sin s};$$

ou bien, en posant $\cos s = S$,

$$\frac{dS}{dx}\frac{dv}{dy} - \frac{dS}{dy}\frac{dv}{dx} = -1.$$

Comme nous avons deux inconnues et une seule condition, nous pouvons imposer à notre système de représentation une autre propriété; nous pouvons exiger, par exemple, que les lignes des méridiens et des parallèles se coupent à angle droit. A l'équation précédente nous devons alors joindre celle-ci :

$$\frac{dS}{dx}\frac{dv}{dx} + \frac{dS}{dy}\frac{dv}{dy} = 0.$$

Des deux équations on tire aisément

$$\frac{dS}{dx} = \frac{-\frac{dv}{dy}}{\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dy}\right)^2},$$

$$\frac{dS}{dy} = \frac{\frac{dv}{dx}}{\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dy}\right)^2}.$$

Différentiant la première de ces dernières équations par rapport à y, la seconde par rapport à x et égalant, on trouve

$$(1) \qquad (p^2 - q^2)(t - r) - 4\,pqs = 0,$$

en posant, pour simplifier,

$$\frac{dv}{dx} = p, \quad \frac{dv}{dy} = q, \quad \frac{d^2v}{dx^2} = r, \quad \frac{d^2v}{dx\,dy} = s, \quad \frac{d^2v}{dy^2} = t.$$

Cette équation aux différences partielles du second ordre se ramène à la forme linéaire par la méthode de Legendre. Soit

$$v = px + qy - v_1,$$

et regardons v_1 comme une fonction inconnue de p et de q; nous aurons

$$\frac{dv_1}{dp} = x, \quad \frac{dv_1}{dq} = y, \quad \frac{d^2v_1}{dp^2} = \frac{t}{rt - s^2}, \quad \frac{d^2v_1}{dp\,dq} = \frac{-s}{rt - s^2}, \quad \frac{d^2v_1}{dq^2} = \frac{r}{rt - s^2}.$$

d'où, en substituant dans l'équation (1), il vient

$$(a) \qquad (p^2 - q^2)\left(\frac{d^2 v_1}{dp^2} - \frac{d^2 v_1}{dq^2}\right) + 4pq\,\frac{d^2 v_1}{dp\,dq} = 0.$$

Si maintenant on peut tirer de cette équation la valeur de v_1 en fonction de p et de q, on aura ensuite aisément x et y, puis v, puis S, qui est égal à

$$\int \frac{p\,dy - q\,dx}{p^2 + q^2}.$$

Nous n'entrerons dans aucun détail ni sur l'intégration de l'équation (a), ni sur les applications que l'on peut faire relativement au système de représentation qui précède. Nous nous proposons de revenir en détail sur ce sujet dans une autre occasion.

Note de M. Liouville.

J'aurais à presenter plusieurs remarques au sujet des deux Thèses precédentes. L'analyse dont l'auteur fait usage dans la première, ou du moins la partie de cette analyse qui lui sert à compléter l'ancien travail de Poisson, est tirée d'une methode generale que j'ai donnée dans ce Journal pour développer certaines fonctions V et demontrer la convergence de séries procédant suivant de telles fonctions. Les questions traitées dans la seconde Thèse ont été un des objets de mes leçons au College de France au premier semestre de l'année scolaire 1850-1851, leçons que j'espère un jour publier, et dont j'avais d'ailleurs déjà donné d'avance, pour ainsi dire, une partie dans les Notes de l'*Application de l'Analyse à la Géométrie*, par Monge (cinquieme édition). M. J. Dienger a bien voulu citer mon travail en ecrivant à son tour sur ce sujet dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* de MM. Terquem et Gerono. Ces Notes contiennent même la solution complète de la question du *tracé géographique à trois dimensions*, qui semblait au premier abord offrir de grandes difficultés. Mais l'occasion se presentera plus tard de revenir sur tout cela. Et en attendant j'applaudis à ce que M. Bonnet a pu ajouter de neuf aux travaux de ses devanciers.

SUR

LA TOTALITÉ DES NOMBRES PREMIERS

INFÉRIEURS A UNE LIMITE DONNÉE;

PAR M. TCHEBICHEF.

(Presenté à l'Academie imperiale de Saint-Pétersbourg, en 1848.)

§ Ier.

Legendre, dans sa *Théorie des Nombres* [*], propose une formule pour déterminer combien il y a de nombres premiers depuis 1 jusqu'à une limite donnée très-grande. Il commence par comparer sa formule avec l'énumération immédiate des nombres premiers faite dans les Tables les plus étendues, nommément depuis 10 000 jusqu'à 1 000 000, et l'applique ensuite à la solution de plusieurs questions. Plus tard, cette même formule a donné lieu à des recherches de M. Lejeune-Dirichlet qui, dans un de ses Mémoires, contenu dans le tome XVIII du Journal de Crelle, annonce avoir traité les questions de ce genre par une méthode analytique rigoureuse. En attendant la publication du travail encore inédit de cet illustre géomètre, nous allons donner ici les résultats des recherches que nous avons nous-même entreprises sur ce sujet curieux.

§ II.

THÉORÈME I. *Si l'on représente par* $\varphi(x)$ *la totalité des nombres premiers inférieurs à* x, *par* n *un entier quelconque, enfin par* ρ *une*

[*] Tome II, page 65, troisième édition.

quantité > 0, *la somme*

$$\sum_{x=2}^{x=\infty} \left[\varphi(x+1) - \varphi(x) - \frac{1}{\log x}\right] \frac{\log^n x}{x^{1+\rho}}$$

jouira de la propriété de s'approcher d'une limite finie, à mesure que ρ *converge vers zéro.*

Démonstration. Commençons par démontrer que la propriété en question a lieu pour les fonctions que l'on obtient par la différentiation successive des trois expressions

$$\sum \frac{1}{m^{1+\rho}} - \frac{1}{\rho}, \quad \log\rho - \sum\left(1 - \frac{1}{\mu^{1+\rho}}\right),$$
$$\sum \log\left(1 - \frac{1}{\mu^{1+\rho}}\right) + \sum \frac{1}{\mu^{1+\rho}},$$

par rapport à ρ; ici, comme par la suite, la sommation par rapport à m s'étend à tous les entiers depuis $m = 2$ jusqu'à $m = \infty$, et par rapport à μ seulement aux nombres premiers, également depuis $\mu = 2$ jusqu'à $\mu = \infty$.

Considérons la première expression. Il est facile de voir que l'on a

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{e^x - 1} x^\rho \, dx = \sum \frac{1}{m^{1+\rho}} \cdot \int_0^\infty e^{-x} x^\rho \, dx,$$
$$\int_0^\infty e^{-x} x^{-1+\rho} \, dx = \frac{1}{\rho} \int_0^\infty e^{-x} x^\rho \, dx,$$

et, par conséquent,

$$\sum \frac{1}{m^{1+\rho}} - \frac{1}{\rho} = \frac{\int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x}\right) e^{-x} x^\rho \, dx}{\int_0^\infty e^{-x} x^\rho \, dx}.$$

En vertu de cette équation, la dérivée d'un ordre quelconque n de $\sum \frac{1}{m^{1+\rho}} - \frac{1}{\rho}$ par rapport à ρ sera égale à une fraction dont le dénominateur est $\left[\int_0^\infty e^{-x} x^\rho \, dx\right]^{n+1}$ et le numérateur une fonction en-

tiere des expressions

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right) e^{-x} x^\rho \, dx,$$

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right) e^{-x} x^\rho \log x \, dx,$$

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right) e^{-x} x^\rho \log^2 x \, dx, \ldots,$$

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right) e^{-x} x^\rho \log^n x \, dx,$$

$$\int_0^\infty e^{-x} x^\rho \, dx, \quad \int_0^\infty e^{-x} x^\rho \log x \, dx,$$

$$\int_0^\infty e^{-x} x^\rho \log^2 x \, dx, \ldots, \int_0^\infty e^{-x} x^\rho \log^n x \, dx.$$

Or une telle fraction, pour $n = 0$ aussi bien que pour $n > 0$, s'approche d'une limite finie à mesure que ρ converge vers zéro; car la limite de l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-x} x^\rho \, dx$$

pour $\rho = 0$ est 1, et les intégrales

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right) e^{-x} x^\rho \, dx,$$

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right) e^{-x} x^\rho \log x \, dx,$$

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right) e^{-x} x^\rho \log^2 x \, dx, \ldots,$$

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right) e^{-x} x^\rho \log^n x \, dx,$$

$$\int_0^\infty e^{-x} x^\rho \log x \, dx, \quad \int_0^\infty e^{-x} x^\rho \log^2 x \, dx, \ldots,$$

$$\int_0^\infty e^{-x} x^\rho \log^n x \, dx$$

pour $\rho = 0$ conservent évidemment des valeurs finies.

Ainsi, il est certain que la fonction $\sum \frac{1}{m^{1+\rho}} - \frac{1}{\rho}$, aussi bien que ses dérivées successives, resteront finies à mesure que ρ convergera vers la limite zéro.

Considérons actuellement la fonction

$$\log \rho - \sum \log\left(1 - \frac{1}{\mu^{1+\rho}}\right).$$

On sait que

$$\left[\left(1 - \frac{1}{2^{1+\rho}}\right)\left(1 - \frac{1}{3^{1+\rho}}\right)\left(1 - \frac{1}{5^{1+\rho}}\right)\cdots\right]^{-1}$$
$$= 1 + \frac{1}{2^{1+\rho}} + \frac{1}{3^{1+\rho}} + \frac{1}{4^{1+\rho}} + \ldots.$$

d'où l'on tire

$$-\log\left(1 - \frac{1}{2^{1+\rho}}\right) - \log\left(1 - \frac{1}{3^{1+\rho}}\right) - \log\left(1 - \frac{1}{5^{1+\rho}}\right) - \ldots$$
$$= \log\left(1 + \frac{1}{2^{1+\rho}} + \frac{1}{3^{1+\rho}} + \frac{1}{4^{1+\rho}} + \ldots\right),$$

équation qui, d'après la notation admise plus haut, peut être écrite de cette manière,

$$-\sum \log\left(1 - \frac{1}{\mu^{1+\rho}}\right) = \log\left(1 + \sum \frac{1}{m^{1+\rho}}\right).$$

Donc

$$\log \rho - \sum \log\left(1 - \frac{1}{\mu^{1+\rho}}\right) = \log\left(1 + \sum \frac{1}{m^{1+\rho}}\right)\rho.$$

ou bien

$$\log \rho - \sum \log\left(1 - \frac{1}{\mu^{1+\rho}}\right) = \log\left[1 + \rho + \left(\sum \frac{1}{m^{1+\rho}} - \frac{1}{\rho}\right)\rho\right].$$

Cette équation fait voir que toutes les dérivées de

$$\log \rho - \sum \log\left(1 - \frac{1}{\mu^{1+\rho}}\right).$$

suivant ρ, s'exprimeront au moyen d'un nombre fini de fractions.

dont les dénominateurs seront des puissances entieres et positives de

$$1 + \rho + \left(\sum \frac{1}{m^{1+\rho}} - \frac{1}{\rho}\right)\rho,$$

et les numérateurs des fonctions entières de ρ, de l'expression

$$\sum \frac{1}{m^{1+\rho}} - \frac{1}{\rho}$$

et de ses dérivées par rapport à ρ. Or de telles fractions s'approcheront d'une limite finie à mesure que ρ convergera vers zéro : car l'expression

$$1 + \rho + \left(\sum \frac{1}{m^{1+\rho}} - \frac{1}{\rho}\right)\rho,$$

qui entre dans les dénominateurs de ces fractions, tendra vers la limite 1 à mesure que ρ s'approchera de zéro, et cela parce que la différence $\sum \frac{1}{m^{1+\rho}} - \frac{1}{\rho}$, dans cette hypothèse, reste finie comme nous l'avons démontré plus haut. Quant à ce qui concerne les numérateurs, comme ils ne contiennent la différence $\sum \frac{1}{m^{1+\rho}} - \frac{1}{\rho}$ et ses dérivées que sous forme entière, et que ces fonctions tendent vers une limite finie quand ρ converge vers zéro, il en sera de même pour ses numérateurs.

Il nous reste encore à démontrer que la même propriété a lieu relativement aux dérivées de la fonction

$$\sum \log\left(1 - \frac{1}{\mu^{1+\rho}}\right) + \sum \frac{1}{\mu^{1+\rho}}.$$

Nous remarquerons d'abord que sa première dérivée sera

$$\sum \frac{1}{\mu^{2+2\rho}} \cdot \frac{\log \mu}{1 - \frac{1}{\mu^{1+\rho}}}.$$

Il est facile de voir par la forme de cette fonction que les dérivées des ordres supérieurs s'exprimeront également au moyen d'un nombre

fini de termes tels que

$$\sum \frac{1}{\mu^{2+2\varepsilon}} \cdot \frac{\log^p \mu}{1-\frac{1}{\mu^{1+\varepsilon}}} \cdot \frac{1}{\mu^{q+q\varepsilon}\left(1-\frac{1}{\mu^{1+\varepsilon}}\right)},$$

p, q, r n'étant pas inférieurs à zéro. Mais chaque terme de cette nature, pour des valeurs de ρ non inférieures à zéro, a une valeur finie; en effet, pour $\varepsilon = 0$ et $\rho > 0$, la fonction sous le signe $\sum$ sera une quantité infiniment petite d'un ordre non inférieur au second par rapport à $\frac{1}{\mu}$.

Après nous être convaincu que les dérivées des trois expressions

$$\sum \frac{1}{m^{1+\varepsilon}} - \frac{1}{\varepsilon}, \quad \log \rho - \sum \log\left(1 - \frac{1}{\mu^{1+\varepsilon}}\right),$$

$$\sum \log\left(1 - \frac{1}{\mu^{1+\varepsilon}}\right) + \sum \frac{1}{\mu^{1+\varepsilon}},$$

pour des valeurs de ρ convergentes vers zéro, tendent vers une limite finie, nous concluons que la même propriété aura également lieu par rapport à l'expression

$$\frac{d^\varepsilon\left[\sum \log\left(1 - \frac{1}{\mu^{1+\varepsilon}}\right) - \sum \frac{1}{\mu^{1+\varepsilon}}\right]}{d\rho^\varepsilon} - \frac{d^\varepsilon\left[\log \rho - \sum \log\left(1 - \frac{1}{\mu^{1+\varepsilon}}\right)\right]}{d\rho^\varepsilon}$$

$$- \frac{d^\varepsilon\left(\sum \frac{1}{m^{1+\varepsilon}} - \frac{1}{\rho}\right)}{d\rho^\varepsilon}.$$

laquelle, après les différentiations effectuées, se réduira à

$$= \left(\sum \frac{\log^\varepsilon \mu}{\mu^{1+\varepsilon}} - \sum \frac{\log^\varepsilon m}{m^{1+\varepsilon}}\right).$$

Ce qui vient d'être dit renferme le théorème énoncé plus haut, car il est facile de remarquer que, d'après notre notation, la différence

$$\sum \frac{\log^\varepsilon \mu}{\mu^{1+\varepsilon}} - \sum \frac{\log^\varepsilon m}{m^{1+\varepsilon}}$$

est identique avec l'expression

$$\sum_{x=2}^{x=\infty} \left[\varphi(x+1) - \varphi x - \frac{1}{\log x} \right] \frac{\log^6 x}{x^{1+\alpha}}.$$

ou bien, ce qui revient au même, avec

$$\sum_{x=1}^{x=\infty} \left[\varphi(x+1) - \varphi(x) \right] \frac{\log^6 x}{x^{1+\alpha}} - \sum_{x=1}^{x=\infty} \frac{\log^6 x}{x^{1+\alpha}}.$$

Pour le faire voir, il n'y a qu'à observer que le premier terme de cette différence est simplement égal à $\sum \frac{\log^6 p}{p^{1+\alpha}}$, parce que le facteur $\varphi(x+1) - \varphi(x)$ de $\frac{\log^6 x}{x^{1+\alpha}}$ se réduit, par la définition même de la fonction φ, à 1 ou à 0, suivant que x est un nombre premier ou un nombre composé. Quant au second terme $\sum_{x=1}^{x=\infty} \frac{\log^6 x}{x^{1+\alpha}}$, il se transforme évidemment en $\sum \frac{\log^6 m}{m^{1+\alpha}}$ par le changement de x en m.

De cette manière, la proposition que nous avions en vue de démontrer se trouve complétement établie.

§ III.

Le théorème dont on vient de donner la démonstration conduit à plusieurs propriétés curieuses de la fonction qui détermine combien il y a de nombres premiers inférieurs à une limite donnée. Et, d'abord, observons que la différence

$$\frac{1}{\log x} - \int_x^{x+1} \frac{dx}{\log x},$$

pour x très-grand, est une quantité infiniment petite du premier ordre par rapport à $\frac{1}{x}$; par conséquent, l'expression

$$\left(\frac{1}{\log x} - \int_x^{x+1} \frac{dx}{\log x} \right) \frac{\log^6 x}{x^{1+\alpha}},$$

pour x très-grand, sera de l'ordre $2+\rho$ relativement à $\frac{1}{x}$; d'après cela, la somme

$$\sum_{x=2}^{x=\infty}\left(\frac{1}{\log x}-\int_x^{x+1}\frac{dx}{\log x}\right)\frac{\log^n x}{x^{1+\rho}},$$

pour des valeurs de ρ non inférieures à zéro, restera finie. Ajoutant cette somme à l'expression

$$\sum_{x=2}^{x=\infty}\left[\varphi(x+1)-\varphi(x)-\frac{1}{\log x}\right]\frac{\log^n x}{x^{1+\rho}},$$

pour laquelle le théorème I a lieu, nous concluons que la valeur de

$$\sum_{x=2}^{x=\infty}\left[\varphi(x+1)-\varphi(x)-\int_x^{x+1}\frac{dx}{\log x}\right]\frac{\log^n x}{x^{1+\rho}}$$

restera finie à mesure que ρ convergera vers la limite zéro. De là on tire le théorème suivant :

Théorème II. *La fonction $\varphi(x)$, qui désigne combien il y a de nombres premiers inférieurs à x, satisfera, entre les limites $x=2$ et $x=\infty$, une infinité de fois aux deux inégalités*

$$\varphi(x)>\int_2^x\frac{dx}{\log x}-\frac{\alpha x}{\log^n x}\quad\text{et}\quad\varphi(x)<\int_2^x\frac{dx}{\log x}+\frac{\alpha x}{\log^n x},$$

quelque petite que soit la valeur de α, supposée positive, et quelque grand que soit en même temps le nombre n.

Démonstration. Nous nous contenterons de démontrer l'une de ces deux inégalités, parce que l'autre s'établira tout à fait de la même manière. Choisissons, par exemple, la suivante :

$$(1)\qquad \varphi(x)<\int_2^x\frac{dx}{\log x}+\frac{\alpha x}{\log^n x}.$$

Pour prouver que cette inégalité est satisfaite une infinité de fois, admettons d'abord que le contraire ait lieu, et voyons quelles seront les conséquences de cette hypothèse. Soit a un entier supérieur à e^n

et supérieur en même temps au plus grand nombre qui satisfait à l'inégalité (1). Dans cette supposition, on aura pour $x > a$ l'inégalité

$$\varphi(x) \geqq \int^x \frac{dx}{\log x} + \frac{\alpha x}{\log^n x}, \quad \log x > n,$$

et, par conséquent,

$$(2) \qquad \varphi(x) - \int_2^x \frac{dx}{\log x} \geqq \frac{\alpha x}{\log^n x}, \quad \frac{n}{\log x} < 1.$$

Or, si l'on admettait les inégalités (2), il en résulterait, contrairement à ce qui a été démontré plus haut, que l'expression

$$\sum_{x=2}^{x=\infty} \left[\varphi(x+1) - \varphi(x) - \int_x^{x+1} \frac{dx}{\log x}\right] \frac{\log^n x}{x^{1+\rho}},$$

au lieu de converger vers une limite finie pour des valeurs tres petites de ρ, s'approcherait de la limite $+\infty$. En effet, nous pouvons considérer cette expression comme la limite de

$$\sum_{x=2}^{x=s} \left[\varphi(x+1) - \varphi(x) - \int_x^{x+1} \frac{dx}{\log x}\right] \frac{\log^n x}{x^{1+\rho}}$$

pour $s = \infty$. Supposant donc $s > a$, cette quantité peut être mise sous la forme

$$(3) \qquad C + \sum_{x=a+1}^{x=s} \left[\varphi(x+1) - \varphi(x) - \int_x^{x+1} \frac{dx}{\log x}\right] \frac{\log^n x}{x^{1+\rho}},$$

en faisant, pour abréger,

$$C = \sum_{x=2}^{x=a} \left[\varphi(x+1) - \varphi(x) - \int_x^{x+1} \frac{dx}{\log x}\right] \frac{\log^n x}{x^{1+\rho}}.$$

et observant que C désignera une quantité finie pour $\rho = 0$ et $\rho > 0$.

Or l'expression (3), en vertu de la formule connue

$$\sum_{a+1}^{s} u_x (v_{x+1} - v_x) = u_s v_{s+1} - u_a v_{a+1} - \sum_{a+1}^{s} v_x (u_x - u_{x-1}),$$

et après avoir fait

$$v_x = \varphi(x) - \int_2^x \frac{dx}{\log x}, \quad u_x = \frac{\log^\rho x}{x^{1-\varepsilon}},$$

se transformera dans la suivante :

$$C - \left[\varphi(a-1) - \int_2^{a-1} \frac{dx}{\log x}\right] \frac{\log^\rho a}{a^{1-\varepsilon}} + \left[\varphi(s-1) - \int_2^{s-1} \frac{dx}{\log x}\right] \frac{\log^\rho s}{s^{1-\varepsilon}}$$

$$- \sum_{x=a+1}^{x=s} \left[\varphi(x) - \int_2^x \frac{dx}{\log x}\right] \left[\frac{\log^\rho x}{x^{1-\varepsilon}} - \frac{\log^\rho (x-1)}{(x-1)^{1-\varepsilon}}\right],$$

qui, à son tour, en faisant $\delta > 0$ et < 1, pourra s'écrire comme il suit :

$$C - \left[\varphi(a-1) - \int_2^{a-1} \frac{dx}{\log x}\right] \frac{\log^\rho a}{a^{1-\varepsilon}} + \left[\varphi(s-1) - \int_2^{s-1} \frac{dx}{\log x}\right] \frac{\log^\rho s}{s^{1-\varepsilon}}$$

$$- \sum_{x=a+1}^{x=s} \left[\varphi(x) - \int_2^x \frac{dx}{\log x}\right] \left[1 - \varepsilon - \frac{n}{\log(x-\delta)}\right] \frac{\log^{\rho-1}(x-\delta)}{(x-1)^{1-\varepsilon}}.$$

Si l'on représente par F la somme des deux premiers termes de cette expression, et si l'on observe de plus que le troisième est positif en vertu de la condition (2), on sera en droit de conclure que l'expression précédente a une valeur supérieure à

$$F - \sum_{x=a+1}^{x=s} \left[\varphi(x) - \int_2^x \frac{dx}{\log x}\right] \left[1 - \varepsilon - \frac{n}{\log(x-\delta)}\right] \frac{\log^{\rho-1}(x-\delta)}{(x-1)^{1-\varepsilon}}.$$

Les mêmes conditions (2) font voir que, dans cette expression, la fonction sous le signe $\sum$ conservera une valeur positive entre les limites. En outre on aura, entre les limites de la sommation,

$$(3) \qquad 1 - \varepsilon - \frac{n}{\log(x-\delta)} > 1 - \varepsilon - \frac{n}{\log x},$$

car

$$\varepsilon > 0, \quad \delta > 0;$$

9°.
$$\varphi(x) - \int_1^x \frac{dx}{\log x} > \alpha \cdot \frac{x-9}{\log^n(x-9)},$$

car

$$\varphi(x) - \int_1^x \frac{dx}{\log x} = \frac{\alpha x}{\log^n x}$$

en vertu de la premiere des inégalités (2), et en vertu de la seconde, la dérivée de $\frac{\alpha x}{\log^n x}$, égale à $\frac{\alpha}{\log^n x}\left(1 - \frac{n}{\log x}\right)$, est positive, ce qui donne

$$\frac{\alpha x}{\log^n x} > \frac{\alpha(x-9)}{\log^n(x-9)}.$$

Donc l'expression précédente surpasse la somme

$$F + \sum_{x=a+1}^{x-1} \frac{\alpha(x-9)}{\log^n(x-9)}\left(1 - \frac{n}{\log a}\right)\frac{\log^n(x-9)}{(x-9)^{1+\rho}},$$

qui, après les réductions, devient

$$F + \alpha\left(1 - \frac{n}{\log a}\right)\sum_{x=a+1}^{x-1} \frac{1}{(x-9)^{1+\rho}};$$

or cette dernière expression est évidemment supérieure à

$$F + \alpha\left(1 - \frac{n}{\log a}\right)\sum_{x=a+1}^{x=s} \frac{1}{x^{1+\rho}},$$

laquelle, pour $s = \infty$, se réduit à

$$F + \alpha\left(1 - \frac{n}{\log a}\right)\sum_{x=a+1}^{x=\infty} \frac{1}{x^{1+\rho}} = F + \alpha\left(1 - \frac{n}{\log a}\right)\frac{\int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{e^x - 1}x^\rho dx}{\int_0^\infty e^{-x}x^\rho dx}.$$

Il est facile de faire voir que la quantité à laquelle nous sommes parvenu converge vers la limite $+\infty$ pour $\rho = 0$. En effet, on a d'abord

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{e^x - 1}dx = +\infty, \quad \int_0^\infty e^{-x}dx = 1;$$

de plus, α et $1 - \frac{n}{\log a}$ sont toutes deux des quantités positives, la première par hypothèse, et la seconde en vertu de la dernière inégalité (2).

Nous étant assuré de cette manière que, dans l'hypothèse admise, non-seulement la somme

$$\sum_{x=a}^{x=\infty} \left[\varphi(x+1) - \varphi(x) - \int_x^{x+1} \frac{dx}{\log x} \right] \frac{\log^3 x}{x^{1+\alpha}},$$

mais aussi une quantité plus petite qu'elle se réduit à $+\infty$, nous sommes en droit de conclure que l'hypothèse en question est inadmissible; d'où découle de suite la légitimité du théorème II.

§ IV.

Il sera facile actuellement, en vertu de la proposition précédente, de démontrer le théorème qui suit :

Théorème III. *L'expression* $\frac{x}{\varphi(x)} - \log x$, *pour* $x = \infty$, *ne peut avoir une limite différente de* -1.

Démonstration. Soit L la limite de la différence $\frac{x}{\varphi(x)} - \log x$ pour $x = \infty$. Dans cette hypothèse, on pourra toujours trouver un nombre N tellement grand, que pour $x > N$ la valeur de $\frac{x}{\varphi(x)} - \log x$ sera comprise entre les limites $L - \varepsilon$ et $L + \varepsilon$, ε étant aussi petite qu'on voudra. Ainsi, pour de semblables valeurs de x, et lorsque $\varepsilon > 0$, on aura

$$(4) \qquad \frac{x}{\varphi(x)} - \log x > L - \varepsilon, \quad \frac{x}{\varphi(x)} - \log x < L + \varepsilon.$$

Mais, en vertu du théorème précédent, les inégalités

$$\varphi(x) > \int_1^x \frac{dx}{\log x} - \frac{2x}{\log^6 x}, \quad \varphi(x) < \int_1^x \frac{dx}{\log x} + \frac{2x}{\log^6 x},$$

sont satisfaites par une infinité de valeurs de x, et, par conséquent

aussi, par des valeurs de x supérieures à N, pour lesquelles les inégalités (4) ont lieu. Or ces inégalités, combinées avec celles que nous venons d'écrire, conduisent à

$$\frac{x}{\int_2^x \frac{dx}{\log x} - \frac{\alpha x}{\log^n x}} - \log x > L - \varepsilon,$$

$$\frac{x}{\int_2^x \frac{dx}{\log x} + \frac{\alpha x}{\log^n x}} - \log x < L + \varepsilon.$$

d'où l'on tire

$$L + 1 < \frac{x - (\log x - 1)\left(\int_2^x \frac{dx}{\log x} - \frac{\alpha x}{\log^n x}\right)}{\int_2^x \frac{dx}{\log x} + \frac{ax}{\log^n x}} + \varepsilon.$$

$$L + 1 > \frac{x - (\log x - 1)\left(\int_2^x \frac{dx}{\log x} + \frac{\alpha x}{\log^n x}\right)}{\int_2^x \frac{dx}{\log x} + \frac{ax}{\log^n x}} - \varepsilon.$$

On voit, par ces inégalités, que la valeur numérique de $L + 1$ ne surpasse pas celle de l'une des expressions qui en forment les seconds membres. De plus, comme ε peut devenir aussi petite qu'on voudra dans l'hypothèse de N très-grand, on peut en dire autant de chacune des quantités

$$\frac{x - (\log x - 1)\left(\int_2^x \frac{dx}{\log x} \mp \frac{\alpha x}{\log^n x}\right)}{\int_2^x \frac{dx}{\log x} \mp \frac{\alpha x}{\log^n x}} \pm \varepsilon;$$

car, pour $x = \infty$, on trouve, par les principes du calcul différentiel, que leur limite commune est zéro. Nous étant ainsi convaincu que les limites de la valeur numérique de $L + 1$ peuvent être diminuées à volonté, nous sommes en droit de conclure que

$$L + 1 = 0,$$

et, par conséquent,

$$L = -1,$$

ce qu'il s'agissait de démontrer.

Ce que nous venons de prouver relativement à la limite de la valeur de $\frac{x}{\varphi(x)} - \log x$, pour $x = \infty$, ne s'accorde pas avec une formule donnée par Legendre pour déterminer approximativement combien il y a de nombres premiers inférieurs à une limite donnée. D'après lui, la fonction $\varphi(x)$, pour x très-grand, est exprimée avec une approximation suffisante par la formule

$$\varphi(x) = \frac{x}{\log x - 1,08366},$$

qui donne, pour la limite de $\frac{x}{\varphi(x)} - \log x$, le nombre $-1,08366$, au lieu de -1.

§ V.

En partant du théorème II, on peut déterminer la limite supérieure du degré de précision avec lequel la fonction, désignée par $\varphi(x)$, peut être remplacée par toute autre fonction donnée $f(x)$. Dans ce qui va suivre, nous comparerons la différence $f(x) - \varphi(x)$ avec les expressions

$$\frac{x}{\log x}, \quad \frac{x}{\log^2 x}, \quad \frac{x}{\log^3 x}, \ldots,$$

et, pour abréger le discours, nous dirons que A est *une quantité de l'ordre* $\frac{x}{\log^n x}$, quand le rapport de A à $\frac{x}{\log^m x}$, pour $x = \infty$, sera *infini* pour $m > n$, et *zéro* pour $m < n$. Cela posé, nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème IV. *Quand l'expression*

$$\frac{\log^n x}{x}\left[f(x) - \int_2^x \frac{dx}{\log x}\right],$$

pour $x = \infty$, *a pour limite une quantité finie ou infinie, la fonction*

$f(x)$ ne peut représenter $\varphi(x)$ exactement en quantités de l'ordre $\frac{x}{\log^n x}$ inclusivement.

Démonstration. Soit L la limite vers laquelle converge l'expression

$$\frac{\log^n x}{x}\left[f(x) - \int_2^x \frac{dx}{\log x}\right]$$

à mesure que x s'approche de l'infini. Comme L, par hypothèse, est différente de zéro, elle ne pourra être égale qu'à une quantité positive ou négative. Supposons-la positive; notre raisonnement s'appliquera sans difficulté au cas de $L < 0$.

Si la limite L de l'expression que nous considérons, pour $x = \infty$, est supérieure à zéro, nous pourrons trouver un nombre N assez grand et tel que, pour $x > N$, la valeur de l'expression

$$\frac{\log^n x}{x}\left[f(x) - \int_2^x \frac{dx}{\log x}\right]$$

reste constamment supérieure à une certaine quantité positive l. Nous aurons donc, pour $x > N$,

$$(5) \qquad \frac{\log^n x}{x}\left[f(x) - \int_2^x \frac{dx}{\log x}\right] > l.$$

Mais, en vertu du théorème II, quelque petit que soit $\alpha = \frac{l}{2}$, nous aurons, pour un nombre infini de valeurs de x, l'inégalité

$$(6) \qquad \varphi(x) < \int_2^x \frac{dx}{\log x} + \frac{\alpha x}{\log^n x},$$

qui donne

$$f(x) - \int_2^x \frac{dx}{\log x} < f(x) - \varphi(x) + \frac{\alpha x}{\log^n x};$$

en la multipliant par $\frac{\log^n x}{x}$, et observant que $\alpha = \frac{l}{2}$, on trouve

$$\frac{\log^n x}{x}\left[f(x) - \int_2^x \frac{dx}{\log x}\right] < \frac{\log^n x}{x}\left[f(x) - \varphi(x)\right] + \frac{l}{2}.$$

ou bien, en vertu de l'inégalité (5),

$$\frac{\log^n x}{x}[f(x) - \varphi(x)] > \frac{l}{2}.$$

Or cette inégalité, ayant lieu en même temps que celles marquées par les numéros (5) et (6) pour une infinité de valeurs de x, prouve, à cause de $\frac{l}{2} > 0$, que la limite de

$$\frac{\log^n x}{x}[f(x) - \varphi(x)],$$

pour $x = \infty$, ne peut pas être égale à zéro. Si donc cette limite est différente de zéro, la différence $f(x) - \varphi(x)$, d'après la convention établie plus haut, est une quantité de l'ordre $\frac{x}{\log^n x}$ ou d'un ordre inférieur; par conséquent, $f(x)$ diffère de $\varphi(x)$ d'une quantité de l'ordre $\frac{x}{\log^n x}$ ou bien d'un ordre inférieur; ce qu'il s'agissait de démontrer.

En nous basant sur ce théorème, nous pouvons faire voir que la formule de Legendre $\frac{x}{\log x - 1,08366}$, par laquelle la limite de l'expression

$$\frac{\log x}{x}\left(\frac{x}{\log x - 1,08366} - \int_2^x \frac{dx}{\log x}\right),$$

quand $x = \infty$, est égale à 0,08366, ne peut exprimer $\varphi(x)$ avec un degré de précision allant jusqu'aux quantités de l'ordre $\frac{x}{\log^2 x}$ inclusivement.

On trouve avec la même facilité les valeurs des constantes A et B telles, que la fonction $\frac{x}{A \log x + B}$ puisse représenter $\varphi(x)$ avec une précision poussée aux quantités de l'ordre $\frac{x}{\log^2 x}$ inclusivement. En vertu du théorème précédent, de telles valeurs de A et de B doivent satisfaire à l'équation

$$\lim\left[\frac{\log^2 x}{x}\left(\frac{x}{A \log x + B} - \int_2^x \frac{dx}{\log x}\right)\right]_{x=\infty} = 0.$$

Le développement de $\frac{x}{A\log x + B}$ donne

$$\frac{x}{A\log x + B} = \frac{1}{A}\cdot\frac{x}{\log x} - \frac{B}{A^2}\cdot\frac{x}{\log^2 x} + \frac{B^2}{A}\cdot\frac{x}{\log^3 x} - \ldots.$$

De plus, intégrant $\int_2^x \frac{dx}{\log x}$ par parties, on trouve

$$\int_2^x \frac{dx}{\log x} = \frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + 2\int_2^x \frac{dx}{\log^3 x} + C.$$

En vertu de ce qui vient d'être trouvé, l'équation précédente se réduit à

$$\lim \left\{ \frac{\log^2 x}{x} \left| \begin{array}{l} \frac{1}{A}\cdot\frac{x}{\log x} - \frac{B}{A^2}\cdot\frac{x}{\log^2 x} + \frac{B^2}{A^3}\cdot\frac{x}{\log^3 x} - \ldots \\ -\frac{x}{\log x} - \frac{x}{\log^2 x} - 2\int_2^x \frac{dx}{\log^3 x} - C \end{array} \right| \right\}_{x=\infty} = 0.$$

ou bien

$$\lim \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{1}{A} - 1\right)\log x - \left(\frac{B}{A^2} + 1\right) + \frac{B^2}{A^3}\cdot\frac{1}{\log x} - \ldots \\ -2\frac{\log^2 x}{x}\int_2^x \frac{dx}{\log^3 x} - C\frac{\log^2 x}{x} \end{array} \right\}_{x=\infty} = 0.$$

Or, si l'on observe que tous les termes à partir du troisième convergent vers zéro pour des valeurs croissantes de x, on verra immédiatement qu'on ne peut satisfaire à l'équation précédente qu'en faisant

$$\frac{1}{A} - 1 = 0, \quad \frac{B}{A^2} + 1 = 0,$$

d'où

$$A = 1, \quad B = -1.$$

Ainsi, de toutes les fonctions de la forme $\frac{x}{A\log x + B}$, la seule $\frac{x}{\log x - 1}$ peut exprimer $\varphi(x)$ avec une précision poussée aux quantités de l'ordre $\frac{x}{\log^2 x}$ inclusivement.

§ VI.

Démontrons actuellement un théorème concernant le choix de la fonction qui détermine, avec un degré de précision requis, la fonction que nous avons représentée par $\varphi(x)$.

THÉORÈME V. *Si la fonction $\varphi(x)$, qui désigne combien il y a de nombres premiers inférieurs à x, peut être représentée algébriquement avec une précision poussée aux quantités de l'ordre $\frac{x}{\log^n x}$ inclusivement au moyen des fonctions x, $\log x$, e^x, alors elle s'exprimera par la formule*

$$\frac{x}{\log x} + \frac{1.x}{\log^2 x} + \frac{1.2.x}{\log^3 x} + \ldots + \frac{1.2.3\ldots(n-1)x}{\log^n x}$$

Démonstration. Soit $f(x)$ la fonction qui, contenant sous forme algébrique x, $\log x$, e^x, exprime $\varphi(x)$ exactement jusqu'aux quantités de l'ordre $\frac{x}{\log^n x}$ inclusivement; l'expression

$$\frac{\log^n x}{x}\left[f(x) - \frac{x}{\log x} - \frac{1.x}{\log^2 x} - \frac{1.2.x}{\log^3 x} - \ldots - \frac{1.2.3\ldots(n-1)x}{\log^n x}\right]$$

pour des valeurs croissantes de x, devra converger soit vers zéro, soit vers une limite finie ou infiniment grande. En effet, s'il n'en était pas ainsi, la première dérivée de cette expression changerait de signe une infinité de fois pour des valeurs de x croissantes jusqu'à $+\infty$, ce qui ne peut arriver, comme il est facile de s'en assurer, avec une fonction algébrique de x, $\log x$, e^x [*].

---

[*] Il est très-facile de s'assurer qu'une fonction algébrique de x, $\log x$, e^x cesse de changer de signe pour une valeur de x surpassant une certaine limite. Si la fonction dont il s'agit est entière, alors son signe dependra d'un terme de la forme

$$Kx^{m'} . \log^{m''} x . e^{m'''x}$$

pour des valeurs de x plus ou moins considérables, ce terme ne changeant pas de signe pour $x < 1$. Pour toute autre fonction algébrique de x, $\log x$, e^x, que nous représenterons par y, on démontrera la même proposition de la manière suivante. Ob-

Ainsi, on aura nécessairement pour $f(x)$

$$(7)\quad \lim\left\{\frac{\log^n x}{x}\left[\begin{array}{l} f(x) - \dfrac{x}{\log x} - \dfrac{1.x}{\log^2 x} - \dfrac{1.2.x}{\log^3 x} - \ldots \\ - \dfrac{1.2.3\ldots(n-1)x}{\log^n x} \end{array}\right]\right\}_{x=\infty} = \mathrm{L}.$$

Mais, d'un autre côté, il est facile de s'assurer que

$$\lim\left\{\frac{\log^n x}{x}\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x}{\log x} + \dfrac{1.x}{\log^2 x} + \dfrac{1.2.x}{\log^3 x} + \ldots \\ + \dfrac{1.2.3\ldots(n-1)x}{\log^n x} - \displaystyle\int_2^x \frac{dx}{\log x} \end{array}\right\}\right\}_{x=\infty} = 0;$$

cette équation ajoutée à la précédente donne

$$\lim\left[\frac{\log^n x}{x}\left(f(x) - \int_2^x \frac{dx}{\log x}\right)\right]_{x=\infty} = \mathrm{L}.$$

Or, comme, par hypothèse, $f(x)$ représente $\varphi(x)$ exactement jusqu'aux quantités de l'ordre $\dfrac{x}{\log^n x}$ inclusivement, et que, d'après le théorème IV, cela ne peut avoir lieu si la limite de

$$\frac{\log^n x}{x}\left[f(x) - \int_2^x \frac{dx}{\log x}\right],$$

---

servons d'abord que la fonction y sera racine de l'équation

$$u_0 y^m + u_1 y^{m-1} + u_2 y^{m-2} + \ldots + u_{m-1} y + u_m = 0,$$

$u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}, u_m$ étant des fonctions entières de x, $\log x$, e^x; si l'on représente par v la fonction qui résulte de l'élimination de y entre l'équation précédente et sa dérivée, alors les fonctions u_0, u_m et v, comme entières, finiront par ne plus se réduire à zéro ou à changer de signe pour des valeurs de x surpassant une certaine limite; il arrivera donc que v conservera également son signe, car, pour des valeurs de x qui ne réduisent pas v à zéro, l'équation

$$u_0 y^m + u_1 y^{m-1} + \ldots + u_{m-1} y + u_m = 0$$

ne peut avoir de racines égales, et quand les racines sont inégales, le signe de l'un d'elles ne peut changer qu'en supposant que le signe de u_0 ou u_m change. Cette propriété peut être étendue à beaucoup d'autres fonctions, pour lesquelles, par cette raison, le théorème V, ainsi que les conséquences qui s'en déduisent, auront également lieu.

pour $x = \infty$, n'est pas zéro, on aura $L = 0$; cela posé, l'équation (7), pour $L = 0$, se réduit à

$$\lim \left\{ \frac{\log^n x}{x} \left[\begin{array}{l} f(x) - \frac{x}{\log x} - \frac{1.x}{\log^2 x} - \frac{1.2.x}{\log^3 x} - \ldots \\ - \frac{1.2.3\ldots(n-1)x}{\log^n x} \end{array} \right] \right\}_{x=\infty} = 0,$$

ce qui prouve que la fonction

$$\frac{x}{\log x} + \frac{1.x}{\log^2 x} + \frac{1.2.x}{\log^3 x} + \ldots + \frac{1.2.3\ldots(n-1)x}{\log^n x}$$

ne diffère pas de $f(x)$ de quantités de l'ordre $\frac{x}{\log^n x}$ et d'ordres inférieurs, et que, par conséquent, elle peut, aussi bien que $f(x)$, représenter $\varphi(x)$ avec une précision poussée jusqu'aux quantités de l'ordre $\frac{x}{\log^n x}$ inclusivement; ce qu'il s'agissait de démontrer.

D'après le théoreme que nous venons d'établir, nous concluons que si la fonction $\varphi(x)$ qui représente combien il y a de nombres premiers inférieurs à x, peut être exprimée algébriquement au moyen de x, $\log x$, e^x, jusqu'aux quantités des ordres

$$\frac{x}{\log x}, \quad \frac{x}{\log^2 x}, \quad \frac{x}{\log^3 x}, \ldots$$

inclusivement, elle devra s'exprimer par

$$\frac{x}{\log x}, \quad \frac{x}{\log x} + \frac{1.x}{\log^2 x}, \quad \frac{x}{\log x} + \frac{1.x}{\log^2 x} + \frac{1.2.x}{\log^3 x}, \ldots.$$

De plus, comme ces sommes ne sont autre chose que les valeurs successives de l'intégrale $\int_2^x \frac{dx}{\log x}$, poussées aux quantités des ordres

$$\frac{x}{\log x}, \quad \frac{x}{\log^2 x}, \quad \frac{x}{\log^3 x}, \ldots,$$

nous sommes en droit de conclure que dans toutes ces hypothèses l'intégrale $\int_2^x \frac{dx}{\log x}$ exprimera $\varphi(x)$ avec exactitude jusqu'aux quan-

tités de l'ordre pour lequel elle peut encore s'exprimer algébriquement au moyen de x, $\log x$, e^x.

Il est facile de se convaincre par les Tables des nombres premiers que l'intégrale $\int_2^x \frac{dx}{\log x}$, pour x très-grand, exprime avec assez de précision combien il y a de nombres premiers inférieurs à x. Mais ces Tables sont trop peu étendues pour pouvoir décider de la supériorité de la formule $\int_0^x \frac{x}{\log x}$ sur la formule de Legendre $\frac{x}{\log x - 1,08366}$ ou sur toute autre analogue. Dans les limites de ces Tables, les deux fonctions $\int_2^x \frac{dx}{\log x}$ et $\frac{x}{\log x - 1,08366}$ different peu entre elles; mais leur différence $\frac{x}{\log x - 1,08366} - \int_2^x \frac{dx}{\log x}$, ayant un *minimum* pour

$$x = e^{\frac{(1,08366)^2}{0,08366}} = 1247646,$$

croîtra constamment jusqu'à l'infini après cette valeur, et déjà, pour $x > 10000000$, aura une valeur considérable. C'est pour des nombres de cette grandeur que l'avantage de l'une des deux formules

$$\int_2^x \frac{dx}{\log x}, \quad \frac{x}{\log x - 1,08366}$$

devra se manifester. Mais pour effectuer cette vérification, il faudrait avoir des Tables de nombres premiers beaucoup plus étendues que celles que l'on possède.

§ VII.

En adoptant l'intégrale $\int_2^x \frac{dx}{\log x}$ pour la valeur approchée de $\varphi(x)$, nous serons obligé de changer toutes les formules auxquelles Legendre est parvenu en partant de l'hypothèse

$$\varphi(x) = \frac{x}{\log x - 1,08366};$$

nos formules ne seront pas plus compliquées que les siennes, et au-

ront sur elles l'avantage d'être plus approchées d'après les théoremes qui ont été démontrés plus haut.

Appliquons notre formule à la détermination de la somme

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{X},$$

et du produit

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{X}\right),$$

pour X très-grand.

Pour déterminer la somme

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{X},$$

nous observerons que, d'après la notation admise plus haut, on a

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{X}=\sum_{x=2}^{x=X}\frac{\varphi(x+1)-\varphi(x)}{x},$$

car $\varphi(x)$ représentant la totalité des nombres premiers inférieurs à x, la différence $\varphi(x+1)-\varphi(x)$ se réduira à zéro toutes les fois que x sera un nombre composé, et à 1 quand x sera premier.

Supposons X très-grand, et désignons par λ un nombre inférieur à X, mais assez grand cependant pour que la fonction $\varphi(x)$, entre les limites $x=\lambda$ et $x=X$, puisse être représentée avec une exactitude suffisante par l'intégrale $\int_2^x \frac{dx}{\log x}$. Dans cette hypothese, l'équation précédente pourra s'écrire de cette manière :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{X}=\sum_{x=2}^{x=\lambda-1}\frac{\varphi(x+1)-\varphi(x)}{x}+\sum_{x=\lambda}^{x=X}\frac{\varphi(x+1)-\varphi(x)}{x}.$$

Remplaçant dans la dernière somme $\varphi(x)$ par $\int_2^x \frac{dx}{\log x}$, on aura

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{X}=\sum_{x=2}^{x=\lambda-1}\frac{\varphi(x+1)-\varphi(x)}{x}+\sum_{x=\lambda}^{x=X}\frac{\int_2^{x+1}\frac{dx}{\log x}}{x}.$$

Or l'intégrale $\int_2^{x+1}\frac{dx}{\log x}$ peut être representée avec exactitude par

$\frac{1}{\log x}$ jusqu'aux quantités de l'ordre $\frac{1}{x}$: de plus, la somme $\sum_{x=\lambda}^{x=X} \frac{1}{x \log x}$ peut être remplacée par l'intégrale $\int_{\lambda}^{X} \frac{dx}{x \log x}$ avec le même degré de précision.

Sous ces conditions, l'équation précédente viendra

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{X} = \sum_{x=2}^{x=\lambda-1} \frac{\varphi(x+1) - \varphi(x)}{x} + \int_{\lambda}^{X} \frac{dx}{x \log x}.$$

ou bien, effectuant l'intégration,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{X} = \sum_{x=2}^{x=\lambda-1} \frac{\varphi(x+1) - \varphi(x)}{x} - l \log \lambda + l \log X.$$

Enfin, si l'on remplace par C la quantité

$$\sum_{x=2}^{x=\lambda-1} \frac{\varphi(x+1) - \varphi(x)}{x} - l \log \lambda,$$

indépendante de x, on trouvera

$$(8) \qquad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{X} = C + l \log X.$$

Lorsque l'on aura déterminé la valeur de la constante C, cette équation pourra servir à trouver, par approximation, la somme de la série

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{X}$$

quand X sera très-grand.

La formule que nous venons de trouver est plus simple que celle de Legendre, d'après laquelle on a

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{X} = \log(\log X - 0{,}08366) + C.$$

Passons maintenant à la détermination du produit

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{X}\right) = P.$$

Prenant le logarithme des deux membres de cette équation, on aura la formule

$$\log P = \log\left(1-\frac{1}{2}\right) + \log\left(1-\frac{1}{3}\right) + \log\left(1-\frac{1}{5}\right) + \ldots + \log\left(1-\frac{1}{X}\right),$$

qui peut encore s'écrire de la manière suivante :

$$\log P = -\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{X}\right) + \frac{1}{2} + \log\left(1-\frac{1}{2}\right)$$
$$+\frac{1}{3} + \log\left(1-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{5} + \log\left(1-\frac{1}{5}\right) + \ldots + \frac{1}{X} + \log\left(1-\frac{1}{X}\right).$$

Observons actuellement que la série finie

$$\frac{1}{2} + \log\left(1-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} + \log\left(1-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{5} + \log\left(1-\frac{1}{5}\right) + \ldots$$
$$+\frac{1}{X} + \log\left(1-\frac{1}{X}\right),$$

aux quantités de l'ordre $\frac{1}{X}$ près, peut être remplacée par la série infinie

$$\frac{1}{2} + \log\left(1-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} + \log\left(1-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{5} + \log\left(1-\frac{1}{5}\right) + \ldots.$$

En effet, la différence entre ces deux séries est évidemment inférieure à la somme

$$\frac{1}{X+1} - \log\left(1-\frac{1}{X+1}\right) + \frac{1}{X+2} + \log\left(1-\frac{1}{X+2}\right)$$
$$-\frac{1}{X+3} + \log\left(1-\frac{1}{X+3}\right) + \ldots.$$

qui, elle-même, est inférieure à l'intégrale

$$\int_X^\infty \left[\frac{1}{x} + \log\left(1-\frac{1}{x}\right)\right] dx = 1 - (X-1)\log\left(1-\frac{1}{X}\right);$$

de plus, comme la valeur de $1-(X-1)\log\left(1-\frac{1}{X}\right)$, pour X très-grand, est une quantité infiniment petite du premier ordre par rapport à $\frac{1}{X}$, nous en concluons que la substitution qui vient d'être indiquée est permise.

D'apres ce qui vient d'être dit, si l'on représente par C′ la somme de la série infinie

$$\frac{1}{2} + \log\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} + \log\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{5} + \log\left(1 - \frac{1}{5}\right) + \ldots.$$

la valeur de $\log P$ s'exprimera, aux quantités de l'ordre $\frac{1}{X}$ pres. par la formule

$$\log P = -\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{X}\right) + C'.$$

Substituant pour $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{X}$ la valeur (8) trouvée plus haut, on obtiendra

$$\log P = -C - l \log X + C',$$

d'où

$$P = \frac{e^{C'-C}}{\log X}.$$

Enfin, faisant, pour abréger,

$$e^{C'-C} = C_0.$$

et remplaçant P par le produit

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{X}\right),$$

nous aurons

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{X}\right) = \frac{C}{\log X}.$$

Legendre, pour la valeur du même produit, a trouvé la formule suivante :

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{X}\right) = \frac{C}{\log X - 0{,}08366}.$$

MÉMOIRE

SUR

LES NOMBRES PREMIERS;

PAR M. TCHEBICHEF.

(Présenté à l'Académie impériale de Saint-Pétersbourg, en 1850.)

§ Ier.

Toutes les questions qui dépendent de la loi de répartition des nombres premiers dans la série

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, etc.,

présentent, en général, de grandes difficultés. Ce qu'on parvient à conclure, d'après les Tables des nombres premiers avec une probabilité très-grande, reste le plus souvent sans démonstration rigoureuse. Par exemple, les Tables des nombres premiers nous portent à croire qu'à partir de $a > 3$, il y a toujours un nombre premier plus grand que a et plus petit que $2a - 2$ [ce qui est le *postulatum* connu de M. Bertrand (*)]; mais, jusqu'à présent, la démonstration de cette proposition a manqué pour des valeurs de a, qui surpassent la limite de nos Tables. La difficulté devient encore plus grande quand on se donne des limites plus étroites, ou qu'on demande à assigner la limite de a au-dessus de laquelle la série

$$a+1,\quad a+2,\ldots,\quad 2a-2,$$

contient au moins deux, trois, quatre, etc., nombres premiers.

Il y a une autre espèce de questions très-difficiles qui dépendent aussi de la loi de répartition des nombres premiers dans la série

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, etc.,

(*) *Journal de l'École Polytechnique*, XXXe cahier.

et dont la résolution est très-nécessaire. Ce sont les questions sur la valeur numérique des séries dont les termes sont des fonctions des nombres premiers

$$2, \quad 3, \quad 5, \quad 7, \quad 11, \quad 13, \quad 17, \quad \text{etc.}$$

Euler a prouvé que la série

$$\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha} + \frac{1}{11^\alpha} + \frac{1}{13^\alpha} + \ldots$$

devient divergente pour les mêmes valeurs de α que celles qui rendent divergente la série

$$\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha} + \ldots,$$

savoir, pour $\alpha \leqq 1$. Mais pour certaines formes du terme u_n, la convergence de la série

$$u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8 + \ldots$$

n'est plus une condition nécessaire pour que la série

$$u_2 + u_3 + u_5 + u_7 + u_{11} + u_{13} + \ldots$$

conserve une valeur finie. Tel est, par exemple, le cas de

$$u_n = \frac{1}{n \log n}.$$

En effet, la valeur de la série

$$\frac{1}{2 \log 2} + \frac{1}{3 \log 3} + \frac{1}{5 \log 5} + \frac{1}{7 \log 7} + \ldots,$$

comme il sera prouvé plus tard, ne surpasse pas 1,73, tandis que la série

$$\frac{1}{2 \log 2} + \frac{1}{3 \log 3} + \frac{1}{4 \log 4} + \frac{1}{5 \log 5} + \frac{1}{6 \log 6} + \ldots$$

est divergente. Quel est donc le *criterium* de la convergence des séries qui ne sont composées que de termes aux indices premiers 2, 3,

5, 7, 11, etc.? Et, dans le cas de leur convergence, comment assigner le degré d'approximation de leurs valeurs, calculées d'après leurs premiers termes? La résolution de ces questions par rapport aux séries de la forme

$$u_2 + u_3 + u_5 + u_7 + u_{11} + u_{13} + \ldots$$

est très-intéressante; car on les rencontre dans certaines recherches sur les nombres.

Ce Mémoire contient la résolution des questions citées. J'y parviens en traitant la fonction qui désigne la somme des logarithmes des nombres premiers au-dessous d'une limite donnée. D'après une équation que cette fonction vérifie, on peut assigner deux limites entre lesquelles tombe la valeur de cette somme. Parmi les différentes conclusions que nous en tirons, nous parvenons à assigner des limites entre lesquelles on trouve toujours au moins un nombre premier, ce qui nous conduit très-simplement à prouver le *postulatum* cité de M. Bertrand. Quant à l'évaluation des séries de la forme

$$u_2 + u_3 + u_5 + u_7 + u_{11} + \ldots,$$

nous trouvons le *criterium* pour juger si elles sont convergentes ou divergentes, et dans le premier cas, nous donnons la méthode pour calculer, avec un certain degré d'approximation, la différence de la valeur de ces séries avec la somme de leurs premiers termes. Nous donnons aussi une formule pour calculer, par approximation, combien il y a de nombres premiers qui ne surpassent pas une valeur donnée, et nous assignons la limite de l'erreur de cette formule, ce qu'on ne pouvait faire jusqu'à présent. Dans un Mémoire que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie de Saint-Pétersbourg, en 1848, j'ai prouvé que, si l'on rejette, dans l'expression de la totalité des nombres premiers qui ne surpassent pas x, tous les termes qui sont zéro par rapport à

$$\frac{x}{\log x}, \quad \frac{x}{\log^2 x}, \quad \frac{x}{\log^3 x}, \ldots,$$

quand on fait $x = \infty$, cette expression se réduit à $\int_2^x \frac{dx}{\log x}$; mais,

pour les valeurs finies de x, on se trouve dans l'incertitude sur la valeur des termes qu'on rejette. Quant à la formule de Legendre, son degré d'approximation n'est connu que dans les limites des Tables des nombres premiers dont on se sert pour la vérifier.

§ II.

Convenons de désigner, en général, par $\theta(z)$ la somme des logarithmes (hyperboliques) de tous les nombres premiers qui ne surpassent pas z. Cette fonction devient égale à zéro dans le cas où z est inférieur au plus petit des nombres premiers, savoir à 2. Nous aurons souvent à l'écrire en prenant pour z une quantité composée, telle que $\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ par exemple; alors nous écrirons simplement $\theta\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ au lieu de $\theta\left[\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$. Il n'est pas difficile de s'assurer que la fonction θ vérifie l'équation suivante :

$$\left.\begin{array}{l}
\theta(x) + \theta(x)^{\frac{1}{2}} + \theta(x)^{\frac{1}{3}} + \theta(x)^{\frac{1}{4}} + \ldots \\
+ \theta\left(\frac{x}{2}\right) + \theta\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + \theta\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + \theta\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{4}} + \ldots \\
+ \theta\left(\frac{x}{3}\right) + \theta\left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{2}} + \theta\left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{3}} + \theta\left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{4}} + \ldots \\
+ \theta\left(\frac{x}{4}\right) + \theta\left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{2}} + \theta\left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{3}} + \theta\left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{4}} + \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} = \log 1.2.3\ldots[x],$$

où nous employons $[x]$ pour désigner le plus grand nombre entier contenu dans la valeur de x. Les séries que cette équation contient, sont prolongées jusqu'aux termes qui deviennent zéro.

Pour vérifier cette équation, nous remarquons que ses deux membres sont composés de termes de la forme $K \log \alpha$, où α est un nombre premier, et K un entier quelconque. Dans le premier

membre. K sera égal au nombre des termes dans les séries

$$
(1)\quad \left\{
\begin{array}{llll}
x, & \frac{x}{2}, & \frac{x}{3}, & \frac{x}{4}, \ldots, \\
(x)^{\frac{1}{2}}, & \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, & \left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{2}}, & \left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{2}}, \ldots, \\
(x)^{\frac{1}{3}}, & \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, & \left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{3}}, & \left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{3}}, \ldots, \\
(x)^{\frac{1}{4}}, & \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{4}}, & \left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{4}}, & \left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{4}}, \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}
\right.
$$

qui ne sont pas plus petits que α; car, en général, la valeur de $\delta(z)$ ne contient le terme $\log \alpha$ que dans le cas ou $z \leqq \alpha$. Quant au coefficient de $\log \alpha$ dans le second membre, il est égal à la plus haute puissance de α, qui divise $1.2.3\ldots[x]$. Or il se trouve que cette puissance est aussi égale au nombre des termes des séries (1) qui ne sont pas plus petits que α; car le nombre des termes de la série

$$x, \quad \frac{x}{2}, \quad \frac{x}{3}, \quad \frac{x}{4}, \ldots,$$

qui ne sont pas plus petits que α, est égal à celui des termes de la série

$$1, \quad 2, \quad 3, \ldots, \quad [x],$$

qui sont divisibles par α.

Le même rapport existe entre le nombre des termes de cette série divisibles par α^2, α^3, α^4, etc., et le nombre des termes des séries

$$
\left\{
\begin{array}{llll}
(x)^{\frac{1}{2}}, & \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, & \left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{2}}, & \left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{2}}, \ldots, \\
(x)^{\frac{1}{3}}, & \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, & \left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{3}}, & \left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{3}}, \ldots, \\
(x)^{\frac{1}{4}}, & \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{4}}, & \left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{4}}, & \left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{4}}, \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}
\right.
$$

qui ne sont pas plus petits que α

Donc, les deux nombres de notre équation sont composés des mêmes termes, ce qui prouve son identité.

L'équation que nous venons de démontrer peut être présentée sous cette forme

$$(2)\qquad \psi(x) + \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{x}{3}\right) + \psi\left(\frac{x}{4}\right) + \ldots = \mathrm{T}(x).$$

en faisant, pour abréger,

$$(3)\qquad \begin{cases} \theta(z) + \theta(z)^{\frac{1}{2}} + \theta(z)^{\frac{1}{3}} + \theta(z)^{\frac{1}{4}} + \ldots = \psi(z), \\ \log 1.2.3\ldots[x] = \mathrm{T}(x). \end{cases}$$

En passant à l'application de ces formules, nous remarquerons que, d'après ce que nous avons dit par rapport à la valeur de $\theta(z)$ quand z est inférieur à 2, la fonction $\psi(z)$ devient zéro quand on fait $z < 2$, et, par conséquent, l'équation (2) ne présentera aucune exception dans les limites

$$x = 0, \quad x = 2,$$

si l'on prend zéro pour la valeur de $\mathrm{T}(x)$ quand x est inférieur à 2.

§ III.

D'après cette équation, il n'est pas difficile de trouver plusieurs inégalités que la fonction $\psi(x)$ vérifie. Celles dont nous nous servirons dans ce Mémoire sont les suivantes :

$$\psi(x) > \mathrm{T}(x) + \mathrm{T}\left(\frac{x}{30}\right) - \mathrm{T}\left(\frac{x}{2}\right) - \mathrm{T}\left(\frac{x}{3}\right) - \mathrm{T}\left(\frac{x}{5}\right),$$

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{6}\right) < \mathrm{T}(x) + \mathrm{T}\left(\frac{x}{30}\right) - \mathrm{T}\left(\frac{x}{2}\right) - \mathrm{T}\left(\frac{x}{3}\right) - \mathrm{T}\left(\frac{x}{5}\right).$$

Pour prouver ces inégalités, nous cherchons d'après l'équation (2) la valeur de

$$\mathrm{T}(x) + \mathrm{T}\left(\frac{x}{30}\right) - \mathrm{T}\left(\frac{x}{2}\right) - \mathrm{T}\left(\frac{x}{3}\right) - \mathrm{T}\left(\frac{x}{5}\right),$$

ce qui nous conduit à cette équation

$$
(4)\quad \left\{\begin{aligned}
&\psi(x)+\psi\left(\frac{x}{2}\right)+\psi\left(\frac{x}{3}\right)+\psi\left(\frac{x}{4}\right)+\ldots\\
&+\psi\left(\frac{x}{30}\right)+\psi\left(\frac{x}{2.30}\right)+\psi\left(\frac{x}{3.30}\right)+\psi\left(\frac{x}{4.30}\right)+\ldots\\
&-\psi\left(\frac{x}{2}\right)-\psi\left(\frac{x}{2.2}\right)-\psi\left(\frac{x}{3.2}\right)-\psi\left(\frac{x}{4.2}\right)-\ldots\\
&-\psi\left(\frac{x}{3}\right)-\psi\left(\frac{x}{2.3}\right)-\psi\left(\frac{x}{3.3}\right)-\psi\left(\frac{x}{4.3}\right)-\ldots\\
&-\psi\left(\frac{x}{5}\right)-\psi\left(\frac{x}{2.5}\right)-\psi\left(\frac{x}{3.5}\right)-\psi\left(\frac{x}{4.5}\right)-\ldots\\
&=\mathrm{T}(x)+\mathrm{T}\left(\frac{x}{30}\right)-\mathrm{T}\left(\frac{x}{2}\right)-\mathrm{T}\left(\frac{x}{3}\right)-\mathrm{T}\left(\frac{x}{5}\right),
\end{aligned}\right.
$$

dont le premier membre se réduit à

$$
A_1\psi(x)-A_2\psi\left(\frac{x}{2}\right)+A_3\psi\left(\frac{x}{3}\right)-A_4\psi\left(\frac{x}{4}\right)+\ldots+A_n\psi\left(\frac{x}{n}\right)+\ldots,
$$

A_1, A_2, A_3, A_4,..., A_n, etc., étant des coefficients numériques. Or, en examinant la valeur de ces coefficients, il n'est pas difficile de s'assurer qu'en général

$$
\begin{aligned}
&A_n=1, && \text{si } n=30m+1,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,\\
&A_n=0, && \text{si } n=30m+2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 8,\ 9,\ 14,\ 16,\\
& && \qquad 21,\ 22,\ 25,\ 26,\ 27,\ 28.\\
&A_n=-1, && \text{si } n=30m+6,\ 10,\ 12,\ 15,\ 18,\ 20,\ 24,\\
&A_n=-1, && \text{si } n=30m-30.
\end{aligned}
$$

En effet, dans le premier cas, n n'étant divisible par aucun des nombres 2, 3, 5, on ne trouve le terme $\psi\left(\frac{x}{n}\right)$ que dans la première ligne de l'équation (4). Dans le second cas, n est divisible par un des nombres 2, 3, 5; donc, outre le terme $\psi\left(\frac{x}{n}\right)$ de la première ligne, l'une des

trois dernieres contiendra $-\psi\left(\frac{x}{n}\right)$, et, après la réduction, on trouvera 0 pour coefficient de $\psi\left(\frac{x}{n}\right)$. Dans le troisième cas, n est divisible par deux des nombres 2, 3, 5. Donc les trois dernières lignes de l'équation (4) contiendront deux termes égaux à $-\psi\left(\frac{x}{n}\right)$, et comme la première ligne contient $\psi\left(\frac{x}{n}\right)$, pris positivement, il ne reste dans le résultat que $-\psi\left(\frac{x}{n}\right)$. On arrive à la même conclusion dans le dernier cas, où n est divisible par 30; car alors le terme $\pm\psi\left(\frac{x}{n}\right)$ se rencontre dans toutes les cinq lignes, deux fois avec le signe $+$ et trois fois avec le signe $-$.

Donc, pour

$$\begin{aligned} n = 30m + {} & 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \\ & 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, \\ & 25, 26, 27, 28, 29, 30, \end{aligned}$$

nous trouvons

$$\begin{aligned} \lambda_n = {} & 1, 0, 0, 0, 0, -1, 1, 0, 0, -1, 1, -1, 1, 0, -1, \\ & 0, 1, -1, 1, -1, 0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0, 1, -1, \end{aligned}$$

ce qui prouve que l'équation (4) se réduit à

$$\begin{aligned} & \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{6}\right) + \psi\left(\frac{x}{7}\right) - \psi\left(\frac{x}{10}\right) + \psi\left(\frac{x}{11}\right) - \psi\left(\frac{x}{12}\right) + \ldots \\ & = \mathrm{T}(x) + \mathrm{T}\left(\frac{x}{30}\right) - \mathrm{T}\left(\frac{x}{2}\right) - \mathrm{T}\left(\frac{x}{3}\right) - \mathrm{T}\left(\frac{x}{5}\right), \end{aligned}$$

où tous les termes du premier membre ont pour coefficient 1, alternativement avec le signe $+$ et $-$. De plus, comme d'après la nature de la fonction $\psi(x)$, la série

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{6}\right) + \psi\left(\frac{x}{7}\right) - \psi\left(\frac{x}{10}\right) + \psi\left(\frac{x}{11}\right) - \psi\left(\frac{x}{12}\right) + \ldots$$

est décroissante, sa valeur sera comprise entre les limites $\psi(x)$ et

$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{6}\right)$. Donc, d'après l'équation précédente, on aura nécessairement

$$\psi(x) \geqq T(x) - T\left(\frac{x}{30}\right) - T\left(\frac{x}{2}\right) - T\left(\frac{x}{3}\right) - T\left(\frac{x}{5}\right),$$

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{6}\right) \leqq T(x) + T\left(\frac{x}{30}\right) - T\left(\frac{x}{2}\right) - T\left(\frac{x}{3}\right) - T\left(\frac{x}{5}\right).$$

§ IV.

Examinons maintenant la fonction $T(x)$ qui entre dans ces formules. D'après l'équation (3), et en dénotant par a le plus grand nombre entier contenu dans la valeur de x, que nous ne supposons pas inférieure à 1, nous avons

$$T(x) = \log. 1.2.3\ldots a.$$

ou, ce qui revient au même,

$$T(x) = \log 1.2.3.a(a+1) - \log(a+1).$$

Or, on sait que

$$\log 1.2.3\ldots a < \log\sqrt{2\pi} + a\log a - a + \frac{1}{2}\log a + \frac{1}{12a},$$

$$\log 1.2.3\ldots a(a+1) > \log\sqrt{2\pi} + (a+1)\log(a+1)$$
$$- (a+1) + \frac{1}{2}\log(a+1);$$

donc

$$T(x) < \log\sqrt{2\pi} + a\log a - a + \frac{1}{2}\log a + \frac{1}{12a},$$

$$T(x) > \log\sqrt{2\pi} + (a+1)\log(a+1) - (a+1) + \frac{1}{2}\log(a+1).$$

et, par conséquent,

$$T(x) < \log\sqrt{2\pi} + x\log x - x + \frac{1}{2}\log x + \frac{1}{12},$$

$$T(x) > \log\sqrt{2\pi} + x\log x - x + \frac{1}{2}\log x;$$

car, a étant le plus grand nombre entier contenu dans la valeur de x,

que nous ne supposons pas inférieure à 1, nous trouvons

$$a \leqq x > a + 1, \quad a \geqq 1,$$

ce qui entraîne évidemment les conditions

$$x \log x - x + \frac{1}{2} \log x + \frac{1}{12} \geqq a \log a - a + \frac{1}{2} \log a - \frac{1}{12a}.$$

$$x \log x - x - \frac{1}{2} \log x \leqq (a+1) \log (a+1) - (a+1) - \frac{1}{2} \log (a+1).$$

Les inégalités que nous venons de prouver par rapport à $T(x)$ nous donnent

$$T(x) + T\left(\frac{x}{30}\right) < 2 \log \sqrt{2\pi} + \frac{2}{12} + \frac{31}{30} x \log x - \log 30^{\frac{1}{30}} \cdot x$$
$$- \frac{31}{30} x + \log x - \frac{1}{2} \log 30,$$

$$T(x) + T\left(\frac{x}{30}\right) > 2 \log \sqrt{2\pi} + \frac{31}{30} x \log x - \log^{\frac{1}{30}} \cdot x$$
$$- \frac{31}{30} x - \log x + \frac{1}{2} \log 30.$$

$$T\left(\frac{x}{2}\right) + T\left(\frac{x}{3}\right) + T\left(\frac{x}{5}\right) < 3 \log \sqrt{2\pi} + \frac{3}{12} + \frac{31}{30} x \log x$$
$$- \log 2^{\frac{1}{2}} 3^{\frac{1}{3}} 5^{\frac{1}{5}} \cdot x - \frac{31}{30} x + \frac{3}{2} \log x - \frac{1}{2} \log 30.$$

$$T\left(\frac{x}{2}\right) + T\left(\frac{x}{3}\right) + T\left(\frac{x}{5}\right) > 3 \log \sqrt{2\pi} + \frac{31}{30} x \log x$$
$$- \log 2^{\frac{1}{2}} 3^{\frac{1}{3}} 5^{\frac{1}{5}} \cdot x - \frac{31}{30} x - \frac{3}{2} \log x + \frac{1}{2} \log 30.$$

Combinant ces inégalités par voie de soustraction, savoir : la première avec la dernière, la seconde avec la troisième, nous trouverons

$$T(x) + T\left(\frac{x}{30}\right) - T\left(\frac{x}{2}\right) - T\left(\frac{x}{3}\right) - T\left(\frac{x}{5}\right) < \log \frac{2^{\frac{1}{2}} 3^{\frac{1}{3}} 5^{\frac{1}{5}}}{30^{\frac{1}{30}}} \cdot x$$
$$+ \frac{5}{2} \log x - \frac{1}{2} \log 1800\pi + \frac{2}{12},$$

$$T(x) + T\left(\frac{x}{30}\right) - T\left(\frac{x}{2}\right) - T\left(\frac{x}{3}\right) - T\left(\frac{x}{5}\right) > \log \frac{2^{\frac{1}{2}} 3^{\frac{1}{3}} 5^{\frac{1}{5}}}{30^{\frac{1}{30}}} \cdot x$$

$$- \frac{5}{2} \log x + \frac{1}{2} \log \frac{450}{\pi} - \frac{3}{12},$$

ce que nous écrirons sous la forme

$$T(x) - T\left(\frac{x}{30}\right) - T\left(\frac{x}{2}\right) - T\left(\frac{x}{3}\right) - T\left(\frac{x}{5}\right) < Ax + \frac{5}{2} \log x$$

$$- \frac{1}{2} \log 1800\pi + \frac{2}{12}.$$

$$T(x) - T\left(\frac{x}{30}\right) - T\left(\frac{x}{2}\right) - T\left(\frac{x}{3}\right) - T\left(\frac{x}{5}\right) > Ax - \frac{5}{2} \log x$$

$$+ \frac{1}{2} \log \frac{450}{\pi} - \frac{3}{12}.$$

en faisant, pour abréger,

$$A = \log \frac{2^{\frac{1}{2}} 3^{\frac{1}{3}} 5^{\frac{1}{5}}}{30^{\frac{1}{30}}} = 0.92129202.$$

L'analyse que nous avons employée pour démontrer ces inégalités suppose $x \geqq 30$; car, en traitant $T(x)$, nous avons pris $x \geqq 1$, puis nous avons remplacé x par

$$\frac{x}{2}, \quad \frac{x}{3}, \quad \frac{x}{5} \quad \text{et} \quad \frac{x}{30}.$$

Mais il n'est pas difficile de s'assurer qu'on aura des formules applicables à toutes les valeurs de x plus grandes que 1, si l'on remplace les inégalités précédentes par celles-ci, plus simples,

$$T(x) - T\left(\frac{x}{30}\right) - T\left(\frac{x}{2}\right) - T\left(\frac{x}{3}\right) - T\left(\frac{x}{5}\right) < Ax + \frac{5}{2} \log x,$$

$$T(x) - T\left(\frac{x}{30}\right) - T\left(\frac{x}{2}\right) - T\left(\frac{x}{3}\right) - T\left(\frac{x}{5}\right) > Ax - \frac{5}{2} \log x - 1;$$

car, en examinant ces inégalités pour les valeurs de x prises dans les limites 1 et 30, on reconnaîtra très-aisément qu'elles ne présentent aucune exception.

§ V.

En combinant ces inégalités avec celles que nous avons déduites plus haut par rapport à $\psi(x)$ (§ III), nous parvenons à ces deux formules,

$$\psi(x) > Ax - \frac{5}{2}\log x - 1, \quad \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{6}\right) < Ax + \frac{5}{2}\log x,$$

dont la premiere nous donne une valeur qui reste inférieure à $\psi(x)$. Quant à la seconde, elle nous servira pour assigner l'autre limite de $\psi(x)$. Pour y parvenir, nous remarquons que

$$fx = \frac{6}{5}Ax + \frac{5}{4\log 6}\log^2 x + \frac{5}{4}\log x$$

est une fonction qui vérifie l'équation

$$f(x) - f\left(\frac{x}{6}\right) = Ax + \frac{5}{2}\log x.$$

Or cette équation, retranchée de l'inégalité

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{6}\right) < Ax + \frac{5}{2}\log x,$$

donne

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{6}\right) - f(x) + f\left(\frac{x}{6}\right) < 0,$$

ou bien, ce qui revient au même,

$$\psi(x) - f(x) < \psi\left(\frac{x}{6}\right) - f\left(\frac{x}{6}\right).$$

En changeant successivement dans cette formule x en $\frac{x}{6}, \frac{x}{6^2}, \ldots, \frac{x}{6^m}$, nous trouverons

$$\psi(x) - f(x) < \psi\left(\frac{x}{6}\right) - f\left(\frac{x}{6}\right) < \psi\left(\frac{x}{6^2}\right) - f\left(\frac{x}{6^2}\right) \cdots$$
$$< \psi\left(\frac{x}{6^{m+1}}\right) - f\left(\frac{x}{6^{m+1}}\right).$$

Si nous supposons actuellement que m soit le plus grand nombre

entier qui vérifie la condition $\frac{x}{6^m} \geqq 1$, la quantité $\frac{x}{6^{m+1}}$ tombera entre 1 et $\frac{1}{6}$, et, en examinant la valeur que prend $\psi(z) - f(z)$ dans les limites $z = 1$, $z = \frac{1}{6}$, on reconnaîtra que $\psi(z) = 0$, et que $-f(z)$ reste au-dessous de 1. Donc

$$\psi\left(\frac{x}{6^{m+1}}\right) - f\left(\frac{x}{6^{m+1}}\right) < 1,$$

et, d'après les inégalités précédentes,

$$\psi(x) - f(x) < 1.$$

Enfin, en substituant pour $f(x)$ sa valeur, nous aurons

$$\psi(x) < \frac{6}{5} A x + \frac{5}{4 \log 6} \log^2 x + \frac{5}{4} \log x + 1.$$

D'après les formules que nous venons de trouver, il ne sera pas difficile d'assigner deux limites entre lesquelles tombe la valeur de $\varsigma(x)$, c'est-à-dire la somme des logarithmes de tous les nombres premiers qui ne surpassent pas x.

En effet, d'après la formule (3), nous trouvons

$$\psi(x) - \psi(\sqrt{x}) = \varsigma(x) - \varsigma(x)^{\frac{1}{2}} + \varsigma(x)^{\frac{1}{3}} + \ldots,$$

$$\psi(x) - 2\psi(\sqrt{x}) = \varsigma(x) - \left[\varsigma(x)^{\frac{1}{2}} - \varsigma(x)^{\frac{1}{3}}\right] - \left[\varsigma(x)^{\frac{1}{4}} - \varsigma(x)^{\frac{1}{5}}\right] - \ldots,$$

ce qui prouve que

$$\varsigma(x) \leqq \psi(x) - \psi(\sqrt{x}), \quad \varsigma(x) \leqq \psi(x) - 2\psi(\sqrt{x}),$$

car les termes

$$\varsigma(x)^{\frac{1}{2}} - \varsigma(x)^{\frac{1}{3}}, \ldots, \quad \varsigma(x)^{\frac{1}{3}} - \varsigma(x)^{\frac{1}{4}}, \quad \varsigma(x)^{\frac{1}{4}} - \varsigma(x)^{\frac{1}{5}}, \ldots$$

sont évidemment positifs ou zéro.

Mais nous venons de trouver

$$\psi(x) < \frac{6}{5} A x + \frac{5}{4 \log 6} \log^2 x + \frac{5}{4} \log x + 1,$$

$$\psi(x) > A x - \frac{5}{2} \log x - 1,$$

ce qui donne

$$\psi(\sqrt{x}) < \frac{6}{5} A x^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{16 \log 6} \log^2 x + \frac{5}{8} \log x - 1,$$

$$\psi(\sqrt{x}) > A x^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{4} \log x - 1,$$

et, par conséquent,

$$\psi(x) - \psi(\sqrt{x}) < \frac{6}{5} A x - A x^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{4 \log 6} \log^2 x + \frac{5}{2} \log x + 2,$$

$$\psi(x) - 2\psi(\sqrt{x}) > A x - \frac{12}{5} A x^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{8 \log 6} \log^2 x - \frac{15}{4} \log x - 3.$$

Donc, d'après la formule (6),

$$(7) \quad \begin{cases} \varsigma(x) < \frac{6}{5} A x - A x^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{4 \log 6} \log^2 x + \frac{5}{2} \log x + 2, \\ \varsigma(x) > A x - \frac{12}{5} A x^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{8 \log 6} \log^2 x - \frac{15}{4} \log x - 3. \end{cases}$$

Ainsi, nous arrivons à la conséquence, que la somme des logarithmes de tous les nombres premiers qui ne surpassent pas x est comprise dans les limites

$$\frac{6}{5} A x - A x^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{4 \log 6} \log^2 x + \frac{5}{2} \log x + 2,$$

$$A x - \frac{12}{5} A x^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{8 \log 6} \log^2 x - \frac{15}{4} \log x - 3.$$

§ VI.

Voyons maintenant ce qu'on peut tirer de ces formules sur la totalité des nombres premiers compris dans des limites données. Soient L et l les deux limites en question, et supposons qu'il y ait m nombres premiers plus grands que l et ne surpassant pas L : la somme des logarithmes de ces nombres sera comprise dans les limites $m \log l$, $m \log L$. Donc, d'après la notation que nous employons, on aura

$$\varsigma(L) - \varsigma(l) > m \log l,$$

$$\varsigma(L) - \varsigma(l) < m \log L.$$

et, par conséquent,

$$m < \frac{\theta(\mathrm{L}) - \theta(l)}{\log l}, \quad m > \frac{\theta(\mathrm{L}) - \theta(l)}{\log \mathrm{L}}.$$

Mais, d'après la formule (7), nous trouvons que la valeur $\theta(\mathrm{L}) - \theta(l)$ est inférieure à

$$\mathrm{A}\left(\frac{6}{5}\mathrm{L} - l\right) - \mathrm{A}\left(\mathrm{L}^{\frac{1}{2}} - \frac{12}{5}l^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{5}{8\log 6}(2\log^2 \mathrm{L} + \log^2 l)$$
$$+ \frac{5}{4}(2\log \mathrm{L} + 3\log l) + 5,$$

et surpasse

$$\mathrm{A}\left(\mathrm{L} - \frac{6}{5}l\right) - \mathrm{A}\left(\frac{12}{5}\mathrm{L}^{\frac{1}{2}} - l^{\frac{1}{2}}\right) - \frac{5}{8\log 6}(\log^2 \mathrm{L} + \log^2 l$$
$$- \frac{5}{4}(3\log \mathrm{L} + 2\log l) - 5.$$

Donc

$$m < \frac{\mathrm{A}\left(\frac{6}{5}\mathrm{L} - l\right) - \mathrm{A}\left(\mathrm{L}^{\frac{1}{2}} - \frac{12}{5}l^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{5}{8\log 6}(2\log^2 \mathrm{L} + \log^2 l) + \frac{5}{4}(2\log \mathrm{L} + 3\log l) + 5}{\log l}.$$

$$m > \frac{\mathrm{A}\left(\mathrm{L} - \frac{6}{5}l\right) - \mathrm{A}\left(\frac{12}{5}\mathrm{L}^{\frac{1}{2}} - l^{\frac{1}{2}}\right) - \frac{5}{8\log 6}(\log^2 \mathrm{L} + 2\log^2 l) - \frac{5}{4}(3\log \mathrm{L} + 2\log l) - 5}{\log \mathrm{L}}.$$

Ainsi, nous trouvons deux limites entre lesquelles tombe la quantité m, qui désigne combien il y a de nombres premiers plus grands que l, mais qui ne surpassent pas L. La dernière de ces formules nous prouve que, dans les limites l et L, on trouve plus de k nombres premiers, si k, L et l vérifient cette condition

$$k < \frac{\mathrm{A}\left(\mathrm{L} - \frac{6}{5}l\right) - \mathrm{A}\left(\frac{12}{5}\mathrm{L}^{\frac{1}{2}} - l^{\frac{1}{2}}\right) - \frac{5}{8\log 6}(\log^2 \mathrm{L} + 2\log^2 l) - \frac{5}{4}(3\log \mathrm{L} + 2\log l) - 5}{\log \mathrm{L}}.$$

et comme $l < \mathrm{L}$, on vérifie cette condition en faisant

$$k = \frac{\mathrm{A}\left(\mathrm{L} - \frac{6}{5}l\right) - \frac{12}{5}\mathrm{A}\mathrm{L}^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{8\log 6}(\log^2 \mathrm{L} + 2\log^2 \mathrm{L}) - \frac{5}{4}(3\log \mathrm{L} + 2\log \mathrm{L}) - 5}{\log \mathrm{L}}.$$

et, par conséquent, en prenant

$$l = \frac{5}{6}\mathrm{L} - 2\mathrm{L}^{\frac{1}{2}} - \frac{25\log \mathrm{L}}{16\log 6.\mathrm{A}} - \frac{5}{6\mathrm{A}}\left(\frac{25}{4} + k\right)\log \mathrm{L} - \frac{25}{6\mathrm{A}}.$$

Donc, si l'on prend cette valeur de l, on est sûr de trouver plus de k nombres premiers dans les limites l et L. Il faut y joindre encore la condition que l et L ne sont pas plus petits que 1, ce que nous avons supposé par rapport à x, en traitant la fonction $\theta(x)$.

Dans le cas particulier de $k = 0$, nous concluons qu'il y a nécessairement un nombre premier compris dans les limites l et L, si l'on prend

$$l = \frac{5}{6}\mathrm{L} - 2\mathrm{L}^{\frac{1}{2}} - \frac{25\log^2\mathrm{L}}{16\log 6.\mathrm{A}} - \frac{125\log\mathrm{L}}{24\mathrm{A}} - \frac{25}{6\mathrm{A}}.$$

Ceci nous conduit très-simplement à prouver rigoureusement le *postulatum* cité de M. Bertrand. Il n'est pas difficile de s'assurer que les limites a et $2a - 2$, dans le cas de $a > 160$, comprennent ces deux limites

$$l = \frac{5}{6}\mathrm{L} - 2\mathrm{L}^{\frac{1}{2}} - \frac{25\log^2\mathrm{L}}{16\log 6.\mathrm{A}} - \frac{125\log\mathrm{L}}{24\mathrm{A}} - \frac{25}{6\mathrm{A}}, \quad \mathrm{L},$$

L étant une valeur convenablement choisie. En effet, pour que ces limites tombent entre

$$a, \quad 2a - 2,$$

on n'a qu'à vérifier ces conditions,

$$2a - 2 > \mathrm{L},$$

$$a < \frac{5}{6}\mathrm{L} - 2\mathrm{L}^{\frac{1}{2}} - \frac{25\log^2\mathrm{L}}{16\log 6.\mathrm{A}} - \frac{125\log\mathrm{L}}{24\mathrm{A}} - \frac{25}{6\mathrm{A}}.$$

Or on vérifie évidemment la première en prenant $\mathrm{L} = 2a - 3$. Quant à la seconde, elle devient, pour $\mathrm{L} = 2a - 3$,

$$a < \frac{5}{6}(2a - 3) - 2\sqrt{2a - 3} - \frac{25\log^2(2a - 3)}{16\log 6.\mathrm{A}} - \frac{125\log(2a - 3)}{24\mathrm{A}} - \frac{25}{6\mathrm{A}},$$

ce qui est juste pour toutes les valeurs de a, qui surpassent la plus grande racine de l'équation

$$x = \frac{5}{6}(2x - 3) - 2\sqrt{2x - 3} - \frac{25\log^2(2x - 3)}{16\log 6.\mathrm{A}} - \frac{125\log(2x - 3)}{24\mathrm{A}} - \frac{25}{6\mathrm{A}},$$

et cette racine, nous la trouvons comprise entre les limites 159 et 160.

Donc, toutes les fois que a surpasse 160, on peut assigner entre a et $2a-2$ deux nouvelles limites

$$l = \frac{5}{6}L - \frac{1}{6}L^{\frac{1}{2}} - \frac{25\log^2 L}{16\log 6 . A} - \frac{125\log L}{24 A} - \frac{25}{6A} . L.$$

et comme celles-ci comprennent nécessairement un nombre premier, on sera certain de trouver un nombre premier, qui surpasse a et reste inférieur à $2a-2$, ce qui prouve le *postulatum* de M. Bertrand pour toutes les valeurs de a qui surpassent 160. Quant aux valeurs de a qui ne sont pas plus grandes que 160, ce *postulatum* se vérifie directement à l'aide des Tables des nombres premiers.

§ VII.

Au moyen de la fonction $\theta(x)$ que nous employons pour désigner la somme des logarithmes de tous les nombres premiers qui ne surpassent pas x, on peut facilement exprimer la somme

$$F(\alpha) + F(\beta) + F(\gamma) + \ldots + F(\rho) = U,$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \rho$ sont les nombres premiers compris dans les limites données. En effet, si $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \rho$ sont compris dans les limites l et L, cette somme peut être exprimée ainsi

$$\frac{\theta(l) - \theta(l-1)}{\log l} F(l) + \frac{\theta(l+1) - \theta(l)}{\log(l+1)} F(l+1)$$
$$+ \frac{\theta(l+2) - \theta(l+1)}{\log(l+2)} F(l+2) + \ldots + \frac{\theta(L) - \theta(L-1)}{\log L} F(L);$$

car, en général, la fonction $\frac{\theta(x) - \theta(x-1)}{\log x}$, pour x entier, se réduit à 0 si x est un nombre composé, et à 1 si x est un nombre premier. Donc

$$U = \frac{\theta(l) - \theta(l-1)}{\log l} F(l) + \frac{\theta(l+1) - \theta(l)}{\log(l+1)} F(l+1)$$
$$+ \frac{\theta(l+2) - \theta(l+1)}{\log(l+2)} F(l+1) + \ldots + \frac{\theta(L) - \theta(L-1)}{\log L} F(L).$$

ou, ce qui revient au même,

$$\begin{aligned} U = &- \mathcal{S}(l-1)\frac{F(l)}{\log l} + \left[\frac{F(l)}{\log l} - \frac{F(l+1)}{\log(l+1)}\right]\mathcal{S}(l) \\ &+ \left[\frac{F(l+1)}{\log(l+1)} - \frac{F(l+2)}{\log(l+2)}\right]\mathcal{S}(l+1) + \ldots \\ &+ \left[\frac{F(L)}{\log L} - \frac{F(L+1)}{\log(L+1)}\right]\mathcal{S}(L) + \frac{F(L+1)}{\log(L+1)}\mathcal{S}(L). \end{aligned}$$

Or, si nous supposons que la fonction $\frac{F(x)}{\log x}$, dans les limites $x = l - 1$ et $x = L + 1$, reste constamment positive et décroissante, le signe de $\mathcal{S}(l-1)$ dans l'expression de U sera $-$, et le signe de chacune des fonctions

$$\mathcal{S}(l), \quad \mathcal{S}(l+1), \ldots, \quad \mathcal{S}(L)$$

sera $-$. Par conséquent, d'après les inégalités (7), et en faisant, pour abréger,

$$(8)\quad \begin{cases} \mathcal{S}_1(x) = \frac{6}{5}Ax - Ax^{\frac{2}{3}} + \frac{5}{4\log 6}\log^2 x + \frac{5}{2}\log x + 2, \\ \mathcal{S}_2(x) = Ax - \frac{12}{5}Ax^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{8\log 6}\log^2 x - \frac{15}{4}\log x - 3, \end{cases}$$

nous aurons une valeur inférieure à U, si, dans son expression, nous remplaçons $\mathcal{S}(l-1)$ par $\mathcal{S}_1(l-1)$, et $\mathcal{S}(l), \mathcal{S}(l+1), \ldots, \mathcal{S}(L)$ par $\mathcal{S}_2(l), \mathcal{S}_2(l-1), \ldots, \mathcal{S}_2(L)$. Au contraire, en remplaçant $\mathcal{S}(l-1)$ par $\mathcal{S}_2(l-1)$, et $\mathcal{S}(l), \mathcal{S}(l+1), \ldots, \mathcal{S}(L)$ par $\mathcal{S}_1(l), \mathcal{S}_1(l+1), \ldots, \mathcal{S}_1(L)$, nous trouverons une valeur plus grande que U. Donc

$$\begin{aligned} U > &- \mathcal{S}_1(l-1)\frac{F(l)}{\log l} + \left[\frac{F(l)}{\log l} - \frac{F(l+1)}{\log(l+1)}\right]\mathcal{S}_2(l) \\ &- \left[\frac{F(l+1)}{\log(l+1)} - \frac{F(l+2)}{\log(l+2)}\right]\mathcal{S}_2(l+1) + \ldots \\ &+ \left[\frac{F(L)}{\log L} - \frac{F(L+1)}{\log(L+1)}\right]\mathcal{S}_2(L) + \frac{F(L+1)}{\log(L+1)}\mathcal{S}_2(L). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U < &- \mathcal{S}_2(l-1)\frac{F(l)}{\log l} + \left[\frac{F(l)}{\log l} - \frac{F(l+1)}{\log(l+1)}\right]\mathcal{S}_1(l) \\ &+ \left[\frac{F(l+1)}{\log(l+1)} - \frac{F(l+2)}{\log(l+2)}\right]\mathcal{S}_1(l+1) + \ldots \\ &+ \left[\frac{F(L)}{\log L} - \frac{F(L+1)}{\log(L+1)}\right]\mathcal{S}_1(L) + \frac{F(L+1)}{\log(L+1)}\mathcal{S}_1(L). \end{aligned}$$

et comme les seconds membres sont identiques avec les sommes

$$\theta_2(l-1)\frac{F(l)}{\log l} - \theta_1(l-1)\frac{F(l)}{\log l} + \sum_{x=l}^{x=L} F(x)\frac{\theta_2(x)-\theta_2(x-1)}{\log x},$$

$$\theta_1(l-1)\frac{F(l)}{\log l} - \theta_2(l-1)\frac{F(l)}{\log l} + \sum_{x=l}^{x=L} F(x)\frac{\theta_1(x)-\theta_1(x-1)}{\log x},$$

nous en conclurons

$$(9)\begin{cases} U > \theta_2(l-1)\dfrac{F(l)}{\log l} - \theta_1(l-1)\dfrac{F(l)}{\log l} + \displaystyle\sum_{x=l}^{x=L} F(x)\dfrac{\theta_2(x)-\theta_2(x-1)}{\log x}, \\ U < \theta_1(l-1)\dfrac{F(l)}{\log l} - \theta_2(l-1)\dfrac{F(l)}{\log l} + \displaystyle\sum_{x=l}^{x=L} F(x)\dfrac{\theta_1(x)-\theta_1(x-1)}{\log x}. \end{cases}$$

D'apres les formules que nous venons de trouver, il n'est pas difficile de démontrer ce théorème :

THÉORÈME. *Si la fonction* $F(x)$, *passé une certaine limite de* x, *reste positive, la convergence de la série*

$$\frac{F(2)}{\log 2} + \frac{F(3)}{\log 3} + \frac{F(4)}{\log 4} + \frac{F(5)}{\log 5} + \frac{F(6)}{\log 6} + \ldots$$

est une condition nécessaire et suffisante pour que la série

$$F(2) + F(3) + F(5) + F(7) + F(11) + F(13) + \ldots$$

soit également convergente.

Démonstration. Supposons que l soit la limite de x au-dessus de laquelle $F(x)$ conserve le signe $+$, $\frac{F(x)}{\log x}$ représentant une fonction décroissante, et que $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \rho$ soient des nombres premiers compris dans les limites l et L. En faisant

$$S = F(2) + F(3) + F(5) + \ldots + F(\alpha) + F(\beta) + F(\gamma) + \ldots$$
$$+ F(\rho) = S_0 + F(\alpha) + F(\beta) + F(\gamma) + \ldots + F(\rho),$$

nous conclurons d'après l'équation (9),

$$S > S_0 + \theta_2(l-1)\frac{F(l)}{\log l} - \theta_1(l-1)\frac{F(l)}{\log l} + \sum_{x=l}^{x=L} F(x)\frac{\theta_2(x)-\theta_2(x-1)}{\log x},$$

$$S < S_0 - \theta_1(l-1)\frac{F(l)}{\log l} - \theta_2(l-1)\frac{F(l)}{\log l} + \sum_{x=l}^{x=L} F(x)\frac{\theta_1(x)-\theta_1(x-1)}{\log x}.$$

Ces inégalités font voir que, dans le cas où les expressions

$$\sum_{x=l}^{x=L} F(x)\frac{\theta_2(x)-\theta_2(x-1)}{\log x}, \quad \sum_{x=l}^{x=L} F(x)\frac{\theta_1(x)-\theta_1(x-1)}{\log x},$$

pour $L=\infty$, restent finies, la série

$$F(2)+F(3)+F(5)+F(7)+\ldots$$

sera convergente; au contraire, si la supposition de $L=\infty$ rend la valeur de ces expressions infinies, la série

$$F(2)+F(3)+F(5)+F(7)+\ldots$$

sera divergente.

La substitution des valeurs de $\theta_1(x)$, $\theta_2(x)$ d'après l'équation (8) dans les expressions précédentes les réduit à

$$\sum_{x=l}^{x=L}\left\{\begin{array}{l} A - \frac{12}{5}A(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}) - \frac{5}{8\log 6}[\log^2 x - \log^2(x-1)] \\ -\frac{15}{4}[\log x - \log(x-1)] \end{array}\right\}\frac{F(x)}{\log x},$$

$$\sum_{x=l}^{x=L}\left\{\begin{array}{l} \frac{6}{5}A - A(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}) + \frac{5}{4\log 6}[\log^2 x - \log^2(x-1)] \\ +\frac{5}{2}[\log x - \log(x-1)] \end{array}\right\}\frac{F(x)}{\log x},$$

et comme les fonctions

$$\sqrt{x}-\sqrt{x-1}, \quad \log^2 x - \log^2(x-1), \quad \log x - \log(x-1),$$

pour des valeurs très-grandes de x, deviennent infiniment petites,

nous concluons que dans le cas où

$$\sum_{x=l}^{x=\infty} \frac{F(x)}{\log x}$$

a une valeur finie, les expressions

$$\sum_{x=l}^{x=L} F(x) \frac{\theta_1(x) - \theta_1(x-1)}{\log x}, \quad \sum_{x=l}^{x=L} F(x) \frac{\theta_2(x) - \theta_2(x-1)}{\log x},$$

pour $L = \infty$, seront également finies; au contraire, pour $L = \infty$, elles seront infiniment grandes, si la somme

$$\sum_{x=l}^{x=L} \frac{F(x)}{\log x},$$

avec l'augmentation de L, converge vers l'infini. Mais le premier cas a toujours lieu, si la série

$$\frac{F(2)}{\log 2} + \frac{F(3)}{\log 3} + \frac{F(4)}{\log 4} + \frac{F(5)}{\log 5} + \frac{F(6)}{\log 6} + \ldots$$

est convergente, et le second suppose la divergence de cette série, ce qui prouve le théorème énoncé. Ainsi, nous concluons de là que les séries

$$\frac{1}{2\log 2} + \frac{1}{3\log 3} + \frac{1}{5\log 5} + \frac{1}{7\log 7} + \frac{1}{11\log 11} + \ldots,$$

$$\frac{1}{2\log^2(\log 2)} + \frac{1}{3\log^2(\log 3)} + \frac{1}{5\log^2(\log 5)} + \frac{1}{7\log^2(\log 7)}$$
$$+ \frac{1}{11\log^2(\log 11)} + \ldots$$

sont convergentes, tandis que les deux suivantes

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \ldots,$$

$$\frac{1}{2\log(\log 2)} + \frac{1}{3\log(\log 3)} + \frac{1}{5\log(\log 5)} + \frac{1}{7\log(\log 7)}$$
$$+ \frac{1}{11\log(\log 11)} + \ldots$$

sont divergentes.

§ VIII.

Quand la série

$$F(2) + F(3) + F(5) + F(7) + \ldots$$

est convergente, nous trouverons sa valeur, avec une approximation aussi grande qu'on le voudra, en calculant la somme de ses premiers termes. En dénotant par S_0 la somme de tous les termes qui précèdent $F(\alpha)$, α étant le plus petit des nombres premiers contenus dans la série

$$l, \quad l+1, \quad l+2, \ldots,$$

et l un nombre entier au-dessus duquel toutes les valeurs de x rendent $\frac{F(x)}{\log x}$ positif et décroissant, nous mettrons la série

$$F(2) + F(3) + F(5) + F(7) + F(11) + \ldots = S$$

sous cette forme

$$S = S_0 + F(\alpha) + F(\beta) + F(\gamma) + \ldots = S_0 + U.$$

Cela posé, nous chercherons les limites entre lesquelles tombe U, en faisant $L = \infty$ dans les formules (9). De cette manière, nous trouverons

$$(10)\quad \begin{cases} U > \theta_2(l-1)\dfrac{F(l)}{\log l} - \theta_1(l-1)\dfrac{F(l)}{\log l} + \displaystyle\sum_{x=l}^{x=\infty} \dfrac{\theta_2(x) - \theta_2(x-1)}{\log x} F(x), \\ U < \theta_1(l-1)\dfrac{F(l)}{\log l} - \theta_2(l-1)\dfrac{F(l)}{\log l} + \displaystyle\sum_{x=l}^{x=\infty} \dfrac{\theta_1(x) - \theta_1(x-1)}{\log x} F(x). \end{cases}$$

La demi-somme de ces expressions donnera une valeur approchée de U, et leur demi-différence sera la limite de l'erreur de cette valeur. Cette limite sera d'autant plus petite, que le nombre l et, par conséquent, le nombre de termes de la somme S_0, sera plus considérable.

Pour donner un exemple de ces calculs, nous allons chercher la

valeur approchée de la série

$$S = \frac{1}{2\log 2} + \frac{1}{3\log 3} + \frac{1}{5\log 5} + \frac{1}{7\log 7} + \frac{1}{11\log 11} + \ldots.$$

En prenant

$$l = 100,$$

$$S_0 = \frac{1}{2\log 2} + \frac{1}{3\log 3} + \frac{1}{5\log 5} + \frac{1}{7\log 7} + \frac{1}{11\log 11} + \ldots + \frac{1}{97\log 97},$$

$$S = S_0 + U,$$

U étant déterminé par la série

$$U = \frac{1}{101\log 101} + \frac{1}{103\log 103} + \frac{1}{107\log 107} + \ldots,$$

nous trouverons, par les Tables des nombres premiers,

$$S_0 = 1,42,$$

et les inégalités (10) pour

$$F(x) = \frac{1}{x\log x}, \quad l = 100,$$

nous donneront

$$U > \frac{\theta_2(99)}{100\log^2 100} - \frac{\theta_1(99)}{100\log^2 100} + \sum_{x=100}^{x=\infty} \frac{\theta_2(x) - \theta_2(x-1)}{x\log^2 x} > 0,14,$$

$$U < \frac{\theta_1(99)}{100\log^2 100} - \frac{\theta_2(99)}{100\log^2 100} + \sum_{x=100}^{x=\infty} \frac{\theta_1(x) - \theta_1(x-1)}{x\log^2 x} < 0,28.$$

D'apres ces inégalités, nous concluons que la valeur de U ne diffère de

$$\frac{0,28 + 0,14}{2} = 0,21$$

que d'une quantité plus petite que

$$\frac{0,28 - 0,14}{2} = 0,07.$$

Donc

$$1,42 + 0,21 = 1,63$$

sera la valeur de la série

$$\frac{1}{2\log 2}+\frac{1}{3\log 3}+\frac{1}{5\log 5}+\frac{1}{7\log 7}+\frac{1}{11\log 11}+\ldots,$$

exacte à 0,1 près.

§ IX.

La totalité des nombres premiers, compris dans des limites données, se déduit, comme cas particulier, de la valeur de la série

$$F(\alpha)+F(\beta)+F(\gamma)+\ldots+F(\rho),$$

que nous avons examinée dans les paragraphes précédents. En effet, si l'on prend

$$F(x)=1,$$

la somme

$$F(\alpha)+F(\beta)+F(\gamma)+\ldots+F(\rho)$$

se réduira à autant d'unités qu'il se trouve de termes dans la série des nombres premiers

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ldots,\ \rho.$$

Donc, les formules (9), dans le cas de $F(x)=1$, détermineront les limites entre lesquelles tombe la totalité des nombres premiers, compris entre l et L. Ces limites sont plus étroites que celles que nous avons trouvées dans le § VI, en vertu des inégalités que la fonction $\theta(x)$ vérifie. Dans le cas particulier de $l=2$, nous trouvons que

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{\theta_2(1)}{\log 2}-\dfrac{\theta_1(1)}{\log 2}+\displaystyle\sum_{x=2}^{x=L}\dfrac{\theta_2(x)-\theta_2(x-1)}{\log x}, \\ \dfrac{\theta_1(1)}{\log 2}-\dfrac{\theta_2(1)}{\log 2}+\displaystyle\sum_{x=2}^{x=L}\dfrac{\theta_1(x)-\theta_1(x-1)}{\log x} \end{cases}$$

sont des limites entre lesquelles tombe la totalité des nombres premiers de 2 à L, ou bien, ce qui revient au même, la totalité des

nombres premiers qui ne surpassent pas L. En calculant la demi-somme de ces limites (11), nous aurons une valeur approchée de la totalité des nombres premiers qui ne surpassent pas L. Quant à l'erreur de cette valeur, elle ne pourra surpasser la demi-différence des expressions (11). Par des calculs très-simples, on parvient à connaître que le rapport de la demi-différence des expressions (11) à leur demi-somme devient égal à $\frac{1}{11}$, quand on fait $L = \infty$. Donc, pour de très-grandes valeurs de L, ce rapport sera inférieur à $\frac{1}{10}$, et, par conséquent, si l'on calcule, d'après nos formules, la totalité des nombres premiers qui ne surpassent pas une limite donnée, très-grande, l'erreur sera inférieure à $\frac{1}{10}$ de la quantité cherchée.

THÉORÈME SUR LE RAPPORT ANHARMONIQUE;

PAR J. LIOUVILLE.

Sur une surface quelconque A on peut fixer la position de chaque point m à l'aide de deux coordonnées u et v qui soient les paramètres de deux courbes données d'espèce et se coupant en ce point. Les paramètres u, v sont variables d'un point à un autre; et l'ensemble des points pour lesquels on a toujours $f(u, v) = 0$ forme une ligne dont on dit que $f(u, v) = 0$ est l'équation.

Maintenant il est clair que si, tout en restant sur la surface A, on changeait le système de coordonnées, c'est-à-dire la signification de u, v, et par suite la nature ou la position des courbes (u), (v) dont l'intersection donne le point (u, v), les points répondant aux mêmes valeurs de u, v dans les différents systèmes seraient généralement différents; en sorte que la même équation $f(u, v) = 0$ appliquée aux divers systèmes dont on parle fournira une infinité de courbes distinctes. Il est clair aussi que l'on trouvera semblablement, si l'on veut, sur une seconde surface quelconque B, une infinité de courbes nouvelles ayant encore cette même équation $f(u, v) = 0$.

Soient donc sur la surface A quatre courbes ma, mb, mc, md, se coupant au point m, et ayant, dans un certain système de cordonnées, les équations respectives

$$f(u, v) = 0, \quad F(u, v) = 0, \quad \varphi(u, v) = 0, \quad \psi(u, v) = 0.$$

Soient $m\alpha$, $m\beta$, $m\gamma$, $m\delta$ les tangentes de ces courbes au point m, lesquelles sont naturellement dans un même plan, car nous excluons le cas singulier où la surface A aurait au point m plusieurs plans tangents. Prenons ensuite, soit sur la surface A, soit sur une autre surface B, quatre autres courbes ayant dans un second système quelconque de coordonnées les mêmes équations $f(u, v) = 0$, etc., et

se coupant par conséquent en un point m' correspondant au point m. Désignons ces courbes par $m'a'$, $m'b'$, $m'c'$, $m'd'$, et leurs tangentes au point m' par $m'\alpha'$, $m'\beta'$, $m'\gamma'$, $m'\delta'$.

Cela posé, le théorème que je veux énoncer ici consiste en ce que *le rapport anharmonique des quatre droites $m\alpha$, $m\beta$, $m\gamma$, $m\delta$ est toujours égal à celui des quatre droites $m'\alpha'$, $m'\beta'$, $m'\gamma'$, $m'\delta'$.*

Au lieu d'employer les tangentes $m\alpha$, $m\beta$, etc., on pourrait considérer directement les courbes elles-mêmes, qui font entre elles les mêmes angles que ces tangentes. Appelons *rapport anharmonique de quatre courbes ma, mb, mc, md* situées sur une surface et se coupant en un point m où il y a un plan tangent unique, l'expression suivante

$$\frac{\sin(ma, mc)}{\sin(ma, md)} : \frac{\sin(mb, mc)}{\sin(mb, md)}.$$

Notre théorème s'énoncera alors en disant que *le rapport anharmonique des quatre courbes ma, mb, mc, md est toujours égal à celui des quatre courbes $m'a'$, $m'b'$, $m'c'$, $m'd'$ qui ont les mêmes équations dans un autre système quelconque de coordonnées, et même, si l'on veut, sur une autre surface.*

La valeur commune de ces rapports est

$$\frac{(f, \varphi)}{(f, \psi)} : \frac{(F, \varphi)}{(F, \psi)},$$

la notation (f, φ) désignant la quantité

$$\frac{df}{du}\frac{d\varphi}{dv} - \frac{df}{dv}\frac{d\varphi}{du},$$

c'est-à-dire ce que M. Jacobi nomme le déterminant du système des deux fonctions $f(u, v)$, $\varphi(u, v)$.

L'espace me manque pour ajouter la démonstration qui, du reste, est très-simple, soit qu'on procède par l'analyse, soit qu'on emploie la voie géométrique. Je reviendrai d'ailleurs sur ce théorème, dont j'indiquerai alors diverses applications.

MÉMOIRE

SUR

L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DE LA MÉCANIQUE;

PAR M. J. BERTRAND.

Peu de mois apres la mort de Poisson, Jacobi écrivit à l'Academie des Sciences pour lui signaler la plus profonde découverte du géomètre qu'elle venait de perdre.

« Cette découverte, disait Jacobi, n'a, je crois, été bien comprise » ni par Lagrange, ni par les nombreux géomètres qui l'ont citée, ni » par son auteur lui-même. Le théorème dont je parle me semble le » plus important de la Mécanique et de cette partie du calcul intégral » qui s'attache à l'intégration d'un système d'équations différentielles » ordinaires. Toutefois, on ne le trouve ni dans les Traités de calcul » intégral, ni dans la *Mécanique analytique*. Comme ce théorème ne » servait qu'à établir une autre proposition dont Lagrange avait » donné une démonstration plus simple, celui-ci n'en parle, dans sa » *Mécanique*, que comme d'une preuve d'une grande force analy- » tique, sans trouver nécessaire de le faire entrer dans son ouvrage; » et, depuis, tout le monde le regardant comme un théorème remar- » quable par la difficulté de le prouver, et personne ne l'examinant » en lui-même, ce théorème prodigieux et jusqu'ici sans exemple est » resté à la fois découvert et caché. »

Le théoreme auquel ces lignes se rapportent est démontré dans le premier Mémoire de Poisson sur la variation des constantes arbitraires; il consiste en ce que deux intégrales d'un problème de Mécanique étant données, on peut, sans intégrations nouvelles, former une expression dont la valeur soit constante, ce qui, en général, fournit

une troisième intégrale. Cette troisième intégrale, combinée avec l'une des deux premières, pourra conduire à une quatrième, celle-ci à une cinquième, et ainsi de suite jusqu'à ce que le problème soit complétement résolu.

On comprend qu'il y a, dans cet énoncé, de quoi justifier l'enthousiasme de Jacobi. Il est peu de problèmes de Mécanique dont on ne connaisse deux intégrales et que l'on ne puisse, par conséquent, résoudre par cette méthode, si elle n'est jamais en défaut. Malheureusement, il existe, on le sait, des cas d'exception, et ces cas sont beaucoup plus nombreux, comme on le verra dans ce Mémoire, que ceux auxquels la méthode s'applique.

L'équation fournie par le théorème de Poisson peut conduire de deux manières différentes à une intégrale illusoire. Il peut arriver que l'équation se réduise à une identité telle que $0 = 0$, ou qu'elle donne une intégrale qui rentre dans celles dont on l'a déduite, et n'avance, par conséquent, en rien la solution du problème. Je fais voir que ces deux cas rentrent au fond l'un dans l'autre, et que, pour les étudier, il suffit de chercher les intégrales qui conduisent à des équations identiques. J'indique le moyen de chercher l'une de ces intégrales lorsque l'autre est connue, et je prouve qu'il en existe toujours. Je fais ensuite l'application de la méthode à plusieurs problèmes.

Je considère d'abord le mouvement d'un point matériel attiré vers un centre fixe, et je me propose de trouver directement toutes les intégrales qui, combinées avec celle des aires, donnent un résultat illusoire. J'obtiens de cette manière la solution complète du problème. Toutes les intégrales qui résolvent cette question mettent en défaut la méthode signalée par Jacobi.

J'étudie ensuite le mouvement d'un point attiré vers deux centres fixes, et le mouvement dans un plan lorsque la fonction des forces est homogène de degré -2. Ces deux problèmes donnent le même résultat que le précédent. Après avoir trouvé une intégrale, on peut obtenir toutes les autres en cherchant celles qui mettent la méthode en défaut.

Cette similitude dans les résultats obtenus pour trois questions très-différentes n'est pas un effet du hasard. Je fais voir qu'il en est ainsi toutes les fois qu'il s'agit du mouvement d'un point dans un plan, et

même dans tous les cas où les coordonnées des points du système s'expriment par deux variables indépendantes.

Passant ensuite à des cas plus composés, j'étudie le mouvement de deux corps qui s'attirent mutuellement et qui sont en même temps attirés vers un centre fixe; en supposant d'abord que le mouvement s'effectue dans un plan, je prouve que l'on peut, comme dans les cas précédents, former toutes les intégrales en cherchant celles qui, combinées avec l'équation des aires, donnent à l'équation de Poisson une forme illusoire. Lorsque l'on ne fait plus aucune restriction, le principe des aires fournit trois intégrales; les intégrales qui, combinées avec celles-là, donnent trois résultats illusoires, sont au nombre de huit; et, pour avoir la solution complète, il suffirait de leur en adjoindre une neuvième qui, seule, ne met pas la méthode en défaut.

J'ai enfin appliqué la même méthode à l'étude du célèbre problème des trois corps, en cherchant s'il existe des intégrales qui, combinées avec celle des aires, donnent des résultats illusoires. Je trouve, comme dans le cas précédent, qu'il en existe huit distinctes, et que, pour compléter la solution du problème, il suffirait de leur en adjoindre une neuvième qui, seule, ne met pas la méthode en défaut.

On voit assez, par l'énumération qui précède, que la méthode d'intégration, basée sur le théorème de Poisson, n'a pas, à beaucoup près, l'importance qu'on avait cru pouvoir lui attribuer. Les cas d'exception sont nombreux, ils forment la solution complète de certains problèmes et embrassent, dans d'autres cas, onze intégrales sur douze. On comprendrait mal, cependant, le but que je me suis proposé si l'on concluait que, suivant moi, l'on doit regarder comme exceptionnels les cas dans lesquels le théorème de Poisson est utilement applicable. Cette assertion ne serait pas même exacte pour les problèmes que je résous complétement en cherchant les intégrales qui mettent en défaut la méthode signalée par Jacobi. Il existe, il est vrai, pour ces problèmes, un système complet d'intégrales qui donnent à l'équation de Poisson une forme illusoire; mais ces intégrales, combinées d'une manière convenable, pourraient en fournir d'autres auxquelles le théorème s'appliquerait utilement.

Je ferai remarquer qu'en cherchant les cas d'exception du théorème

de Poisson, on obtient une méthode nouvelle d'intégration qui peut conduire à des résultats importants.

On n'a pas oublié que Jacobi, dans un Mémoire sur le problème des trois corps, ramene la solution de ce problème à l'intégration de six équations différentielles, l'une du second ordre et les cinq autres du premier. Je parviens, par la méthode nouvelle dont je parle, à réduire la question à l'intégration de six équations, toutes du premier ordre, c'est-à-dire que j'effectue une intégration de plus que ne l'avait fait Jacobi.

Il résulte aussi de mes recherches que les douze intégrales du problème des trois corps peuvent se classer de la manière suivante :

1° L'intégrale des forces vives; 2° les trois intégrales des aires; 3° cinq intégrales dont je donne l'expression contenant une fonction inconnue de sept variables; cette expression contient, en outre, l'équation des forces vives et une certaine combinaison de celle des aires; 4° une intégrale obtenue en égalant à une constante une fonction inconnue des sept mêmes variables; 5° une intégrale qui contient le temps; 6° une douzième intégrale qui n'appartient à aucune des catégories précédentes.

Je me borne, quant à présent, à indiquer ces résultats. Je les développerai dans un autre Mémoire; leur étude m'écarterait du but spécial que je me suis proposé dans celui-ci, c'est-à-dire de l'étude approfondie du théorème signalé par Jacobi à l'admiration des géomètres. Il est remarquable que ces résultats, dont le théorème de Poisson est l'occasion plutôt que le principe, forment, jusqu'à présent, la seule application utile d'une découverte qui semblait d'abord devoir s'appliquer à toutes les questions de la science et ne laisser subsister les difficultés que comme de rares exceptions.

I.

Si l'on désigne par $q_1, q_2, \ldots, q_n$ des variables indépendantes, en fonction desquelles soient données les coordonnées des points d'un système, et par $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$ leurs dérivées par rapport au temps, par T l'expression de la demi-somme des forces vives, et enfin par t

la *fonction des forces* [*]; les équations différentielles du mouvement sont, d'après Lagrange,

$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{dq'_1} - \frac{dT}{dq_1} = \frac{dU}{dq_1},$$
$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{dq'_2} - \frac{dT}{dq_2} = \frac{dU}{dq_2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{dq'_n} - \frac{dT}{dq_n} = \frac{dU}{dq_n}.$$

Si l'on pose, avec Poisson,

$$\frac{dT}{dq'_1} = p_1, \quad \frac{dT}{dq'_2} = p_2, \ldots, \quad \frac{dT}{dq'_n} = p_n, \quad T - U = H,$$

et que l'on substitue les variables $p_1, p_2, \ldots, p_n$ à $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$, les équations précédentes prennent la forme très-simple

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{dH}{dq_1}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{dH}{dq_2}, \ldots, \quad \frac{dp_n}{dt} = -\frac{dH}{dq_n},$$
$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{dH}{dp}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{dH}{dp_2}, \ldots, \quad \frac{dq_n}{dt} = \frac{dH}{dp_n}.$$

Cela posé, le théorème de Poisson peut s'énoncer comme il suit.

Si

$$\alpha = \varphi(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n),$$
$$\beta = \psi(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

sont deux intégrales d'un même problème, on aura toujours

$$\frac{d\alpha}{dq}\frac{d\beta}{dp} - \frac{d\alpha}{dp}\frac{d\beta}{dq} + \frac{d\alpha}{dq_2}\frac{d\beta}{dp_2} - \frac{d\alpha}{dp_2}\frac{d\beta}{dq_2} + \ldots + \frac{d\alpha}{dq_n}\frac{d\beta}{dp_n} - \frac{d\alpha}{dp_n}\frac{d\beta}{dq_n}$$
$$= (\alpha, \beta) = \text{constante}.$$

L'expression (α, β) devant rester constante pendant toute la durée du mouvement, si l'on égale cette expression à une constante arbitraire, on aura, en général, une intégrale, mais il pourra arriver que l'on obtienne ainsi une identité. Il pourra arriver aussi que (α, β) soit une fonction de α et de β, de telle sorte que la nouvelle intégrale soit une

[*] Le théorème de Poisson suppose essentiellement l'existence de cette fonction, et il n'est question, dans ce Mémoire, que des problèmes de Mécanique auxquels s'applique le principe des forces vives. (J. B.)

combinaison des deux autres et n'avance en rien la solution du problème. Il est important d'examiner ces deux cas et de reconnaître s'ils doivent fréquemment se présenter. Nous démontrerons d'abord un théorème qui permet de les rattacher l'un à l'autre.

Si

$$\alpha = \varphi, \quad \beta = \psi$$

sont deux intégrales d'un même problème, telles que (α, β) *soit une fonction de* α *et de* β, *il existe toujours une fonction de* α *et de* β *qui, égalée à une constante* γ, *fournira une intégrale telle, que* (α, γ) *soit identiquement l'unité.*

On a, en effet, par définition,

$$(\alpha, \gamma) = \frac{d\alpha}{dq_1}\frac{d\gamma}{dp_1} - \frac{d\alpha}{dp_1}\frac{d\gamma}{dq_1} + \frac{d\alpha}{dq_2}\frac{d\gamma}{dp_2} - \frac{d\alpha}{dp_2}\frac{d\gamma}{dq_2} + \ldots + \frac{d\alpha}{dq_n}\frac{d\gamma}{dp_n} - \frac{d\alpha}{dp_n}\frac{d\gamma}{dq_n}.$$

mais γ étant fonction de α et de β, on a identiquement

$$\frac{d\gamma}{dp_1} = \frac{d\gamma}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dp_1} + \frac{d\gamma}{d\beta}\frac{d\beta}{dp_1}, \quad \frac{d\gamma}{dp_2} = \frac{d\gamma}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dp} + \frac{d\gamma}{d\beta}\frac{d\beta}{dp_2}, \ldots,$$

et, en substituant dans l'expression de (α, γ), il vient, après des réductions évidentes,

$$(\alpha, \gamma) = (\alpha, \beta)\frac{d\gamma}{d\beta}.$$

Si donc (α, β) est, comme on l'a supposé, une fonction de α et de β, on pourra toujours déterminer γ par la condition

$$\frac{d\gamma}{d\beta} = \frac{1}{(\alpha, \beta)},$$

et faire en sorte, par conséquent, que (α, γ) soit égal à l'unité.

Le résultat précédent peut être généralisé.

Si

$$\alpha = \varphi, \quad \beta = \psi$$

sont deux intégrales d'un même problème, supposons qu'en les combinant par la méthode de Poisson on trouve une troisième intégrale

$$(\alpha, \beta) = \gamma,$$

puis une quatrième

$$(\alpha, \gamma) = \delta,$$

puis une cinquième

$$(\alpha, \delta) = \varepsilon,$$

et que l'on arrive enfin à une intégrale

$$(\alpha, \eta) = \zeta,$$

qui puisse résulter de la combinaison des précédentes, de telle sorte que

$$\zeta = F(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \ldots, \eta);$$

il existe toujours une certaine intégrale de la forme

$$f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \eta) = \xi,$$

qui, combinée avec α, donne identiquement

$$(\alpha, \xi) = 1.$$

Pour démontrer ce théorème, il suffit de remarquer qu'en remplaçant dans l'expression de (α, ξ) les dérivées de ξ par leur expression obtenue en considérant ξ comme une fonction composée, on trouve identiquement

$$\begin{aligned}(\alpha, \xi) &= (\alpha, \beta)\frac{d\xi}{d\beta} + (\alpha, \gamma)\frac{d\xi}{d\gamma} + (\alpha, \delta)\frac{d\xi}{d\delta} + \ldots + (\alpha, \eta)\frac{d\xi}{d\eta} \\ &= \gamma\frac{d\xi}{d\beta} + \delta\frac{d\xi}{d\gamma} + \varepsilon\frac{d\xi}{d\delta} + \ldots + (\alpha, \eta)\frac{d\xi}{d\eta}.\end{aligned}$$

Si donc on écrit

$$(\alpha, \xi) = 1 \quad \text{ou} \quad (\alpha, \xi) = 0,$$

on aura, pour déterminer ξ, une équation linéaire aux différentielles partielles dont les intégrales satisferont à la condition demandée.

On peut remarquer que si l'équation en ξ renferme k variables indépendantes, son intégrale générale sera une fonction arbitraire de $k-1$ fonctions distinctes, et contiendra, par conséquent, $k-1$ intégrales distinctes satisfaisant à la condition énoncée.

D'après ce qui précède, on peut démontrer qu'une intégrale quelconque étant donnée, il en existe d'autres qui, combinées avec elle, conduisent à des équations identiques.

Soit

$$\alpha = \varphi(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

une intégrale d'un problème de Mécanique.

Prenons arbitrairement une seconde intégrale du même problème,

$$\beta = \psi(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n),$$

et combinons ces deux intégrales pour former l'expression (α, β). Si cette expression est identiquement constante, la proposition est démontrée; si elle ne l'est pas,

$$(\alpha, \beta) = \gamma$$

sera une nouvelle intégrale. Formons l'expression (α, γ). Si elle est identiquement constante, la proposition est démontrée; si elle ne l'est pas,

$$(\alpha, \gamma) = \delta$$

sera une quatrième intégrale. En continuant ainsi indéfiniment, il arrivera de deux choses l'une : ou bien l'une des intégrales successivement obtenues se réduira à une identité, et alors la précédente satisfait à la condition énoncée; ou bien on trouvera une intégrale qui peut résulter de la combinaison des précédentes, car les intégrales distinctes sont en nombre essentiellement limité. On sait alors, d'après ce qui précède, qu'en formant une fonction convenable des intégrales successivement obtenues, on aura une intégrale qui, combinée avec α, donnera un résultat identique, et l'on a vu même que, par ce procédé, on pouvait, dans la plupart des cas, en obtenir plusieurs, distinctes les unes des autres.

On peut démontrer, du reste, que l'intégrale des forces vives satisfait toujours à la condition dont nous venons de parler, et que, quelle que soit la seconde intégrale avec laquelle on la combine, le résultat est une identité.

Soit, en effet,

$$\alpha = \varphi(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

une intégrale d'un problème de Mécanique. Les équations différentielles du mouvement étant

$$\frac{dq}{dt} = \frac{dH}{dp}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{dH}{dp_2}, \ldots, \quad \frac{dq_n}{dt} = \frac{dH}{dp_n},$$

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{dH}{dq}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{dH}{dq_2}, \ldots, \quad \frac{dp_n}{dt} = -\frac{dH}{dq}.$$

l'intégrale des forces vives est

$$\beta = \mathrm{H}.$$

Or on a, en exprimant que la dérivée de α est nulle lorsqu'on a égard aux équations différentielles du mouvement,

$$\frac{d\alpha}{dq_1}\frac{d\mathrm{H}}{dp_1} - \frac{d\alpha}{dp_1}\frac{d\mathrm{H}}{dq_1} + \ldots + \frac{d\alpha}{dq_n}\frac{d\mathrm{H}}{dp_n} - \frac{d\alpha}{dp_n}\frac{d\mathrm{H}}{dq_n} = 0,$$

et cette équation exprime précisément la relation

$$(\alpha, \beta) = 0.$$

Si l'intégrale α contenait le temps et qu'elle fût de la forme

$$\alpha = t + \varphi(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n),$$

on verrait de même qu'en représentant par $\beta = \mathrm{H}$ l'intégrale des forces vives, on aurait

$$(\alpha, \beta) = -1.$$

On comprend que la méthode indiquée plus haut, fournissant un grand nombre de manières de former des intégrales qui, combinées avec une intégrale donnée, conduisent à un résultat identique, l'intégrale des forces vives ne sera pas, en général, la seule qui remplisse cette condition. Nous pouvons d'ailleurs démontrer que cette circonstance ne se présentera jamais, et que quelle que soit l'intégrale donnée, il en existe toujours une seconde, différente de celle des forces vives et qui, combinée avec elle, donne un résultat illusoire.

Soient, en effet,

$$\alpha = \varphi(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

une intégrale donnée, et

$$\beta = \psi(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

une seconde intégrale quelconque distincte de celle des forces vives. S'il arrive qu'en combinant α avec β, puis avec toutes celles que l'on obtient successivement, la $k^{ième}$ opération donne un résultat qui rentre

dans les précédents, nous avons vu que la fonction qui, combinée avec α, donne un résultat illusoire est fournie par une équation différentielle partielle à k variables indépendantes, et elle est, par conséquent, susceptible de $k-1$ formes distinctes. Si l'on avait $k=1$, cette intégrale serait, comme on l'a vu, une combinaison de α et de β, distincte évidemment de l'équation des forces vives. Si $k=2$, on aura

$$(\alpha, \beta) = \gamma,$$
$$(\alpha, \gamma) = \psi(\alpha, \beta, \gamma);$$

et si, en déduisant de là, par la méthode indiquée plus haut, une intégrale qui, combinée avec α, donne un résultat illusoire, on trouve précisément l'équation des forces vives

$$\mathrm{H} = \delta,$$

il faut en conclure que l'on a

$$\mathrm{H} = \mathrm{F}(\alpha, \beta, \gamma),$$

et, par suite,

$$\gamma = f(\alpha, \beta, \mathrm{H}).$$

Considérons alors une fonction $\pi(\alpha, \beta, \mathrm{H})$ qui, évidemment, sera une intégrale; on aura, comme on le vérifie aisément,

$$(\alpha, \pi) = (\alpha, \beta)\frac{d\pi}{d\beta} = f(\alpha, \beta, \mathrm{H})\frac{d\pi}{d\beta},$$

et si l'on détermine π par la condition

$$f(\alpha, \beta, \mathrm{H})\frac{d\pi}{d\beta} = 1,$$

l'intégrale π satisfera à la condition proposée, et, de plus, sera distincte de celle des forces vives, puisque celle-ci donne

$$(\alpha, \mathrm{H}) = 0.$$

S'il arrive, en second lieu, qu'en combinant α avec l'intégrale β, puis avec celles que l'on obtient successivement, on arrive à un résultat identique de la forme

$$(\alpha, \xi) = 1;$$

l'intégrale ξ sera évidemment distincte de celle des forces vives, et la proposition se trouve encore démontrée.

S'il arrive enfin, qu'en procédant comme nous l'avons dit, on soit conduit à un résultat identique de la forme

$$(\alpha, \varepsilon) = 0,$$

et que ε soit précisément l'intégrale des forces vives ou une fonction de cette intégrale $\psi(H)$, on aura, en désignant par δ l'intégrale qui, dans la série des opérations, précède immédiatement ε,

$$(\alpha, \delta) = \varepsilon = \psi(H)$$

Or il est facile de voir que si, au lieu de l'intégrale β que nous avons prise pour point de départ, on avait pris $\frac{\delta}{\psi(H)}$, toutes les intégrales successivement obtenues auraient été divisées par $\psi(H)$, et l'on aurait eu

$$\left(\alpha, \frac{\delta}{\psi(H)}\right) = 1,$$

en sorte que $\frac{\delta}{\psi(H)}$ est une intégrale distincte de celle des forces vives, et qui, combinée avec α, donne une équation identique.

II.

Lorsque l'on connaîtra une intégrale d'un problème de Mécanique

$$\gamma = \varphi(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

il résulte du paragraphe précédent qu'il en existe d'autres qui satisfont identiquement à l'équation

$$\frac{d\alpha}{dq}\frac{d\beta}{dp} - \frac{d\alpha}{dp}\frac{d\beta}{dq} + \frac{d\alpha}{dq_1}\frac{d\beta}{dp_1} - \frac{d\alpha}{dp_1}\frac{d\beta}{dq_1} - \ldots - \frac{d\alpha}{dq_n}\frac{d\beta}{dp_n} - \frac{d\alpha}{dp_n}\frac{d\beta}{dq_n} = 0,$$

ou à celle-ci,

$$\frac{d\gamma}{dq}\frac{d\beta}{dp} - \frac{d\gamma}{dp}\frac{d\beta}{dq} - \frac{d\gamma}{dq_1}\frac{d\beta}{dp_1} - \frac{d\gamma}{dp_1}\frac{d\beta}{dq_1} - \ldots - \frac{d\gamma}{dq_n}\frac{d\beta}{dp_n} - \frac{d\gamma}{dp_n}\frac{d\beta}{dq_n} = 1$$

Ces équations différentielles partielles auxquelles doivent satisfaire certaines intégrales du problème peuvent être, dans certains cas, un moyen précieux d'intégration et conduire quelquefois à classer les

intégrales d'un problème, de manière à faciliter leur détermination ultérieure.

III.

Pour premier exemple, nous étudierons le mouvement d'un point matériel attiré vers un centre fixe par une force fonction de la distance.

Les équations différentielles d'un tel mouvement sont

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x', \quad \dfrac{dx'}{dt} = -\dfrac{x}{r}\varphi(r), \\ \dfrac{dy}{dt} = y', \quad \dfrac{dy'}{dt} = -\dfrac{y}{r}\varphi(r). \end{cases}$$

Le principe des aires fournit, comme on sait, une intégrale

$$(2)\qquad xy' - yx' = \alpha.$$

Soit

$$(3)\qquad \psi(x, y, x', y', t) = \beta$$

une seconde intégrale. En écrivant que, combinée avec la première, elle donne un résultat illusoire, nous obtiendrons l'une ou l'autre des équations suivantes :

$$(4)\qquad -\frac{d\beta}{dx}y - \frac{d\beta}{dx'}y' + \frac{d\beta}{dy}x + \frac{d\beta}{dy'}x' = 0,$$

$$(5)\qquad -\frac{d\beta}{dx}y - \frac{d\beta}{dx'}y' + \frac{d\beta}{dy}x + \frac{d\beta}{dy'}x' = 1.$$

Occupons-nous d'abord de la première. Pour l'intégrer, il faut poser, conformément à la méthode générale,

$$-\frac{dx}{y} = -\frac{dx'}{y'} = \frac{dy}{x} = \frac{dy'}{x'} = \frac{d\beta}{0};$$

l'une des intégrales est

$$\beta = C_1,$$

et l'on s'assure facilement que les trois autres sont

$$x^2 + y^2 = C_2, \quad x'^2 + y'^2 = C_3, \quad xx' - yy' = C_4;$$

la valeur la plus générale de β qui satisfasse à l'équation (4) est, par

conséquent, l'une des suivantes :

$$(A)\qquad \begin{cases} \beta = F(x^2+y^2,\ x'^2+y'^2,\ xx'+yy'), \\ \beta = t + F(x^2+y^2,\ x'^2+y'^2,\ xx'+yy'); \end{cases}$$

on devra adopter l'une ou l'autre de ces deux formes suivant que t devra ou non figurer dans l'intégrale que l'on cherche.

Pour intégrer l'équation (5), il faut poser

$$-\frac{dx}{y} = -\frac{dx'}{y'} = \frac{dy}{x} = \frac{dy'}{x'} = d\beta,$$

c'est-à-dire

$$\frac{dx}{d\beta} = y,\quad \frac{dy}{d\beta} = -x,\quad \frac{dx'}{d\beta} = -y',\quad \frac{dy'}{d\beta} = x',$$

dont les intégrales sont

$$x = M\cos(\beta+\alpha),\quad y = M\sin(\beta+\alpha),$$
$$x' = M'\cos(\beta+\alpha'),\quad y' = M'\sin(\beta+\alpha'),$$

M, M', α, α' étant des constantes arbitraires. De ces équations on déduit sans peine

$$x^2+y^2 = C_1,\qquad x'^2+y'^2 = C_2,$$
$$xx'+yy' = C_3,\quad \text{arc tang}\,\frac{y}{x} - \beta = C_4;$$

d'où l'on conclut, pour intégrale complète de l'équation (5),

$$\beta = \text{arc tang}\,\frac{y}{x} + F(x^2+y^2,\ x'^2+y'^2,\ xx'+yy',\ t);$$

et les intégrales du problème qui sont comprises dans cette forme pourront s'écrire, suivant que t y figure ou n'y figure pas,

$$(B)\qquad \begin{cases} \beta = \text{arc tang}\,\frac{y}{x} + F(x^2+y^2,\ x'^2+y'^2,\ xx'+yy'), \\ \beta = t + \text{arc tang}\,\frac{y}{x} + F(x^2+y^2,\ x'^2+y'^2,\ xx'+yy'). \end{cases}$$

Il nous reste à chercher quelles sont les intégrales du problème comprises dans les formes (A) ou (B).

Occupons-nous d'abord de la forme (A)

$$\beta = F(x^2 + y^2,\ x'^2 + y'^2,\ xx' + yy').$$

Pour exprimer que cette équation est une intégrale, écrivons que la dérivée de β est nulle lorsqu'on a égard aux équations différentielles du mouvement.

On obtient ainsi, en posant

$$x^2 + y^2 = u,\quad x'^2 + y'^2 = v,\quad xx' + yy' = w$$

$$2\frac{d\beta}{du}w + 2\frac{d\beta}{dv}w\varphi(u) + \frac{d\beta}{dw}[v + u\varphi(u)] = 0.$$

Pour intégrer cette équation, il faut considérer les équations différentielles

$$\frac{du}{2w} = \frac{dv}{2w\varphi(u)} = \frac{dw}{v + u\varphi(u)} = \frac{d\beta}{0};$$

les intégrales sont

$$\beta = C,$$

$$v - \int\varphi(u)\,du = C_1,$$

$$w^2 - uv = C_3;$$

par suite, la valeur de β est de la forme

$$\beta = F\left[v - \int\varphi(u)\,du,\ w^2 - uv\right],$$

ou, en remplaçant u, v, w par leurs valeurs,

$$(C)\qquad \beta = F\left[x'^2 + y'^2 - \int\varphi(u)\,du,\ (xy' - yx')^2\right],$$

c'est-à-dire que l'intégrale β est une combinaison de l'équation des forces vives avec celle des aires.

Si nous considérons maintenant la seconde des formes (B),

$$\beta = t + F(x^2 + y^2,\ x'^2 + y'^2,\ xx' + yy');$$

en adoptant la même notation que dans le cas précédent, nous exprimerons qu'elle est une intégrale, à l'aide de l'équation suivante :

$$1 + 2\frac{d\beta}{du}w + 2\frac{d\beta}{dv}w\varphi(u) + \frac{d\beta}{dw}[v + u\varphi(u)] = 0.$$

Pour intégrer cette équation, il faut poser

$$\frac{du}{2w} = \frac{dv}{2w\varphi(u)} = \frac{dw}{v + u\varphi(u)} = -d\beta;$$

nous obtiendrons d'abord les deux intégrales

$$v - \int \varphi(u)\,du = C_1, \quad w^2 - uv = C_2,$$

qui sont les mêmes que dans le cas précédent. En remettant la valeur de w déduite de ces équations dans la relation

$$d\beta = -\frac{du}{2w},$$

il vient

$$d\beta = \frac{du}{\sqrt{C_2 + u\left[C_1 + \int \varphi(u)\,du\right]}},$$

et l'on conclut que la troisième intégrale est

$$\beta - \int \frac{du}{\sqrt{C_2 + u\left[C_1 + \int \varphi(u)\,du\right]}} = C_3,$$

et, par conséquent, la valeur générale de β est

$$(7) \qquad \beta = t + \int \frac{du}{\sqrt{C_2 + u\left[C_1 + \int \varphi(u)\,du\right]}} + F\left[v - \int \varphi(u)\,du,\ uv - w^2\right].$$

Si nous supposons $F = 0$, cette équation devient celle à l'aide de laquelle on détermine le temps en fonction du rayon vecteur.

Cherchons enfin si le problème admet des intégrales de la forme

$$(8) \qquad \beta = \text{arc tang}\frac{y}{x} + F(x^2 + y^2,\ x'^2 + y'^2,\ xx' + yy');$$

en faisant toujours usage de la même notation, l'équation qui exprime que cette relation est une intégrale est

$$0 = \frac{\sqrt{uv - w^2}}{u} + 2\frac{dF}{du}w + 2\frac{dF}{dv}w\varphi(u) + \frac{dF}{dw}\left[v + u\varphi(u)\right].$$

Pour en déduire F, il faut intégrer d'abord les équations

$$\frac{du}{2w} = \frac{dv}{2w\varphi(u)} = \frac{dw}{v + u\varphi(u)} = -\frac{u\,dF}{\sqrt{uv - w^2}}.$$

Ces équations admettent, comme dans les cas précédents, les intégrales

$$v - \int \varphi(u)\,du = C_1, \quad w^2 - uv = C_2;$$

puis, en remettant pour v et w leurs valeurs dans l'équation

$$\frac{du}{2w} = -\frac{u\,dF}{\sqrt{uv - w^2}},$$

il vient

$$dF = \frac{-du\sqrt{C_2}}{2u\sqrt{C_2 + u\left[\int \varphi(u)\,du + C_1\right]}};$$

donc la forme de la fonction F est

$$F = -\int \frac{\sqrt{C_2}\,du}{2u\sqrt{C_2 + u\left[\int \varphi(u)\,du + C_1\right]}} + \psi\left[v - \int \varphi(u)\,du,\ uv - w^2\right].$$

Si l'on suppose $\psi = 0$, cette valeur de F fournit l'intégrale

$$(9) \qquad \beta = \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{x} - \int \frac{\sqrt{C_2}\,du}{2u\sqrt{C_2 + u\left[\int \varphi(u)\,du + C_1\right]}}.$$

C'est précisément l'équation de la trajectoire du point mobile.

Les intégrales (8) et (9), jointes à celle des aires et à celle des forces vives, donnent la solution complète du problème.

IV.

Nous choisirons, pour second exemple, le mouvement d'un point dans un plan, en supposant la fonction des forces de la forme

$$U = \frac{1}{x^2 + y^2}\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Les équations différentielles de ce mouvement sont

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x', \quad \dfrac{dy}{dt} = y', \\[2ex] \dfrac{dx'}{dt} = -\dfrac{2x}{(x^2 + y^2)^2}\,\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right) - \dfrac{1}{(x^2 + y^2)}\,\dfrac{y}{x^2}\,\varphi'\left(\dfrac{y}{x}\right), \\[2ex] \dfrac{dy'}{dt} = -\dfrac{2y}{(x^2 + y^2)^2}\,\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right) - \dfrac{1}{(x^2 + y^2)}\,\dfrac{1}{x}\,\varphi'\left(\dfrac{y}{x}\right) \end{cases}$$

On vérifie facilement que l'une des intégrales de ce systeme est

$$(2)\qquad (xy' - yx')^2 - 2\varphi\left(\frac{y}{x}\right) = \alpha.$$

Soit

$$(3)\qquad F(x', y', x, y, t) = \beta$$

une seconde intégrale. En écrivant que la combinaison α, β est identiquement constante, on obtient l'une ou l'autre des équations

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &-2\frac{d\beta}{dx}(xy'-yx')y - \frac{d\beta}{dx'}\left[2(xy'-yx')y' + 2\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y}{x^2}\right] \\ &+2\frac{d\beta}{dy}(xy'-yx')x + \frac{d\beta}{dy'}\left[2(xy'-yx')x' + 2\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x}\right] = 0, \end{aligned}\right.$$

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &-2\frac{d\beta}{dx}(xy'-yx')y - \frac{d\beta}{dx'}\left[2(xy'-yx')y' + 2\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y}{x^2}\right] \\ &+2\frac{d\beta}{dy}(xy'-yx')x + \frac{d\beta}{dy'}\left[2(xy'-yx')x' + 2\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x}\right] = 1. \end{aligned}\right.$$

Nous allons successivement intégrer ces deux équations.

Pour intégrer l'équation (4), il faut considérer les équations différentielles

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\beta}{0} &= -\frac{dx}{2[y(xy'-yx')]} = -\frac{dx'}{2(xy'-yx')y' + 2\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y}{x^2}} \\ &= \frac{dy}{2x(xy'-yx')} = \frac{dy'}{2(xy'-yx')x' + 2\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x}}; \end{aligned}\right.$$

une premiere intégrale est évidemment $\beta = C_1$. Pour obtenir les autres, désignons par dh la valeur commune des diverses fractions dont l'équation (6) exprime l'égalité, nous aurons

$$(7)\qquad \frac{dx}{dh} = -2y(xy'-yx'),$$

$$(8)\qquad \frac{dy}{dh} = 2x(xy'-yx'),$$

$$(9)\qquad \frac{dx'}{dh} = -2(xy'-yx')y' - 2\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y}{x^2},$$

$$(10)\qquad \frac{dy'}{dh} = 2(xy'-yx')x' + 2\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x}.$$

En multipliant l'équation (7) par x, l'équation (8) par y, et ajoutant, on trouve

$$x\frac{dx}{dh} + y\frac{dy}{dh} = 0, \tag{11}$$

donc

$$x^2 + y^2 = C_2. \tag{12}$$

C'est une seconde intégrale du système proposé.

Si nous multiplions l'équation (9) par x' et l'équation (10) par y', nous obtiendrons, en les ajoutant ensuite,

$$x'\frac{dx'}{dh} + y'\frac{dy'}{dh} = 2\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{xy' - yx'}{x^2}; \tag{13}$$

mais on déduit facilement des équations (7) et (8),

$$xy' - yx' = \left(x\frac{dy}{dh} - y\frac{dx}{dh}\right)\frac{1}{2(x^2+y^2)}, \tag{14}$$

donc

$$x'\frac{dx'}{dh} + y'\frac{dy'}{dh} = \varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\left(x\frac{dy}{dh} - y\frac{dx}{dh}\right)\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}; \tag{15}$$

et, en intégrant les deux membres apres avoir remplacé $x^2 + y^2$ par sa valeur C_2,

$$\frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) - \frac{1}{C_2}\varphi\left(\frac{y}{x}\right) = C_3. \tag{16}$$

C'est une troisième intégrale.

Multiplions enfin l'équation (7) par y', l'équation (8) par $-x'$, l'équation (9) par $-y$, l'équation (10) par x, et ajoutons les résultats, nous obtiendrons

$$\frac{d}{dh}(xy' - yx') = -\frac{2(y^2+x^2)}{r}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right). \tag{17}$$

Multipliant les deux membres de cette équation par $xy' - yx'$, il viendra, en ayant égard à l'équation (14),

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dh}(xy' - yx')^2 = \varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{x\frac{dy}{dh} - y\frac{dx}{dh}}{x^2}. \tag{18}$$

et, par suite, en intégrant,

$$(19)\qquad (xy' - yx')^2 - 2\varphi\left(\frac{y}{x}\right) = C_3.$$

C'est la quatrième intégrale du système d'équations simultanées. La valeur de β est, par conséquent, l'une des suivantes, selon que t y figure ou non,

$$(A)\quad \begin{cases} \beta = F\left[x^2 + y^2,\ x'^2 + y'^2 - \dfrac{2}{x^2 + y^2}\varphi'\left(\dfrac{y}{x}\right),\ (xy' - yx')^2 - 2\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)\right], \\ \beta = t + F\left[x^2 + y^2,\ x'^2 + y'^2 - \dfrac{2}{x^2 + y^2}\varphi'\left(\dfrac{y}{x}\right),\ (xy' - yx')^2 - 2\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)\right]. \end{cases}$$

Considérons actuellement la seconde équation différentielle partielle, c'est-à-dire l'équation (5). Pour l'intégrer, il faut poser

$$(20)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{2(xy' - yx')} = \dfrac{dx'}{2(xy' - yx') + 2\varphi'\left(\dfrac{y}{x}\right)\dfrac{y}{x}} = \dfrac{dy}{2(xy' - yx')}, \\ \qquad = \dfrac{dx'}{2(xy' - yx') + \dfrac{2}{x}\varphi'\left(\dfrac{y}{x}\right)} = d\beta. \end{cases}$$

Ces équations ne diffèrent des équations (7), (8), (9), (10), traitées plus haut, que par le changement de h en β; elles admettent donc les mêmes intégrales

$$x^2 + y^2 = C_1,$$

$$\frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) - \frac{1}{x^2 + y^2}\varphi\left(\frac{y}{x}\right) = C_2,$$

$$(xy' - yx')^2 - 2\varphi\left(\frac{y}{x}\right) = C_3.$$

Pour obtenir une quatrième intégrale, je pose

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang}\theta,$$

d'où l'on conclut

$$\frac{d\theta}{d\beta} = \frac{x\dfrac{dy}{d\beta} - y\dfrac{dx}{d\beta}}{x^2 + y^2}.$$

et, par suite, en vertu des équations différentielles proposées,

$$\frac{d\theta}{d\beta} = 2(xy' - yx') = 2\sqrt{C_3 + 2\varphi\left(\frac{y}{x}\right)};$$

donc

$$d\beta = \frac{d\theta}{2\sqrt{C + 2\varphi\left(\frac{y}{x}\right)}},$$

équation intégrable, puisque $\frac{y}{x}$ est égal à tang θ. La quatrième intégrale des équations (20) est donc

$$(21) \qquad \beta - \int \frac{d\theta}{2\sqrt{C_3 + 2\varphi(\tang\theta)}} = C_4,$$

en sorte que l'intégrale la plus générale du problème qui satisfasse à l'équation différentielle partielle (6) est comprise dans l'une des formes

$$(B) \quad \begin{cases} \beta = \int \frac{d\theta}{2\sqrt{C_3 + 2\varphi(\tang\theta)}} \\ \quad + F\left[x^2 + y^2,\ (xy' - yx')^2 - 2\varphi\left(\frac{y}{x}\right),\ x'^2 + y'^2 - \frac{2}{x^2+y^2}\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right], \\ \beta = t + \int \frac{d\theta}{2\sqrt{C_3 + 2\varphi(\tang\theta)}} \\ \quad + F\left[x^2 + y^2,\ (xy' - yx')^2 - 2\varphi\left(\frac{y}{x}\right),\ x'^2 + y'^2 - \frac{2}{x^2+y^2}\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right] \end{cases}$$

Il nous reste à chercher si le problème admet des intégrales comprises dans les formes (A) ou (B). Si nous considérons d'abord la première des formes (A),

$$\beta = F\left[x^2 + y^2,\ (xy' - yx')^2 - 2\varphi\left(\frac{y}{x}\right),\ x'^2 + y'^2 - \frac{2}{x^2+y^2}\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right],$$

nous verrons que la condition nécessaire et suffisante pour que cette équation soit une intégrale est que $x^2 + y^2$ ne figure pas dans la fonction F. On s'en convaincra en remarquant qu'en vertu des équations

différentielles du mouvement,

$$(xy' - yx')^2 - 2\varphi\left(\frac{y}{x}\right), \quad x'^2 + y'^2 - \frac{2}{x^2+y^2}\varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

sont l'un et l'autre constants. Si donc, en outre, β était constant, il faudrait que $x^2 + y^2$ le fût lui-même, ce qui, évidemment, n'a pas lieu. La fonction F ne doit donc pas renfermer $x^2 + y^2$, et la seule intégrale contenue dans la première forme A est, par conséquent, une combinaison de l'intégrale déjà connue α avec celle des forces vives.

Si nous considérons actuellement la seconde des formes (A),

$$\beta = t - F\left[x^2 + y^2, \quad (xy' - yx')^2 - 2\varphi\left(\frac{y}{x}\right), \quad x'^2 + y'^2 - \frac{2}{x^2+y^2}\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right],$$

en écrivant que la dérivée de β est nulle et posant

$$x^2 + y^2 = u,$$

$$(xy' - yx')^2 - 2\varphi\left(\frac{y}{x}\right) = w,$$

$$x'^2 + y'^2 - \frac{2}{x^2+y^2}\varphi\left(\frac{y}{x}\right) = v,$$

on trouve

$$0 = 1 + 2\frac{dF}{du}(xx' + yy').$$

Or, on a

$$xx' + yy' = \sqrt{uv - w},$$

en sorte que l'équation de condition devient

$$1 + 2\frac{dF}{du}\sqrt{uv - w} = 0.$$

On en déduit

$$F = -\frac{1}{v}\sqrt{uv - w} + \psi(v, w) = -\frac{xx' + yy'}{x'^2 + y'^2 - \frac{2}{x^2+y^2}\varphi\left(\frac{y}{x}\right)} + \psi(v, w),$$

et l'on en conclut que l'intégrale comprise dans la seconde des formes (A) est

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} \beta = t - & \frac{xx' + yy'}{x'^2 + y'^2 - \frac{2}{x^2+y^2}\varphi\left(\frac{y}{x}\right)} \\ & + \psi\left[(xy' - yx')^2 - 2\varphi\left(\frac{y}{x}\right), \; x'^2 + y'^2 - \frac{2}{x^2+y^2}\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right]. \end{aligned}\right.$$

Cherchons enfin si la première des formes (B) contient des intégrales. Cette forme est

$$\xi = \int \frac{d\theta}{2\sqrt{C + 2\varphi(\operatorname{tang}\theta)}}$$

$$- F\left[x^2 + y^2,\ xy' - yx'^2 - 2\varphi\left(\frac{y}{x}\right),\ x'^2 + y'^2 - \frac{2}{r^2 + y^2}\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right],$$

où C_3 désigne l'expression $(xy' - yx')^2 - 2\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, que l'on doit regarder comme constante dans l'intégration.

Si l'on forme la dérivée de ξ et que l'on y remplace $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ par leurs valeurs déduites des équations différentielles du mouvement, puis $\frac{d\theta}{dt}$ par $\frac{xy' - yx'}{x^2 + y^2}$, il vient

$$(23) \qquad \frac{xy' - yx'}{(x^2 + y^2)\sqrt{C + 2\varphi\left(\frac{y}{x}\right)}} - 2\frac{dF}{du}(xx' + yy') = 0,$$

u désignant, comme précédemment, la somme $x^2 + y^2$. Si dans l'équation (23) nous remplaçons $x^2 + y^2$ par u, C_3 par $(xy' - yx')^2 - 2\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, et $xx' + yy'$ par sa valeur $\sqrt{uw - w}$, trouvée précédemment, elle devient

$$\frac{1}{2u} + 2\frac{dF}{du}\sqrt{uw - w} = 0;$$

on en déduit

$$F = -\frac{1}{4}\log\frac{\sqrt{uw - w} - \sqrt{w}}{\sqrt{uw - w} + \sqrt{w}} + \psi(v, w),$$

ce qui nous fait connaître la quatrième intégrale

$$(24) \qquad \xi = \int \frac{d\theta}{2\sqrt{C + 2\varphi(\operatorname{tang}\theta)}} - \frac{1}{4}\log\frac{\sqrt{uw - w} - \sqrt{w}}{\sqrt{uw - w} + \sqrt{w}} + \psi(v, w).$$

Cette quatrième intégrale, jointe à celles que nous avions déjà, complète la solution du problème.

V.

J'appliquerai la même méthode à une question qui a beaucoup occupé les géomètres, le mouvement d'un point attiré vers deux centres fixes par des forces inversement proportionnelles au carré de la distance.

En prenant pour axe des x la droite qui joint les deux points fixes, on peut regarder le mobile comme restant toujours dans un même plan passant par cet axe, pourvu que l'on ajoute aux forces qui le sollicitent une force fictive parallèle à l'axe des y et représentée par $\frac{\alpha^2}{y}$, α étant une constante. Les équations différentielles du mouvement sont alors

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x', \quad \dfrac{dx'}{dt} = -\dfrac{m(x-a)}{[(x-a)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{m'(x+a)}{[(x+a)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}}, \\ \dfrac{dy}{dt} = y', \quad \dfrac{dy'}{dt} = -\dfrac{my}{[(x-a)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{m'y}{[(x+a)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{\alpha^2}{y}. \end{cases}$$

On déduit de ces équations, à l'aide d'une combinaison due à Euler,

$$(2)\quad \begin{cases} (xy' - yx')^2 - \dfrac{2ma(x-a)}{[(x-a)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{2m'a(x+a)}{[(x+a)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}} \\ \qquad + \dfrac{\alpha^2 x}{y^2} - a^2 y'^2 - \dfrac{\alpha^2 a}{y^2} = \beta, \end{cases}$$

β étant une constante arbitraire. C'est une première intégrale du problème. Nous allons en chercher d'autres qui, combinées avec celle-là, rendent l'équation de Poisson identique.

Soit

$$(3)\qquad \eta = F(t, x, y, x', y')$$

une telle intégrale. η doit satisfaire à l'équation différentielle partielle

$$(4)\quad \begin{cases} -2\dfrac{d\eta}{dx}(xy' - yx')y \\ -\dfrac{d\eta}{dx'}\left\{2(xy' - yx')y' - \dfrac{2may^2}{[(x-a)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{2m'ay}{[(x+a)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{2a^2}{y}\right\} \\ +\dfrac{d\eta}{dy}[2(xy' - yx')x - 2a^2y'] \\ +\dfrac{d\eta}{dy'}\left\{2(xy' - yx')x' - \dfrac{2may(x-a)}{[(x-a)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{2m'ay(x+a)}{[(x+a)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{2a^2x}{y} - \dfrac{2\alpha^2 a}{y^2}\right\} = 0, \end{cases}$$

ou à la même équation dans laquelle le second membre serait remplacé par l'unité.

Pour intégrer l'équation (4), il faut traiter d'abord le système des équations simultanées,

$$\frac{d\eta}{0} = -\frac{dx}{2y(xy' - yx')}$$

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{-dx'}{2(xy' - yx')\left(y' - \frac{2may^2}{[(x-a)^2+y^2]^2} + \frac{2m'ay^2}{[(x+a)^2+y^2]^2} + \frac{2x^2x}{y^2}\right)} = \frac{dy}{2(xy' - yx')(x - 2ax^2)} \\ &= \frac{dy'}{2(xy' - yx')\left(x' - \frac{2may(x-a)}{[(x-a)^2+y^2]^2} + \frac{2m'ay(x+a)}{[(x+a)^2+y^2]^2} + \frac{2a^2x^2}{y} - \frac{2x^3a^2}{y}\right)}. \end{aligned}\right.$$

Nous connaissons, à priori, trois intégrales de ce système, car nous connaissons deux formes de la fonction η qui satisfont à la condition demandée, savoir le premier membre de l'équation d'Euler, et le premier membre de l'intégrale des forces vives. Les équations (5) ont donc pour intégrales :

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \xi = (xy' - yx')^2 - &\frac{2ma(x-a)}{[(x-a)^2+y^2]^2} + \frac{2m'a(x+a)}{[(x+a)^2+y^2]^2} \\ &+ \frac{2x^2x}{y^2} - a^2y'^2 - \frac{x^2a}{y^2}, \end{aligned}\right.$$

$$(7)\quad h = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) - \frac{m}{[(x-a)^2+y^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{m'}{[(x+a)^2+y^2]^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^2}{2y^2},$$

$$(8)\quad \eta = c.$$

Pour en trouver une quatrième, remarquons que le multiplicateur du système des équations (5) est l'unité. Il est facile de le constater en formant la somme des dérivées des dénominateurs de ses quatre membres, prises, respectivement, par rapport aux variables dont la différentielle forme le numérateur; on trouvera que cette somme est nulle, et c'est précisément la condition pour que le multiplicateur soit l'unité. D'après cela, si l'on résolvait les équations (6) et (7) par rapport à x' et à y', et qu'on remplaçât ces deux lettres par leur

valeur dans l'expression

$$\frac{[2(xy'-yx')x-2a^2y']\,dx+2y(xy'-yx')\,dy}{\frac{d\beta}{dx'}\frac{dh}{dy'}-\frac{d\beta}{dy'}\frac{dh}{dx'}}.$$

cette expression deviendrait une différentielle exacte, et la quatrième intégrale du système des équations (5) est

$$(9)\qquad \delta=\int\frac{[(xy'-yx')x-a^2y']\,dx+y(xy'-yx')\,dy}{\frac{d\beta}{dx'}\frac{dh}{dy'}-\frac{d\beta}{dy'}\frac{dh}{dx'}}.$$

D'après cela, la valeur la plus générale de γ qui satisfasse à l'équation (4) est

$$\gamma=F(\beta,\ h,\ \delta,\ t),$$

et, par conséquent, les intégrales qui, combinées avec celle d'Euler, donneraient à l'équation de Poisson la forme identique $o=o$, sont de la forme

$$(10)\qquad \gamma=F(\beta,\ h,\ \delta),$$

$$(11)\qquad \gamma=t+F(\beta,\ h,\ \delta).$$

Pour décider s'il existe ou non des intégrales comprises dans l'une ou l'autre de ces formes, il faut former préalablement la dérivée de δ par rapport au temps en ayant égard aux équations différentielles du mouvement. Pour trouver cette dérivée, il suffit de supprimer le signe $\int$ dans l'expression (9) et de remplacer dx et dy par x' et y'; on obtient ainsi, après avoir remplacé $\frac{d\beta}{dx'}$, $\frac{d\beta}{dy'}$, $\frac{dh}{dx'}$, $\frac{dh}{dy'}$ par leurs valeurs,

$$\frac{d\delta}{dt}=\frac{(y'x-x'y)(xx'-a^2y'x'+yy'(xy'-yx'))}{xy(x'^2-y'^2)+(a^2-x^2+y^2)x'y'}=-1;$$

de sorte que δ ne reste pas constant pendant la durée du mouvement, et comme β et h, au contraire, restent constants, l'expression (10) ne peut être une intégrale qu'à la condition de ne pas contenir δ, et

d'être, par conséquent, une simple combinaison de l'intégrale d'Euler avec celle des forces vives.

Pour chercher les intégrales comprises dans la forme (11), il faut égaler sa dérivée à zéro; on trouve ainsi

$$0 = 1 + \frac{dF}{d\delta},$$

donc

$$F = -\delta + \psi(h, \beta),$$

et, par conséquent, nous avons l'intégrale

$$(12)\quad \gamma = t - \delta + \psi(h, \beta) = t - \int \frac{[xy' - yx'](x - a)y'\,dx + y(xy' - yx')\,dy}{xy(x'^2 - y'^2) + (a^2 - x^2 + y^2)x'y'} + \psi(\beta, h).$$

Cette intégrale, dans laquelle on peut supprimer le terme $\psi(\beta, h)$ qui est constant, donnera un résultat identique de la forme $0 = 0$, quand on la combinera avec l'intégrale d'Euler.

Cherchons enfin à intégrer l'équation différentielle partielle obtenue en remplaçant par $+1$ le second membre de l'équation (4). Cette équation nous fournira les intégrales qui, combinées avec celle d'Euler, donnent un résultat de la forme $1 = 1$.

Les équations simultanées qu'il faut intégrer sont cette fois

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} d\gamma &= -\frac{dx}{2y(xy' - yx')} \\ &= -\frac{dx'}{2(xy' - yx')y' - \dfrac{2may}{[(x-a)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{2m'ay}{[(x+a)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{2a^2x}{y^2}} = \frac{dy}{2(xy' - yx')x - 2a^2y} \\ &= \frac{dy'}{2(xy' - yx')y' - \dfrac{2may(x-a)}{[(x-a)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{2m'ay(x+a)}{[(x+a)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{2a^2x}{y^2} - \dfrac{2x^2a^2}{y^3}}. \end{aligned}\right.$$

On a, d'après ces équations,

$$(14)\quad \frac{dx}{d\gamma} = -2y(xy' - yx'), \quad \frac{dy}{d\gamma} = 2(xy' - yx')x - 2a^2y,$$

d'où l'on déduit

$$(15)\qquad d\gamma = \frac{y'\,dx - x'\,dy}{-2y'y(xy' - yx') - 2xx'(xy' - yx') + 2a^2y'x'}.$$

Or, les équations (13) ne différant des équations (5) que par l'adjonction du premier membre $d\gamma$ substitué à $\frac{d\gamma}{0}$, elles admettent toutes les intégrales de ces équations (5) dans lesquelles ne figure pas γ, et, en particulier, les intégrales (6) et (7). On pourra donc, de ces deux intégrales, déduire l'expression de x' et de y' en fonction de x et de y, et les substituer dans l'équation (15). Or on peut s'assurer (par un calcul un peu long) que le second membre de cette équation devient ainsi une différentielle exacte. On obtient donc, pour la quatrième intégrale des équations (13),

$$\gamma = \int \frac{y'\,dx - x'\,dy}{-2yy'(xy' - yx') - 2xx'(xy' - yx') + 2a^2x'y'} = \varepsilon,$$

et, par conséquent, la forme la plus générale de γ qui puisse satisfaire à l'équation (4), quand on lui donne l'unité pour second membre, est

$$\gamma = \int \frac{y'\,dx - x'\,dy}{-2yy'(xy' - yx') - 2xx'(xy' - yx') + 2a^2x'y'} + F(h, \beta, \delta).$$

En égalant à zéro la dérivée de γ, on trouve

$$\frac{dF}{d\delta} = 0.$$

car h et β sont constants en vertu des équations différentielles du mouvement, et l'on a, en vertu des mêmes équations,

$$y'\frac{dx}{dt} - x'\frac{dy}{dt} = y'x' - x'y' = 0.$$

La quatrième intégrale du problème est donc, si l'on supprime le terme constant $F(h, \beta)$,

$$\gamma = \int \frac{y'\,dx - x'\,dy}{-2yy'(xy' - yx') - 2xx'(xy' - yx') + 2a^2x'y'},$$

dans laquelle l'intégration du second membre devra être effectuée apres que l'on aura remplacé x' et y' par leurs valeurs en x et y déduites de l'intégrale des forces vives et de l'intégrale d'Euler.

Le problème est complétement résolu, puisque nous en avons quatre intégrales.

VI.

En comparant les résultats obtenus dans les trois cas traités jusqu'ici, nous apercevons qu'ils sont entièrement analogues. Après avoir trouvé une intégrale autre que celle des forces vives, nous en obtenons, dans chacun de ces problèmes, une troisième, qui contient le temps, par la condition que, combinée à la première, elle donne à l'équation de Poisson la forme $0 = 0$; puis nous trouvons une quatrième intégrale, qui complète la solution, en exprimant que l'équation de Poisson se réduit à $1 = 1$. Cette grande similitude des résultats relatifs à trois questions différentes n'est pas due au hasard. On peut prouver qu'il doit en être ainsi toutes les fois qu'il s'agit du mouvement d'un point dans un plan, ou, plus généralement, toutes les fois que les coordonnées des points du système peuvent s'exprimer en fonction de deux variables indépendantes.

Soient, en effet,

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{dH}{dp_1}, \quad \frac{dp_1}{dt} = -\frac{dH}{dq_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{dH}{dp_2}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{dH}{dq_2},$$

les équations différentielles d'un tel problème. Supposons connue, outre l'intégrale des forces vives $H = \alpha$, une seconde intégrale $F = \beta$, et cherchons s'il en existe une troisième $\psi = \gamma$, qui, combinée avec la seconde, donne à l'équation de Poisson la forme $0 = 0$.

En exprimant que cette condition est remplie, et, en outre, que γ est une intégrale, nous obtiendrons, si nous supposons d'abord que cette intégrale ne contienne pas le temps,

$$(1) \qquad \frac{d\gamma}{dp_1}\frac{d\beta}{dq_1} - \frac{d\gamma}{dq_1}\frac{d\beta}{dp_1} + \frac{d\gamma}{dp_2}\frac{d\beta}{dq_2} - \frac{d\gamma}{dq_2}\frac{d\beta}{dp_2} = 0,$$

$$(2) \qquad \frac{d\gamma}{dp_1}\frac{dH}{dq_1} - \frac{d\gamma}{dq_1}\frac{dH}{dp_1} + \frac{d\gamma}{dp_2}\frac{dH}{dq_2} - \frac{d\gamma}{dq_2}\frac{dH}{dp_2} = 0,$$

équations auxquelles nous pouvons adjoindre l'équation identique

$$(3) \qquad \frac{d\gamma}{dp_1}\frac{d\gamma}{dq_1} - \frac{d\gamma}{dq_1}\frac{d\gamma}{dp_1} + \frac{d\gamma}{dp_2}\frac{d\gamma}{dq_2} - \frac{d\gamma}{dq_2}\frac{d\gamma}{dp_2} = 0$$

Or, on peut considérer les trois équations (1), (2), (3) comme trois

équations du premier degré en $\frac{d\gamma}{dp_1}, \frac{d\gamma}{dq}, \frac{d\gamma}{dp_2}, \frac{d\gamma}{dq_2}$, pourvu que, dans l'équation (3), on regarde les coefficients comme égaux aux inconnues elles-mêmes. Ces équations du premier degré donneraient l'expression des rapports $\frac{d\gamma}{dp_1} : \frac{d\gamma}{dq}, \frac{d\gamma}{dp_2} : \frac{d\gamma}{dq_1}, \frac{d\gamma}{dp_2} : \frac{d\gamma}{dq_1}$. Or il est facile de voir que les équations (1), (2), (3) seraient également satisfaites si les inconnues $\frac{d\gamma}{dp}, \frac{d\gamma}{dp_2}, \frac{d\gamma}{dq}, \frac{d\gamma}{dq_2}$ étaient remplacées par $\frac{d\beta}{dp}, \frac{d\beta}{dp}, \frac{d\beta}{dq}, \frac{d\beta}{dq_2}$ [la substitution ne doit pas être faite dans les coefficients de l'équation (3)]. Il en résulte que ces nouvelles quantités ont les mêmes rapports que les premières, et que, par conséquent,

$$\frac{\frac{d\gamma}{dp_1}}{\frac{d\beta}{dp}} = \frac{\frac{d\gamma}{dp_2}}{\frac{d\beta}{dp_2}} = \frac{\frac{d\gamma}{dq_1}}{\frac{d\beta}{dq}} = \frac{\frac{d\gamma}{dq_2}}{\frac{d\beta}{dq_2}},$$

d'où l'on conclut facilement que γ doit être une fonction de β, et que, par suite, l'intégrale $\gamma = \psi$, supposée indépendante du temps, n'est pas distincte de celle que l'on connaissait déjà.

Le raisonnement qui précède serait en défaut si l'une des équations (1), (2), (3) rentrait dans les autres; mais il faudrait alors, d'après la théorie des équations du premier degré, que l'on eût des relations de la forme

$$\frac{d\gamma}{dq_1} = M\frac{d\beta}{dq_1} - N\frac{dH}{dq}, \quad \frac{d\gamma}{dp_1} = M\frac{d\beta}{dp_1} + N\frac{dH}{dp_1},$$

$$\frac{d\gamma}{dq_2} = M\frac{d\beta}{dq_2} - N\frac{dH}{dq_2}, \quad \frac{d\gamma}{dp_2} = M\frac{d\beta}{dp_2} + N\frac{dH}{dp_2}.$$

M et N désignant des fonctions quelconques de p_1, p_2, q_1, q_2. Or on déduit de ces équations que γ doit être une fonction de β et de H, c'est-à-dire encore que l'intégrale γ doit rentrer dans celle que l'on avait déjà.

Comme il existe trois intégrales distinctes, et pas davantage, qui sont indépendantes du temps, il résulte de ce qui précède, que, parmi ces intégrales, il y en a nécessairement qui ne donnent pas à l'équation de Poisson la forme $0 = 0$.

Soit $\delta = \varphi$ une de ces intégrales. Posons

$$(\delta, \beta) = \varepsilon.$$

Si ε est une constante numérique, il est prouvé, comme nous l'avons annoncé, qu'il existe une intégrale qui, combinée avec β, donne à l'équation de Poisson la forme $1 = 1$.

Si ε n'est pas une constante numérique,

$$\varepsilon = \text{constante}$$

est une intégrale indépendante du temps qui, évidemment, doit rentrer dans les trois précédentes; on aura donc

$$(\delta, \beta) = F(\alpha, \beta, \delta).$$

Posons actuellement

$$\psi(\alpha, \beta, \delta) = \eta;$$

η sera une intégrale des équations proposées, et l'on aura (§ Ier)

$$(\eta, \beta) = (\alpha, \beta)\frac{d\eta}{d\alpha} + (\delta, \beta)\frac{d\eta}{d\delta} = F(\alpha, \beta, \delta)\frac{d\eta}{d\delta},$$

puisque (α, β) est égal à zéro. Or on peut évidemment poser

$$F(\alpha, \beta, \delta)\frac{d\eta}{d\delta} = 1.$$

et déterminer par là la forme de η qui, combinée avec l'intégrale β, donne à l'équation de Poisson la forme illusoire $1 = 1$.

Prouvons enfin qu'il existe une intégrale de la forme

$$\gamma = t + F(q_1, q_2, p_1, p_2),$$

qui, combinée avec β, donne à l'équation de Poisson la forme $0 = 0$.

Considérons, pour cela, l'une quelconque des intégrales dans lesquelles figure le temps

$$\zeta = t + F(q_1, q_2, p_1, p_2).$$

Si nous combinons ζ avec β, le temps t disparaîtra, et nous aurons, pour (ζ, β), une expression qui sera zéro, auquel cas le théorème est démontré, ou une constante numérique, ou une intégrale nouvelle.

Dans les deux derniers cas, nous pouvons poser

$$(\zeta, \beta) = \chi(\alpha, \beta, \eta),$$

car toute intégrale indépendante du temps peut être considérée comme une combinaison des trois intégrales α, β, η. Si (ζ, β) est une constante numérique, la fonction χ se réduira à une constante.

Nous pouvons ajouter au second membre de l'intégrale ζ une fonction quelconque de (α, β, η), et nous formons une intégrale nouvelle

$$\eta_1 = t + F(q_1, q_2, p_1, p_2) + \pi(\alpha, \beta, \eta),$$

et nous aurons évidemment, puisque $(\eta, \beta) = 1$,

$$(\eta_1, \beta) = (\eta, \beta) + [\pi(\alpha, \beta, \eta), \beta] = \chi(\alpha, \beta, \eta) + \frac{d\pi}{d\eta}.$$

Or, on peut poser

$$\chi(\alpha, \beta, \eta) + \frac{d\pi}{d\eta} = 0,$$

et en déduire par une quadrature l'expression de π en fonction de α, β, η. En adoptant cette expression, l'intégrale η_1, combinée avec α, donnera à l'expression de Poisson la forme $0 = 0$.

VII.

Nous allons étudier, pour quatrième exemple, un problème un peu plus compliqué. Nous supposerons deux points attirés vers un centre fixe et s'attirant, en outre, mutuellement, la loi d'attraction étant représentée par une fonction quelconque de la distance.

Les équations différentielles du mouvement sont

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dy}{dt} = y', \quad \frac{dz}{dt} = z', \quad \frac{dx_1}{dt} = x'_1, \quad \frac{dy_1}{dt} = y'_1, \quad \frac{dz_1}{dt} = z'_1,\\
&\frac{dx'}{dt} = \frac{\mu x}{r}\varphi(r) + \frac{m_1(x - x_1)}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}}\varphi[(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2],\\
&\frac{dx'_1}{dt} = \frac{\mu x_1}{r_1}\varphi(r_1) - \frac{m(x - x_1)}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}}\varphi[(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2],
\end{aligned}\right.$$

et quatre autres qui se déduiraient des deux dernières en changeant x et x_1 en y, y_1 et en z, z_1.

Le principe des aires nous fournit les trois intégrales

$$(2)\quad \begin{cases} m(xy' - yx') + m_1(x_1y'_1 - y_1x'_1) = \alpha_1, \\ m(xz' - yz') + m_1(x_1z'_1 - z_1x'_1) = \alpha_2, \\ m(yz' - zy') + m_1(y_1z'_1 - z_1y'_1) = \alpha_3. \end{cases}$$

Cherchons d'abord la forme des intégrales qui, combinées avec α_1, donnent à l'équation de Poisson la forme illusoire $0 = 0$.

Soit

$$(3)\quad \beta = \varphi(x, y, z, x_1, y_1, z_1, t)$$

une telle intégrale. β devra satisfaire à l'équation différentielle partielle

$$\frac{d\beta}{dx}\frac{d\alpha_1}{dmx'} - \frac{d\beta}{dmx'}\frac{d\alpha_1}{dx} + \frac{d\beta}{dy}\frac{d\alpha_1}{dmy'} - \frac{d\beta}{dmy'}\frac{d\alpha_1}{dy} + \frac{d\beta}{dx_1}\frac{d\alpha_1}{dmx'_1}$$
$$- \frac{d\beta}{dmx'_1}\frac{d\alpha_1}{dx_1} + \frac{d\beta}{dy_1}\frac{d\alpha_1}{dmy'_1} - \frac{d\alpha_1}{dy_1}\frac{d\beta}{dmy'_1} = 0.$$

En remplaçant les dérivées de α_1 par leurs valeurs, cette équation devient

$$(4)\quad \begin{aligned} &-y\frac{d\beta}{dx} - y'\frac{d\beta}{dx'} + x\frac{d\beta}{dy} + x'\frac{d\beta}{dy'} - y_1\frac{d\beta}{dx_1} - y'_1\frac{d\beta}{dx'_1} \\ &\qquad + x_1\frac{d\beta}{dy_1} + x'_1\frac{d\beta}{dy'_1} = 0. \end{aligned}$$

Pour l'intégrer, il faut traiter d'abord le système des équations simultanées

$$-\frac{dx}{y} = -\frac{dx'}{y'} = \frac{dy}{x} = \frac{dy'}{x'} = -\frac{dx_1}{y_1} = -\frac{dx'_1}{y'_1} = \frac{dy_1}{x_1} = \frac{dy'_1}{x'_1} = \frac{d\beta}{0};$$

une première intégrale de ce système est

$$\beta = C_1,$$

et l'on reconnaît aisément que les autres sont

$$(5)\quad \begin{cases} x^2 + y^2 = C_2, \\ x_1^2 + y_1^2 = C_3, \\ x'^2 + y'^2 = C_4, \\ x'^2_1 + y'^2_1 = C_5, \\ xx' + yy' = C_6, \\ x_1x'_1 + y_1y'_1 = C_7, \\ xx_1 + yy_1 = C_8: \end{cases}$$

en sorte que la forme la plus générale que l'on puisse adopter pour β est

$$(6)\quad \beta = \varphi(x^2+y^2,\ x_1^2+y_1^2,\ x'^2+y'^2,\ x_1'^2+y_1'^2,\ xx'+yy',\ x_1x_1'+y_1y_1',\ xx_1+yy_1,\ z,\ z',\ z_1,\ z_1',\ t).$$

Si nous cherchions de la même manière les intégrales qui, combinées avec α_2, donnent à l'équation de Poisson la forme $o = o$, nous trouverions qu'elles sont de la forme

$$(7)\quad \beta = \varphi(x^2+z^2,\ x_1^2+z_1^2,\ x'^2+z'^2,\ x_1'^2+z_1'^2,\ xx'+zz',\ x_1x_1'+z_1z_1',\ xx_1+zz_1,\ y,\ y',\ y_1,\ y_1',\ t).$$

et, enfin, celles qui, combinées avec α_3, donnent un résultat illusoire, sont de la forme

$$(8)\quad \beta = \varphi(y^2+z^2,\ y_1^2+z_1^2,\ y'^2+z'^2,\ y_1'^2+z_1'^2,\ yy'+zz',\ y_1y_1'+z_1z_1',\ yy_1+zz_1,\ x,\ x',\ x_1,\ x_1',\ t).$$

Or je dis que la forme suivante

$$(9)\quad \beta = F\begin{pmatrix} x^2+y^2+z^2,\ x_1^2+y_1^2+z_1^2,\ x'^2+y'^2+z'^2,\ x_1'^2+y_1'^2+z_1'^2,\ xx'+yy'+zz', \\ x_1x_1'+y_1y_1'+z_1z_1',\ xx_1'+yy_1'+zz_1',\ x_1x'+y_1y'+z_1z',\ xx_1+yy_1+zz_1,\ t \end{pmatrix}$$

est comprise dans les trois précédentes et satisfait aux trois conditions à la fois.

Il suffit, en effet, à cause de la symétrie, de prouver que cette dernière forme est comprise dans la forme (6). Or il est évident que $x^2+y^2+z^2$, $x_1^2+y_1^2+z_1^2$, $x'^2+y'^2+z'^2$, $x_1'^2+y_1'^2+z_1'^2$, $xx'+yy'+zz'$, $x_1x_1'+y_1y_1'+z_1z_1'$, $xx_1+yy_1+zz_1$, sont précisément des fonctions des quantités qui figurent dans cette forme (6); il suffit donc de prouver qu'il en est de même de $xx_1'+yy_1'+zz_1'$, et de $x_1x'+y_1y'+z_1z'$: or on a, identiquement,

$$xx_1'+yy_1'+zz_1'$$

$$= zz' + \frac{x_1x_1'+y_1y_1')(xx_1+yy_1)+\sqrt{[(x_1^2+y_1^2)(x'^2+y'^2)-(x_1x_1'+y_1y_1')^2]}\sqrt{(x^2+y^2)(x_1^2+y_1^2)-(xx_1+yy_1)^2}}{x_1^2+y_1^2},$$

$$x_1x'+y_1y'+z_1z'$$

$$= zz' + \frac{(xx'+yy')(xx_1+yy_1)+\sqrt{[(x^2+y^2)(x_1'^2+y_1'^2)-(xx'+yy')^2](x_1^2+y_1^2)(x^2+y^2)-(xx_1+yy_1)^2}}{x^2+y^2},$$

et ces équations donnent précisément l'expression des quantités considérées en fonction de celles qui figurent dans la forme (6).

Cherchons, actuellement, si le probleme admet des intégrales de la forme (9)

$$(9)\qquad \beta = F\left(\begin{matrix} x^2+y^2+z^2, & x_1^2+y_1^2+z_1^2, & x'^2+y'^2+z'^2, & x_1'^2+y_1'^2+z_1'^2, & xx'+yy'+zz', \\ x_1x_1'+y_1y_1'+z_1z_1', & xx_1'+yy_1'+zz_1', & x_1x'+y_1y'+z_1z', & xx_1+yy_1+zz_1 \end{matrix}\right).$$

Pour cela, écrivons que la dérivée de β est nulle lorsqu'on a égard aux équations différentielles du mouvement ; en posant

$$\begin{matrix} x^2+y^2+z^2=u, & x'^2+y'^2+z'^2=v, & xx'+yy'+zz'=w, & x_1x'+y_1y'+z_1z'=R, \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2=u_1, & x_1'^2+y_1'^2+z_1'^2=v_1, & x_1x_1'+y_1y_1'+z_1z_1'=w_1, & xx_1'+yy_1'+zz_1'=R_1, \end{matrix} \quad xx_1+yy_1+zz_1=Q,$$

nous obtiendrons

$$\begin{aligned}
&2\frac{dF}{du}w + 2\frac{dF}{du_1}w_1 + 2\frac{dF}{dv}\left[\frac{w\mu}{\sqrt{u}}\varphi(u) + \frac{(w-R)m_1}{\sqrt{u+u_1-2Q}}\varphi(u+u_1-2Q)\right] \\
&-2\frac{dF}{dv_1}\left[\frac{w_1\mu}{\sqrt{u_1}}\varphi(u_1) + \frac{(w_1-R_1)m}{\sqrt{u+u_1-2Q}}\varphi(u+u_1-2Q)\right] \\
&+\frac{dF}{dw}\left[v + u\varphi(u)\mu + \frac{(u-Q)m_1}{\sqrt{u+u_1-2Q}}\varphi(u+u_1-2Q)\right] \\
&+\frac{dF}{dw_1}\left[v_1 + u_1\varphi(u_1)\mu + \frac{(u_1-Q)m}{\sqrt{u+u_1-2Q}}\varphi(u+u_1-2Q)\right] \\
&+\frac{dF}{dQ}(R+R_1) + \frac{dF}{dR}\left[x'x_1'+y'y_1'+z'z_1' + \frac{\mu Q}{\sqrt{u}}\varphi(u) + \frac{R_1(u_1-Q)m}{\sqrt{u+u_1-2Q}}\varphi(u+u_1-2Q)\right] \\
&+\frac{dF}{dR_1}\left[x_1'x'+y_1'y'+z_1'z' + \frac{\mu Q}{\sqrt{u_1}}\varphi(u_1) + \frac{R_1(u-Q)m_1}{\sqrt{u+u_1-2Q}}\varphi(u+u_1-2Q)\right] = 0.
\end{aligned}$$

Pour prouver que l'on peut déduire de cette équation l'expression de F, en fonction de u, u_1, v, v_1, v, w, Q, R, R_1, il suffit de vérifier que les coefficients sont fonctions de ces neuf seules variables, et tout se réduit évidemment à montrer que $x'x_1'+y'y_1'+z'z_1'$ est une fonction de u, u_1, v, v_1, w, w_1, R, R_1, Q.

Le calcul qui conduirait à cette expression serait assez pénible. Nous nous bornerons à prouver ici qu'il y a possibilité d'obtenir ce résultat. Considérons, pour cela, quatre droites passant par l'origine des coordonnées, et dont deux coïncident avec les rayons vecteurs des points mobiles, tandis que les autres sont paralleles aux directions de leurs vitesses. Désignons ces droites par oM, oM_1, oV, oV_1. On aura

évidemment pour les cosinus des angles qu'elles forment deux à deux,

$$\cos \overline{oM.oM_1} = \frac{Q}{\sqrt{uu_1}}, \quad \cos oM.oV = \frac{w}{\sqrt{uv}}, \quad \cos oM.oV' = \frac{R_1}{\sqrt{uv}},$$

$$\cos oM_1oV' = \frac{w_1}{\sqrt{u_1v_1}}, \quad \cos oM_1oV = \frac{R}{\sqrt{u_1v}}, \quad \cos \overline{oV.oV'} = \frac{x'x'_1 + y'y'_1 + z'z'_1}{\sqrt{vv_1}};$$

or, les méthodes de la trigonométrie sphérique permettent de calculer l'angle $\overline{oV.oV'}$ en fonction des cinq autres. Cela revient à résoudre un quadrilatère sphérique, connaissant trois côtés et les deux diagonales. On exprimera, par conséquent, $x'x'_1 + y'y'_1 + z'z'_1$, en fonction des neuf variables u, u_1, etc.

Il est donc démontré que la fonction F, pour représenter une intégrale du problème, est assujettie seulement à satisfaire à une équation différentielle partielle linéaire dont les coefficients sont des fonctions connues des neuf variables qui entrent dans F. L'intégration de cette équation conduirait à une fonction arbitraire de huit expressions déterminées qui contiendraient ces variables.

Chacune de ces expressions, égalée à une constante, fournira une intégrale du problème : l'une de ces huit intégrales sera évidemment l'intégrale des forces vives. Nous devons nous demander si les sept autres sont distinctes de celles des aires. Pour répondre à cette question, il faut résoudre le problème suivant :

Quelles sont les intégrales résultant de la combinaison des équations des aires, et qui, combinées avec chacune de ces équations, donnent à l'équation de Poisson la forme o = o?

Soit

$$\psi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \beta$$

une des intégrales cherchées. D'après ce que nous avons vu (§ Ier), on a

$$(\beta, \alpha_1) = (\alpha_2, \alpha_1)\frac{d\beta}{d\alpha_2} + (\alpha_3, \alpha_1)\frac{d\beta}{d\alpha_3},$$

$$(\beta, \alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2)\frac{d\beta}{d\alpha_1} + (\alpha_3, \alpha_1)\frac{d\beta}{d\alpha_3},$$

$$(\beta, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_3)\frac{d\beta}{d\alpha_1} + (\alpha_2, \alpha_3)\frac{d\beta}{d\alpha_2}.$$

Or, on vérifie facilement que

$$(\alpha_2, \alpha_1) = \alpha_3, \quad (\alpha_3, \alpha_2) = \alpha_1, \quad (\alpha_1, \alpha_3) = \alpha_2,$$

et les équations précédentes deviennent

$$(\beta, \alpha_1) = \alpha_3 \frac{d\beta}{d\alpha_2} - \alpha_2 \frac{d\beta}{d\alpha},$$

$$(\beta, \alpha_2) = -\alpha_3 \frac{d\beta}{d\alpha_1} + \alpha_1 \frac{d\beta}{d\alpha},$$

$$(\beta, \alpha_3) = \alpha_2 \frac{d\beta}{d\alpha_1} - \alpha_1 \frac{d\beta}{d\alpha_2}.$$

En égalant ces trois expressions à zéro, on obtient, pour déterminer β, la condition suivante :

$$\frac{\frac{d\beta}{d\alpha_1}}{\alpha_1} = \frac{\frac{d\beta}{d\alpha_2}}{\alpha_2} = \frac{\frac{d\beta}{d\alpha}}{\alpha},$$

de laquelle on conclut aisément

$$\beta = \varphi(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2);$$

et, par conséquent, toutes les intégrales qui satisfont à la condition proposée rentrent les unes dans les autres, et l'on ne doit en considérer qu'une,

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = \beta.$$

On constaterait aisément qu'elle rentre dans la forme générale (19) trouvée plus haut. Cette forme (19) contient donc seulement six intégrales nouvelles du probleme. On s'assurerait, par un calcul tout semblable à celui que nous venons de faire, qu'il existe une intégrale distincte des précédentes et de la forme

$$\beta = t + F(u, u_1, v, v_1, w, w_1, R, R_1, Q).$$

En résumé, le problème que nous venons d'étudier, admet sept intégrales distinctes, outre celles des forces vives, qui, combinées avec les trois équations des aires, donnent à l'équation de Poisson la forme identique $0 = 0$. Pour trouver ces intégrales, il faudrait intégrer une

équation différentielle partielle linéaire à neuf variables indépendantes, et, pour cela, traiter huit équations simultanées du premier ordre.

Mais comme on connaît deux intégrales de ces huit équations, le problème pourra se ramener à l'intégration de six équations du premier ordre.

VIII.

Nous prendrons, pour dernier exemple, le célèbre problème des trois corps. Nous supposerons que ces trois corps, réduits à des points matériels, s'attirent mutuellement suivant des forces fonctions quelconques de la distance. On sait que, sans changer les équations différentielles du problème, on peut supposer que le centre de gravité soit fixe, et rapporter la position des points à trois axes passant par ce centre. En nommant alors x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3, les neuf coordonnées, nous aurons

$$(1)\quad \begin{cases} m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = 0, \\ m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 = 0, \\ m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 = 0, \end{cases}$$

qui permettent d'exprimer les neuf coordonnées en fonctions de six variables seulement; on pourra poser, par exemple,

$$(2)\quad \begin{cases} x_1 = \alpha_1 q_1 + \beta_1 q_2, & y_1 = \alpha_1 q_3 + \beta_1 q_4, & z_1 = \alpha_1 q_5 + \beta_1 q_6, \\ x_2 = \alpha_2 q_1 + \beta_2 q_2, & y_2 = \alpha_2 q_3 + \beta_2 q_4, & z_2 = \alpha_2 q_5 + \beta_2 q_6, \\ x_3 = \alpha_3 q_1 + \beta_3 q_2, & y_3 = \alpha_3 q_3 + \beta_3 q_4, & z_3 = \alpha_3 q_5 + \beta_3 q_6; \end{cases}$$

$q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6$ étant de nouvelles variables, et $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ des constantes assujetties aux seules relations

$$(3)\quad \begin{cases} m_1 \alpha_1 + m_2 \alpha_2 + m_3 \alpha_3 = 0, \\ m_1 \beta_1 + m_2 \beta_2 + m_3 \beta_3 = 0. \end{cases}$$

Si l'on pose, de plus,

$$(4)\quad \begin{cases} 1 = m_1 \alpha_1^2 + m_2 \alpha_2^2 + m_3 \alpha_3^2, \\ 1 = m_1 \beta_1^2 + m_2 \beta_2^2 + m_3 \beta_3^2, \\ 0 = m_1 \alpha_1 \beta_1 + m_2 \alpha_2 \beta_2 + m_3 \alpha_3 \beta_3, \end{cases}$$

l'expression de la demi-somme des forces vives deviendra

$$(5)\qquad T = \frac{1}{2}(q_1'^2 + q_2'^2 + q_3'^2 + q_4'^2 + q_5'^2 + q_6'^2);$$

et, par conséquent, en vertu des formules de Lagrange, rapportées au commencement de ce Mémoire, les équations différentielles du mouvement seront

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{dq_1'}{dt} = \dfrac{dU}{dq_1}, & \dfrac{dq_2'}{dt} = \dfrac{dU}{dq_2}, & \dfrac{dq_3'}{dt} = \dfrac{dU}{dq}, \\ \dfrac{dq_4'}{dt} = \dfrac{dU}{dq_4}, & \dfrac{dq_5'}{dt} = \dfrac{dU}{dq_5}, & \dfrac{dq_6'}{dt} = \dfrac{dU}{dq_6}, \end{array}\right.$$

U désignant la fonction des forces, qui est ici

$$U = \sum m_1 m_2 \psi[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2];$$

ψ désignant une certaine fonction dont la forme dépend de la loi d'attraction.

Or on a, d'après la formule (2), pour exprimer les distances mutuelles des trois points,

$$\begin{aligned} \rho_3^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 (z_1 - z_2)^2 \\ &= (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (q_1^2 + q_3^2 + q_5^2) + (\beta_1 - \beta_2)^2 (q_2^2 + q_4^2 + q_6^2) \\ &\quad + 2(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2)(q_1 q_2 + q_3 q_4 + q_5 q_6), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_1^2 &= (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2 \\ &= (\alpha_2 - \alpha_3)^2 (q_1^2 + q_3^2 + q_5^2) + (\beta_2 - \beta_3)^2 (q_2^2 + q_4^2 + q_6^2) \\ &\quad + 2(\alpha_2 - \alpha_3)(\beta_2 - \beta_3)(q_1 q_2 + q_3 q_4 + q_5 q_6), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_2^2 &= (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2 \\ &= (\alpha_1 - \alpha_3)^2 (q_1^2 + q_3^2 + q_5^2) + (\beta_1 - \beta_3)^2 (q_2^2 + q_4^2 + q_6^2) \\ &\quad + 2(\alpha_1 - \alpha_3)(\beta_1 - \beta_3)(q_1 q_2 + q_3 q_4 + q_5 q_6). \end{aligned}$$

D'après ces formules, les équations différentielles du mouvement deviennent

$$\frac{dq'_1}{dt} = \sum m_1 m_2 \psi'(\rho_3^2)\left[2(\alpha_1 - \alpha_2)^2 q_1 + 2(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2) 2q_2\right],$$

$$\frac{dq'_2}{dt} = \sum m_1 m_2 \psi'(\rho_3^2)\left[2(\beta_1 - \beta_2)^2 q_2 + 2(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2) q_1\right],$$

$$\frac{dq'_3}{dt} = \sum m_1 m_2 \psi'(\rho_3^2)\left[2(\alpha_1 - \alpha_2)^2 q_3 + 2(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2) q_4\right],$$

$$\frac{dq'_4}{dt} = \sum m_1 m_2 \psi'(\rho_3^2)\left[2(\beta_1 - \beta_2)^2 q_4 + 2(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2) q_3\right],$$

$$\frac{dq'_5}{dt} = \sum m_1 m_2 \psi'(\rho_3^2)\left[2(\alpha_1 - \alpha_2)^2 q_5 + 2(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2) q_6\right],$$

$$\frac{dq'_6}{dt} = \sum m_1 m_2 \psi'(\rho_3^2)\left[2(\beta_1 - \beta_2)^2 q_6 + 2(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2) q_5\right];$$

on en déduit facilement les intégrales suivantes, qui ne sont autre chose que les intégrales des aires écrites dans le nouveau système de variables,

$$q_3 q'_1 - q_1 q'_3 + q_4 q'_2 - q_2 q'_4 = \alpha_1,$$
$$q_5 q'_1 - q_1 q'_5 + q_6 q'_2 - q_2 q'_6 = \alpha_2,$$
$$q_5 q'_3 - q_3 q'_5 + q_6 q'_4 - q_4 q'_6 = \alpha_3.$$

Si nous cherchons les intégrales qui, combinées avec ces trois-là, donnent à l'équation de Poisson la forme identique $0 = 0$, nous trouverons, absolument comme dans le paragraphe précédent, que ces intégrales sont de la forme

$$\beta = F\begin{pmatrix} q_1^2 + q_2^2 + q_3^2,\ q_4^2 + q_5^2 + q_6^2,\ q'^2_1 + q'^2_3 + q'^2_5,\ q'^2_2 + q'^2_4 + q'^2_6,\ q_1 q'_1 + q_3 q'_3 + q_5 q'_5, \\ q_2 q'_2 + q_4 q'_4 + q_6 q'_6,\ q_1 q'_2 + q_3 q'_4 + q_5 q'_6,\ q_2 q'_1 + q_4 q'_3 + q_6 q'_5,\ q_3 q'_2 + q_5 q'_4 + q_1 q'_6 \end{pmatrix},$$

ou représentées par la même équation, au second membre de laquelle on ajouterait le terme t.

Il nous reste à examiner s'il existe, en effet, des intégrales de la forme précédente. Pour cela, prenons la dérivée de β, et écrivons qu'elle est nulle quand on a égard aux équations différentielles du mouvement.

En posant

$$q_1^2 + q_3^2 + q_5^2 = u,\quad q'^2_1 + q'^2_3 + q'^2_5 = v,\quad q_1 q'_1 + q_3 q'_3 + q_5 q'_5 = w,\quad q'_1 q_4 + q'_3 q_6 + q'_5 q_2 = R,$$
$$q_2^2 + q_4^2 + q_6^2 = u_1,\quad q'^2_2 + q'^2_4 + q'^2_6 = v_1,\quad q_2 q'_2 + q_4 q'_4 + q_6 q'_6 = w_1,\quad q_1 q'_2 + q_3 q'_4 + q_5 q'_6 = R_1,$$
$$q_1 q_2 + q_3 q_4 + q_5 q_6 = Q.$$

on trouve l'équation

$$
\begin{aligned}
&2w\frac{dF}{du} + 2w_1\frac{dF}{du_1} + 2\frac{dF}{dv}\left(q'_1\frac{dq'_1}{dt} + q'_3\frac{dq'_3}{dt} + q'_5\frac{dq'_5}{dt}\right) + 2\frac{dF}{dv_1}\left(q'_2\frac{dq'_2}{dt} + q'_4\frac{dq'_4}{dt} + q'_6\frac{dq'_6}{dt}\right)\\
&\quad + \frac{dF}{dv}\left(v + q_1\frac{dq'_1}{dt} + q_3\frac{dq'_3}{dt} + q_5\frac{dq'_5}{dt}\right) + \frac{dF}{dv_1}\left(q_2\frac{dq'_2}{dt} + q_4\frac{dq'_4}{dt} + q_6\frac{dq'_6}{dt} + v_1\right)\\
&\quad - \frac{dF}{dQ}(R + R_1) + \frac{dF}{dR}\left(q'_1q'_2 + q'_3q'_4 + q'_5q'_6 + q_2\frac{dq'_1}{dt} + q_4\frac{dq'_3}{dt} + q_6\frac{dq'_5}{dt}\right)\\
&\quad + \frac{dF}{dR_1}\left(q'_1q'_2 + q'_3q'_4 + q'_5q'_6 + q_1\frac{dq'_2}{dt} + q_3\frac{dq'_4}{dt} + q_5\frac{dq'_6}{dt}\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Il suffit, pour le but que nous nous proposons, de montrer que tous les coefficients de cette équation sont des fonctions des neuf variables u, u_1, v, v_1, w, w_1, R, R_1, Q. Or on trouve, en substituant aux dérivées qui y figurent, leurs valeurs fournies par les équations différentielles du mouvement,

$$
\begin{aligned}
q_1\frac{dq'_1}{dt} + q_3\frac{dq'_3}{dt} + q_5\frac{dq'}{dt} &= \sum \psi'(\rho_3^2)\left[2(\alpha_1 - \alpha_2)^2 w - 2R(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2)\right] m_1 m_2,\\
q'_2\frac{dq'_2}{dt} + q'_4\frac{dq'_4}{dt} + q'_6\frac{dq'_1}{dt} &= \sum \psi'(\rho_3^2)\left[2(\beta_1 - \beta_2)^2 w_1 + 2R_1(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2)\right] m_1 m_2,\\
q_1\frac{dq'}{dt} + q_3\frac{dq'}{dt} + q_5\frac{dq'_5}{dt} &= \sum \psi'(\rho_3^2)\left[2(\alpha_1 - \alpha_2)^2 u + 2(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2)Q\right] m_1 m_2,\\
q_2\frac{dq'_2}{dt} + q_4\frac{dq'_4}{dt} + q_6\frac{dq'_1}{dt} &= \sum \psi'(\rho_3^2)\left[2(\beta_1 - \beta_2)^2 u_1 + 2(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2)Q\right] m_1 m_2,\\
q_2\frac{dq'_1}{dt} + q_4\frac{dq'}{dt} + q_6\frac{dq'_3}{dt} &= \sum \psi'(\rho_3^2)\left[2(\alpha_1 - \alpha_2)^2 Q + 2(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2)u\right] m_1 m_2,\\
q_1\frac{dq'_2}{dt} + q_3\frac{dq'_4}{dt} + q_5\frac{dq_6}{dt} &= \sum \psi'(\rho_3^2)\left[2(\beta_1 - \beta_2)^2 Q + 2(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2)u_1\right] m_1 m_2;
\end{aligned}
$$

et comme ρ_1, ρ_2, ρ_3 s'expriment évidemment par les formules

$$
\begin{aligned}
\rho_1^2 &= (\alpha_2 - \alpha_3)^2 u + (\beta_2 - \beta_3)^2 u_1 + 2(\alpha_2 - \alpha_3)(\beta_2 - \beta_3)Q,\\
\rho_2^2 &= (\alpha_1 - \alpha_3)^2 u + (\beta_1 - \beta_3)^2 u_1 + 2(\alpha_1 - \alpha_3)(\beta_1 - \beta_3)Q,\\
\rho_3^2 &= (\alpha_1 - \alpha_2)^2 u + (\beta_1 - \beta_2)^2 u_1 + 2(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2)Q.
\end{aligned}
$$

il nous reste seulement à prouver que la somme $q'_1q'_2 + q'_3q'_4 + q'_5q'_6$ peut s'exprimer en fonction des neuf mêmes variables.

Pour y parvenir, considérons dans l'espace, à partir de l'origine des coordonnées, quatre droites qui forment, avec trois axes rectangulaires, des angles dont les cosinus soient respectivement proportionnels à $q_1, q_3, q_5, q_2, q_4, q_6, q'_1, q'_3, q'_5, q'_2, q'_4, q'_6$, et désignons ces droites par les numéros (1), (2), (3), (4); on aura évidemment

$$\cos(1, 2) = \frac{Q}{\sqrt{uu'}}, \quad \cos(2, 3) = \frac{R}{\sqrt{u'v}},$$

$$\cos(1, 3) = \frac{w}{\sqrt{uv}}, \quad \cos(2, 4) = \frac{w}{\sqrt{u'v'}},$$

$$\cos(1, 4) = \frac{R}{\sqrt{uv'}}, \quad \cos(3, 4) = \frac{q_1 q'_1 + q_3 q'_3 + q_5 q'_5}{\sqrt{vv'}}.$$

On voit donc que, parmi les six angles que forment les quatre droites considérées deux à deux, il y en a cinq qui sont fonctions de u, u', v, v_1, w, w_1, R, R_1 et Q. Le sixième s'exprime au moyen des mêmes quantités et de la somme $q'_1 q'_2 + q'_3 q'_4 + q'_5 q'_6$. Donc cette somme peut, réciproquement, s'exprimer en fonction de ce sixième angle et des variables v, v_1, etc. Mais le sixième angle est exprimable en fonction des cinq autres, car un quadrilatère sphérique est déterminé quand on donne trois cotés et les deux diagonales, et, par conséquent, la somme $q'_1 q'_2 + q'_3 q'_4 + q'_5 q'_6$ peut s'exprimer en fonction des neuf variables u, u_1, etc.

Les coefficients de l'équation qui définit F ne contenant que les variables qui figurent dans cette fonction, on pourra intégrer cette équation et obtenir pour F une expression dans laquelle figureront d'une manière arbitraire huit fonctions déterminées des huit variables. Chacune de ces huit intégrales égalée à une constante fournira une intégrale du problème des trois corps. Mais, parmi ces huit intégrales, six seulement seront nouvelles; l'une d'elles sera évidemment l'équation des forces vives, et une autre pourrait s'obtenir en faisant la somme des carrés des intégrales des aires. On démontrerait, comme au paragraphe précédent, que celle-là est la seule qui puisse résulter de la combinaison des intégrales des aires.

Si nous considérons, en second lieu, la forme

$$\xi = t - F(u, u_1, v, v_1, w, w_1, R, R_1, Q),$$

on verra de la même manière qu'en exprimant que β est une intégrale, on obtient une équation en F qui ne diffère de la précédente que par l'addition du terme $+1$. L'une des solutions de cette équation sera une intégrale nouvelle du problème : les six autres, combinées avec celle-là, reproduiraient les intégrales déjà obtenues.

IX.

Les intégrales dont l'existence a été démontrée au paragraphe précédent sont de la forme

$$\beta = F\left(\begin{matrix} q_1^2+q_2^2+q_3^2, & q_1^2+q_4^2+q_5^2, & q_1^2+q_6^2+q_7^2, & q_1^2+q_8^2+q_9^2, & q_1q_2+q_3q_4+q_5q_6, \\ q_1q_2+q_3q_4+q_5q_6, & q_1q_2+q_3q_4+q_5q_6, & q_1q_2+q_3q_4+q_5q_6, & q_1q_2+q_3q_4+q_5q_6, & q_1q_2+q_3q_4+q_5q_6 \end{matrix}\right).$$

Nous allons voir que les intégrales comprises dans cette forme générale peuvent elles mêmes se partager en deux classes distinctes dans l'expression de chacune desquelles ne figure plus qu'une fonction inconnue de huit variables.

En posant, comme dans le paragraphe précédent,

$$\begin{matrix} q_1^2+q_2^2+q_3^2=u, & q_1^2+q_4^2+q_5^2=v, & q_1q_2+q_3q_4+q_5q_6=w, & q_1q_2+q_3q_4+q_5q_6=R, \\ q_1^2+q_2^2+q_3^2=u, & q_1^2+q_4^2+q_6^2=v, & q_1q_2+q_3q_4+q_5q_6=w, & q_1q_2+q_3q_4+q_5q_6=R, \end{matrix} \quad q_1q_2+q_3q_4+q_5q_6=Q,$$

j'ai été conduit, par des considérations d'homogénéité que je développerai dans un autre Mémoire, à donner à l'expression de β la forme suivante :

$$\beta = u^m F\left(\frac{u}{u_1}, v\sqrt{u}, v_1\sqrt{u_1}, \frac{w}{\sqrt{uv}}, \frac{w_1}{\sqrt{u_1v}}, \frac{Q}{\sqrt{uu_1}}, \frac{R}{\sqrt{uv}}, \frac{R}{\sqrt{u_1v}}\right),$$

qui ne contient plus qu'une fonction inconnue de huit variables. Cette forme se partage en deux autres distinctes suivant que m est ou n'est pas différent de zéro, et l'on peut vérifier que l'une et l'autre contiennent des intégrales fournies par l'intégration d'une équation différentielle partielle linéaire à huit variables indépendantes. La première forme, dans laquelle nous supposons $m = -\frac{1}{2}$,

$$\beta = u^{-\frac{1}{2}} F\left(\frac{u}{u_1}, v\sqrt{u}, v_1\sqrt{u_1}, \frac{w}{\sqrt{uv}}, \frac{w_1}{\sqrt{u_1v}}, \frac{Q}{\sqrt{uu_1}}, \frac{R}{\sqrt{uv}}, \frac{R}{\sqrt{u_1v}}\right),$$

contient l'intégrale des forces vives, et une combinaison des trois intégrales des aires, et, en outre, cinq intégrales inconnues.

$$\beta = F\left(\frac{u}{u_1},\ v\sqrt{u},\ v_1\sqrt{u_1},\ \frac{w}{\sqrt{uv}},\ \frac{w_1}{\sqrt{u_1 v_1}},\ \frac{Q}{\sqrt{uu}},\ \frac{R}{\sqrt{uv}},\ \frac{R_1}{\sqrt{u v}}\right)$$

ne contient qu'une seule intégrale distincte des précédentes.

Les équations différentielles partielles qu'il faudra intégrer pour trouver les intégrales comprises dans l'une ou l'autre de ces formes sont linéaires et à huit variables indépendantes.

Nous reviendrons dans un autre Mémoire sur ces résultats que nous ne faisons qu'indiquer ici. Il nous suffit en ce moment d'avoir montré que, sans connaître les intégrales du problème des trois corps, on peut les classer de la manière suivante :

1°. L'intégrale des forces vives;

2°. Les trois intégrales des aires;

3°. Cinq intégrales distinctes des précédentes, dans l'expression desquelles figure une fonction inconnue de huit variables;

4°. Une intégrale obtenue en égalant à une constante une fonction des huit mêmes variables;

5°. Une intégrale qui contient le temps;

6°. Une intégrale qui n'appartient à aucune des catégories précédentes.

Les géomètres comprendront, sans qu'il soit nécessaire d'insister sur ce point, que cette séparation des intégrales est un pas important dans la solution du problème, et qu'en partageant ainsi la question en plusieurs autres plus simples, on augmente les chances de la résoudre.

X.

Je terminerai ce Mémoire en indiquant l'interprétation géométrique dont sont susceptibles les résultats que nous venons d'obtenir. En considérant q_1, q_3, q_5, q_2, q_4, q_6 comme les coordonnées de deux points mobiles, le problème des trois corps se ramène à celui du mouvement de ces deux points que l'on peut considérer comme s'atti-

rant mutuellement en même temps qu'ils sont attirés par l'origine des coordonnées; or il est évident que les intégrales complètes du problème devraient donner, si elles étaient connues, les valeurs de q_1, q_3, q_5, q_2, q_4, q_6 et de leurs dérivées en fonction du temps et des valeurs initiales de ces douze quantités. Si maintenant on distingue parmi les données initiales celles qui fixent la position absolue des corps et la direction absolue de leurs vitesses et celles qui font connaître seulement les positions et vitesses relatives, il est évident que la connaissance seule des dernières permettra de calculer, à un instant donné, tout ce qui ne dépend que de ces positions ou vitesses relatives, et que, par conséquent, il doit exister des intégrales dont les quantités qui fixent les positions absolues soient complétement éliminées. Or c'est précisément ce qui est indiqué par notre analyse. Si l'on considère, en effet, les neuf quantités

$$\begin{array}{lll}
q_1^2 + q_3^2 + q_5^2, & q_2^2 + q_4^2 + q_6^2, & q_1 q_2 + q_3 q_4 + q_5 q_6, \\
q_1 q_1' + q_3 q_3' + q_5 q_5', & q_2 q_2' + q_4 q_4' + q_6 q_6', & q_1 q_2' + q_3 q_4' + q_5 q_6' + q_2 q_1' + q_4 q_3' + q_6 q_5', \\
q_1 q_2' - q_2 q_1' + q_3 q_4' - q_4 q_3' + q_5 q_6' - q_6 q_5', & q_1 q_1' + q_3 q_3' + q_5 q_5' + q_2 q_2' + q_4 q_4' + q_6 q_6', & q_1 q_1' + q_3 q_3' + q_5 q_5' + q_2 q_2' + q_4 q_4' + q_6 q_6'.
\end{array}$$

il est facile de voir qu'en les supposant connues, on peut déterminer seulement les distances des deux mobiles à l'origine des coordonnées, les angles formés par les directions des rayons vecteurs et par celles des vitesses considérées deux à deux, et, enfin, la grandeur de ces vitesses, c'est-à-dire tous les éléments qui déterminent le système formé à un instant donné par les corps en mouvement considérés indépendamment de leur position absolue dans l'espace.

SUR LES COURBES A DOUBLE COURBURE;

Par M. F. FRENET,
Professeur à la Faculté des Sciences à Lyon.

Extrait d'une Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Toulouse, le 10 juillet 1847.

1. En un point M d'une courbe à double courbure on peut considérer trois droites, qui sont : la tangente, la normale principale, c'est-à-dire celle qui est dirigée suivant le rayon de courbure, et la perpendiculaire au plan osculateur qui sera désignée simplement sous le nom d'*axe*. Les cosinus des angles que les directions de ces droites font avec les axes coordonnés seront respectivement

$$(A) \qquad a,\ b,\ c;\quad \lambda,\ \mu,\ \nu;\quad \alpha,\ \beta,\ \gamma.$$

En posant

$$A = dy\,d^2z - dz\,d^2y,$$
$$B = dz\,d^2x - dx\,d^2z,$$
$$C = dx\,d^2y - dy\,d^2x,$$

et

$$D = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

on sait qu'on a

$$\alpha = \frac{A}{D},\quad \beta = \frac{B}{D},\quad \gamma = \frac{C}{D}:$$

D est aussi égal à $\omega\,ds^2$, ω étant l'angle de contingence.

Les neuf quantités (A) sont liées par les relations suivantes :

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1,\qquad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1,\qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$
$$a\lambda + b\mu + c\nu = 0,\quad a\alpha + b\beta + c\gamma = 0,\quad \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu = 0.$$
$$a = \mu\gamma - \nu\beta,\quad \alpha = b\nu - c\mu,\quad \lambda = \beta c - \gamma b;$$
$$b = \nu\alpha - \lambda\gamma,\quad \beta = c\lambda - a\nu,\quad \mu = \gamma a - \alpha c;$$
$$c = \lambda\beta - \mu\alpha,\quad \gamma = a\mu - b\lambda,\quad \nu = \alpha b - \beta a.$$

2. *Calcul de l'angle de deux droites infiniment voisines.* — Soient l, m, n les cosinus *déterminants* d'une droite MB, ces cosinus étant des fonctions continues des coordonnées du point M. Une méthode connue pour trouver l'angle de cette droite avec la

droite infiniment voisine M′B′, consiste à mener par le point M une parallèle à M′B′, à prendre sur les directions de ces lignes dont on cherche l'angle deux longueurs MC, MC′ égales à l'unité, et à projeter sur les axes le contour CC′MC. On trouve ainsi, en appelant φ l'angle demandé, et f, g, h les cosinus qui fixent la direction de CC′,

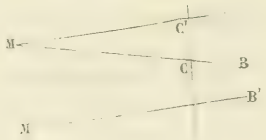


Fig. 1.

$$f\varphi = dl, \quad g\varphi = dm, \quad h\varphi = dn,$$

et, par suite,

$$\varphi = \sqrt{dl^2 + dm^2 + dn^2};$$

φ étant connu, on en déduit

$$f = \frac{dl}{\varphi}, \quad g = \frac{dm}{\varphi}, \quad h = \frac{dn}{\varphi};$$

et ces quantités font connaître la direction limite des positions de CC′.

En appliquant ces formules à l'angle de contingence, on trouve

$$\omega = \sqrt{da^2 + db^2 + dc^2}, \quad \frac{da}{\omega} = \lambda, \quad \frac{db}{\omega} = \mu, \quad \frac{dc}{\omega} = \nu.$$

3. *Angle de torsion.* — Soient M, M′, M″, M‴ quatre points consecutifs d'une

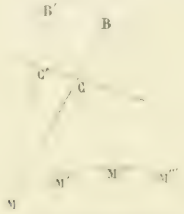


Fig. 2.

courbe, MB *la direction* de l'axe du plan osculateur MM′M″, MB′ *la direction* de l'axe du plan osculateur M′M″M‴, et admettons, pour fixer les idées, que le point M″ soit du

même côté que MB par rapport au plan MM′M″ ; les longueurs MC, MC′, prises sur les *directions mêmes* dont nous venons de parler, étant égales, C′C a pour direction limite celle d'une perpendiculaire à l'*axe* MB et à l'intersection des deux plans osculateurs, c'est-à-dire à la tangente. Cette direction est donc celle de la normale principale en M, pourvu qu'on aille de C′ en C, et non de C en C′. En opérant comme plus haut, et désignant par u l'angle de torsion, on trouve

$$(1) \qquad u = \pm \sqrt{d\alpha^2 + d\xi^2 + d\eta^2}, \quad \frac{d\alpha}{u} = \frac{d\xi}{\mu} = \frac{d\eta}{\nu}$$

et aussi

$$u = -\frac{d\alpha}{\lambda} = -\frac{d\xi}{\mu} = -\frac{d\eta}{\nu}.$$

On peut voir que, dans l'hypothèse que nous avons faite, $d\alpha$ et λ sont de signes contraires, et, par suite, u positif. Par exemple, si λ est positif, supposons un plan P parallèle à ZOY et qui laisse toute la figure à sa droite ; *la direction* C′C devant faire un angle aigu avec l'axe des x, le plan P sera rencontré par *la direction* CC′ prolongée, ce qui ne peut être qu'autant que le point C′ est plus près de ce plan que le point C ; cela revient à dire que l'angle de MB′ avec l'axe des x est plus grand que l'angle de MB avec le même axe ; l'accroissement $d\alpha$ sera donc négatif. On verrait de même que si λ était négatif, $d\alpha$ serait positif. Mais si l'on suppose M‴ d'un autre côté que MB par rapport au plan osculateur MM′M″, nous trouverons

$$u = \frac{d\alpha}{\lambda},$$

ce qui exigerait deux formules différentes pour u. Afin d'éviter cet inconvénient, nous conviendrons que l'angle de torsion sera positif dans le premier cas que nous avons considéré et négatif dans le second ; de sorte qu'il sera toujours représenté, en grandeur et en signe, par l'une des expressions

$$-\frac{d\alpha}{\lambda}, \quad -\frac{d\xi}{\mu}, \quad -\frac{d\eta}{\nu}.$$

Nous pouvons déduire de là l'expression ordinaire de u. En effet, de l'équation

$$a\alpha + b\xi + c\eta = 0$$

on tire

$$\alpha da + \xi db + \eta dc = -a d\alpha + b d\xi + c d\eta = u(\lambda da + \mu db + \nu dc),$$

et, à cause des formules (1),

$$\alpha da + \xi db + \eta dc = u\omega.$$

Cette dernière relation devient

$$u = \frac{\alpha d^2\frac{dx}{ds} + \beta d^2\frac{dy}{ds} + \gamma d^2\frac{dz}{ds}}{\omega} = ds\,\frac{\alpha d^2 x + \beta d^2 y + \gamma d^2 z}{\omega\, ds}$$

d'où enfin

$$u = ds\,\frac{A\,d^2x + B\,d^2y + C\,d^2z}{D}$$

c'est la formule connue. Des calculs analogues nous conduiraient facilement à d'autres formes de la valeur de u.

4. *Angle de deux rayons de courbure infiniment voisins.* — Soit θ cet angle. En raisonnant comme au n° **2**, on trouve

$$\theta^2 = d\lambda^2 + d\mu^2 + d\nu^2$$

ou

$$d\lambda = \alpha dz - b dy = \beta dx - \gamma dz = \mu(b\gamma - c\beta) + \nu(c\alpha - a\gamma) = \lambda(a\beta - b\alpha) = \lambda\omega,$$

et de même

$$d\mu = \beta u + b\omega, \quad d\nu = \gamma u + c\omega,$$

par suite,

$$d\lambda^2 + d\mu^2 + d\nu^2 = \theta^2 = u^2 + \omega^2.$$

Lancret avait obtenu cette relation par une tout autre voie.

5. *Élément de la courbe lieu des centres de courbure.* — Soit m un point de cette courbe répondant au point M de la proposée. En désignant ses coordonnées par ξ, η, ζ et par ρ le rayon de courbure en M, on a

$$\xi = x + \rho\lambda, \quad \eta = y + \rho\mu, \quad \zeta = z + \rho\nu.$$

On en déduit

$$d\xi = dx + \rho d\lambda + \lambda d\rho, \quad d\eta = dy + \rho d\mu + \mu d\rho, \quad d\zeta = dz + \rho d\nu + \nu d\rho.$$

Remplaçons $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ par leurs valeurs du n° **4**, il vient

$$d\xi = \alpha dz - \gamma dx, \quad d\eta = \gamma dx - \beta dy, \quad d\zeta = \beta dy - \alpha dz$$

et, par suite,

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2 = \theta^2 ds^2.$$

Cette relation est due à M. Molins.

Les dernières équations nous donnent

$$\lambda d\xi + \mu d\eta + \nu d\zeta = dx\,\lambda + dy\,\mu + dz\,\nu = \lambda(\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu) = \lambda,$$

ce qui nous apprend que la tangente en m est dans le plan normal en M.

Pour avoir l'angle que cette droite fait avec la normale principale, multiplions ces mêmes équations respectivement par λ, μ, ν, et ajoutons : il vient

$$\lambda d\xi + \mu d\eta + \nu d\zeta = \lambda dx + \mu dy + \nu dz = ds.$$

Soit φ l'angle cherché,

$$\cos\varphi = \frac{d\rho}{d\sigma}, \quad \sin\varphi = \frac{\rho u}{d\sigma}, \quad \operatorname{tang}\varphi = \frac{\rho u}{d\rho}$$

ces valeurs nous conduisent aux relations suivantes :

$$\frac{d\xi}{d\sigma} = \lambda\cos\varphi + \alpha\sin\varphi, \quad \frac{d\eta}{d\sigma} = \mu\cos\varphi + \beta\sin\varphi, \quad \frac{d\zeta}{d\sigma} = \nu\cos\varphi + \gamma\sin\varphi.$$

Ces equations admettent une interprétation géométrique très-simple.

6. *Droite polaire.* — C'est l'intersection de deux plans normaux infiniment voisins. Si l'on désigne par X, Y, Z les coordonnées courantes, ce sera aussi l'intersection de deux plans ayant respectivement pour équation

$$(2)\quad \begin{cases} (X - x)a + (Y - y)b + (Z - z)c = 0, \\ (X - x)da + (Y - y)db + (Z - z)dc + ds = 0. \end{cases}$$

Le premier est le plan normal en M, le second lui est perpendiculaire, car

$$ada + bdb + cdc = 0,$$

et passe par le centre de courbure dont les coordonnées sont

$$x + \frac{da}{ds}, \quad y + \frac{db}{ds}, \quad z + \frac{dc}{ds}.$$

La droite limite de l'intersection de ces deux plans est donc une perpendiculaire au plan osculateur menée par le centre de courbure.

7. *Point de rencontre de deux droites polaires consécutives.* — Les coordonnées de ce point M satisfont aux deux équations (2), dont la dernière peut se mettre sous la forme

$$(X - x)\frac{\lambda}{\rho} + (Y - y)\frac{\mu}{\rho} + (Z - z)\frac{\nu}{\rho} - 1 = 0,$$

et aussi à l'équation qu'on obtient en différentiant cette dernière par rapport à x, y et z ; elles seront donc fournies par les relations suivantes :

$$\begin{cases} (X - x)a + (Y - y)b + (Z - z)c = 0, \\ (X - x)\frac{\lambda}{\rho} + (Y - y)\frac{\mu}{\rho} + (Z - z)\frac{\nu}{\rho} - 1 = 0, \\ (X - x)d\cdot\frac{\lambda}{\rho} + (Y - y)d\cdot\frac{\mu}{\rho} + (Z - z)d\cdot\frac{\nu}{\rho} = 0. \end{cases}$$

On déduit de la première et de la troisième,

$$\frac{X - x}{bd\frac{\nu}{\rho} - cd\frac{\mu}{\rho}} = \frac{Y - y}{cd\frac{\lambda}{\rho} - ad\frac{\nu}{\rho}} = \frac{Z - z}{ad\frac{\mu}{\rho} - bd\frac{\lambda}{\rho}}.$$

Or

$$bd\frac{\alpha}{\rho} - cd\frac{\mu}{\rho} = bd\frac{dc}{ds} - cd\frac{db}{ds} = d\left(\frac{bdc - cdb}{ds}\right) = d\frac{\alpha}{\rho}.$$

Cette dernière expression étant égale à $\frac{\rho d\alpha - \alpha d\rho}{\rho^2}$, les formules du n° 3 nous donnent

$$\frac{X - x}{\alpha\frac{d\rho}{u} + \rho\lambda} = \frac{Y - y}{\beta\frac{d\rho}{u} + \rho\mu} = \frac{Z - z}{\gamma\frac{d\rho}{u} + \rho\nu}.$$

Appelons T la valeur commune de ces rapports ; la deuxième des équations (3) devient

$$\frac{T}{\rho}\left[\lambda\left(\alpha\frac{d\rho}{u} + \rho\lambda\right) + \mu\left(\beta\frac{d\rho}{u} + \rho\mu\right) + \nu\left(\gamma\frac{d\rho}{u} + \rho\nu\right)\right] = 1,$$

d'où

$$T = 1;$$

par conséquent,

$$(4)\qquad X - x = \alpha\frac{d\rho}{u} + \rho\lambda,\quad Y - y = \beta\frac{d\rho}{u} + \rho\mu,\quad Z - z = \gamma\frac{d\rho}{u} + \rho\nu.$$

8. *Rayon de la sphère osculatrice.* — Les dernières équations donnent pour ce rayon R, qui est égal à $\sqrt{(X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2}$, la valeur simple

$$R = \sqrt{\frac{d\rho^2}{u^2} + \rho^2};$$

d'où l'on voit que $\frac{d\rho}{u}$ représente la distance du point M au plan osculateur en M. Soit h cette distance, les relations (4) deviennent

$$(5)\qquad X - x = \alpha h + \rho\lambda,\quad Y - y = \beta h + \rho\mu,\quad Z - z = \gamma h + \rho\nu.$$

On obtiendrait immédiatement ces résultats en projetant successivement sur les trois axes le triangle qui a pour côtés R, h et ρ.

En rapprochant la valeur de h de celle trouvée pour $\tang\varphi$ (n° 3), on en conclut

$$\tang\varphi = \frac{\rho}{h}.$$

L'angle de la tangente à la courbe, lieu des centres de courbure, avec le rayon du cercle osculateur est donc le complément de l'angle que fait ce même rayon avec le rayon de la sphère osculatrice.

Si l'on compare la valeur de $d\sigma$ avec celle de R, on trouve

$$R = \frac{d\sigma}{u},$$

ce qui fournit un nouveau théorème.

Les deux dernières propositions, ainsi que les valeurs de R et de h, ont été données autrement par M. Molins.

9. Le lieu des droites polaires est la surface polaire qui a pour arête de rebroussement le lieu des points M_1. La tangente et le plan osculateur en ce point ne sont autres que la droite polaire et le plan normal relatifs au point M. C'est ce qu'on voit facilement par le calcul en différentiant deux fois la première des équations (2) et une fois la seconde, X, Y, Z étant considérés dans ces équations comme les coordonnées de M. On conclut de là deux théorèmes dus à Fourier et dont les énoncés sont :

Théorème I. *L'angle de contingence en un point de l'arête de rebroussement de la surface polaire est égal à l'angle de torsion de la courbe au point correspondant.*

Théorème II. *L'angle de torsion de cette même arête est égal à l'angle de contingence de la courbe.*

10. *Élément de l'arête de rebroussement de la surface polaire.* — Il résulte de ce qui vient d'être dit qu'en désignant par dS l'élément de la courbe des points M, on a

$$\frac{dX}{dS} = \alpha, \quad \frac{dY}{dS} = \beta, \quad \frac{dZ}{dS} = \gamma.$$

Différentions maintenant la première des équations (5), et remplaçons-y dX par αdS, elle donne

$$\alpha dS = dx - \rho dh + h d\rho + \lambda d\mu + \mu d\lambda.$$

Substituons à $d\alpha$, $d\lambda$ et h leurs valeurs connues; il vient, après réduction,

$$dS = dh + \rho u.$$

Comme

$$u = \frac{d\rho}{h},$$

on peut aussi écrire

$$dS = \frac{h dh + \rho d\rho}{h} = \frac{R dR}{h} = \frac{dR}{\cos\varphi}.$$

résultat qui se tire immédiatement de la figure.

On a d'ailleurs

$$d\sigma = \frac{d\varphi}{\cos\varphi};$$

par conséquent,

$$\frac{dS}{d\sigma} = \frac{dR}{d\varphi}.$$

ce qui est l'expression d'un théorème.

La valeur de dS, combinée avec les théorèmes de Fourier, donne des formules simples pour les rayons de première et de seconde courbure de la courbe des points M.

En les désignant par ρ_1 et r_1, ceux des points M étant ρ et r, on trouve

$$\rho_1 = \frac{dS}{u} = \frac{R\,dR}{hu} = \frac{R\,dR}{d\rho},$$

$$r_1 = \frac{dS}{\omega} = \frac{\rho}{r}\,\frac{R\,dR}{d\rho}.$$

11. *Angle de deux rayons de courbure sphérique infiniment voisins.* — Soient L, M, N les *cosinus déterminants* du rayon de courbure sphérique, ψ l'angle dont il s'agit; on a, d'après ce qui a été vu,

$$(6)\quad \begin{cases} RL = X - x = \alpha h + \rho\lambda, \\ RM = Y - y = \beta h + \rho\mu, \\ RN = Z - z = \gamma h + \rho\nu, \\ \psi^2 = dL^2 + dM^2 + dN^2. \end{cases}$$

Les équations (6) nous donnent

$$R\,dL + L\,dR = dX - dx = \alpha\,dS - dx,$$
$$R\,dM + M\,dR = dY - dy = \beta\,dS - dy,$$
$$R\,dN + N\,dR = dZ - dz = \gamma\,dS - dz.$$

Élevons au carré et ajoutons, il vient, apres des réductions simples,

$$R^2\psi^2 + dR^2 = dS^2 + ds^2.$$

On déduit de là, en tenant compte de la relation $dS = \frac{R\,dR}{h}$,

$$\psi = \frac{\rho}{R}\sqrt{\frac{dS^2}{R^2} + \frac{ds^2}{r^2}}.$$

12. Soit une droite passant au point M dans le plan normal et tangente à la sphère osculatrice en ce point; on trouve sans peine, pour les cosinus L, M, N qui la déterminent,

$$L = \frac{\rho\alpha - h\lambda}{R}, \quad M = \frac{\rho\beta - h\mu}{R}, \quad N = \frac{\rho\gamma - h\nu}{R},$$

et l'angle infiniment petit ε de cette droite avec la droite analogue passant au point voisin est donné par la formule

$$\varepsilon^2 = \frac{dS^2}{R^2}\sin^2\varphi + \frac{ds^2}{\rho^2}\cos^2\varphi.$$

13. *Droite rectifiante.* — Lancret a nommé *plan rectifiant* d'une courbe en un point M celui qui contient l'*axe* et la tangente en ce point; son intersection avec le plan rectifiant infiniment voisin est la *droite rectifiante*. Cette droite a pour équation

$$(7)\quad \begin{cases} (X - x)\lambda + (Y - y)\mu + (Z - z)\nu = 0, \\ (X - x)\,d\lambda + (Y - y)\,d\mu + (Z - z)\,d\nu = 0. \end{cases}$$

La deuxième est celle d'un plan passant par M et perpendiculaire au plan rectifiant de ce point; elle contient donc la normale principale; il suit de là que l'intersection cherchée, située dans le plan rectifiant en M, fait avec l'*axe* en ce point un angle égal à celui du second plan avec le plan normal, et dont le cosinus a pour expression

$$a\frac{d\lambda}{\rho} + b\frac{d\mu}{\rho} + c\frac{d\nu}{\rho};$$

la valeur absolue de ce cosinus se réduit à $\frac{\omega}{\rho}$ au moyen des formules du n° 4.

Si l'on désigne par H l'angle de la tangente avec la rectifiante, on trouve

$$8)\qquad \sin H = \frac{\omega}{\rho},\quad \cos H = \frac{u}{\rho},\quad \operatorname{tang} H = \frac{\omega}{u} = \frac{\rho'}{\rho}.$$

La dernière équation donne une signification géométrique assez simple à la quantité ρ'.

Des équations (7) on tire, pour les cosinus l, m, n qui déterminent la rectifiante,

$$l = \frac{\mu d\nu - \nu d\mu}{\rho},\quad m = \frac{\nu d\lambda - \lambda d\nu}{\rho},\quad n = \frac{\lambda d\mu - \mu d\lambda}{\rho},$$

valeurs qui peuvent s'écrire

$$9)\qquad \left\{\begin{aligned} l &= \frac{au + \alpha\omega}{\rho} = a\cos H + \alpha\sin H,\\ m &= \frac{bu + \beta\omega}{\rho} = b\cos H + \beta\sin H,\\ n &= \frac{cu + \gamma\omega}{\rho} = c\cos H + \gamma\sin H.\end{aligned}\right.$$

L'interprétation géométrique de ces relations est facile.

On déduit encore des formules (8) et de celles du n° 4,

$$\frac{d\lambda}{\rho} = \alpha\cos H - a\sin H,$$

$$\frac{d\mu}{\rho} = \beta\cos H - b\sin H,$$

$$\frac{d\nu}{\rho} = \gamma\cos H - c\sin H.$$

14. *Angle de deux rectifiantes infiniment voisines.* — Soit θ cet angle. En différentiant la première des équations (9), il vient

$$d\theta = (\alpha\cos H - a\sin H)\,dH + \sin H\,d\alpha + \cos H\,da.$$

Or

$$da = \omega\lambda,\quad d\alpha = -u\lambda;$$

donc

$$\sin H\, d\alpha + \cos H\, da = 0.$$

D'ailleurs

$$\frac{d\lambda}{\rho} = \alpha \cos H - a \sin H;$$

il résulte de là

$$dl = \frac{d\lambda}{\rho}\, dH,$$

et, de même,

$$dm = \frac{d\mu}{\rho}\, dH, \quad dn = \frac{d\nu}{\rho}\, dH,$$

et finalement

$$\omega = \sqrt{dl^2 + dm^2 + dn^2} = dH = \frac{u}{\rho}\, d\cdot\frac{\omega}{u}.$$

15. *Arête de rebroussement de la surface rectifiante.* — La *surface rectifiante* est le lieu des droites rectifiantes. Les coordonnées d'un point M_2 de son arête de rebroussement sont les valeurs de X, Y, Z qui satisfont aux trois équations suivantes :

$$(10)\quad \begin{cases} (X - x)\lambda + (Y - y)\mu + (Z - z)\nu = 0, \\ (X - x)\, d\lambda + (Y - y)\, d\mu + (Z - z)\, d\nu = 0, \\ (X - x)\, d^2\lambda + (Y - y)\, d^2\mu + (Z - z)\, d^2\nu = -\omega\, ds. \end{cases}$$

Soit K la distance du point M_2 au point M ; les deux premières équations nous donnent

$$(11)\quad \frac{X - x}{l} = \frac{Y - y}{m} = \frac{Z - z}{n} = K.$$

Au moyen de ces relations, la dernière équation (10) devient

$$l\, d^2\lambda + m\, d^2\mu + n\, d^2\nu = K = -\omega\, ds.$$

Or

$$l\, d\lambda + m\, d\mu + n\, d\nu = 0,$$

et, par suite,

$$l\, d^2\lambda + m\, d^2\mu + n\, d^2\nu = -(dl\, d\lambda + dm\, d\mu + dn\, d\nu) = -\omega\, ds,$$

donc

$$K = \frac{\omega\, ds}{\omega} = \frac{\sin H}{dH}\, ds.$$

La tangente et le plan osculateur au point M_2 ne sont autres que la *rectifiante* et le plan rectifiant du point M. C'est ce qu'on voit sans peine en différentiant par rapport à X, Y, Z, deux fois la première des équations (10), et une fois la seconde. Si dS est

l'élément de la courbe des points M_2, on aura donc

$$\frac{dX}{dS} = l, \quad \frac{dY}{dS} = m, \quad \frac{dZ}{dS} = n.$$

16. *Élément de cette arête.* — Pour calculer dS, servons-nous des formules (1). La première nous donne

$$dX - dx = K\,dl + l\,dK,$$

ou, d'après ce qui précède,

$$l\,dS - ds = K\,dl + l\,dK;$$

de même,

$$m\,dS - dy = K\,dm + m\,dK,$$
$$n\,dS - dz = K\,dn + n\,dK.$$

Multiplions ces trois équations respectivement par l, m, n et ajoutons les résultats, il vient

$$dS - ds(al + bm + cm) = dK,$$

ou bien

$$dS = dK + ds\cos H;$$

et comme

$$\frac{ds.\sin H}{dH} = K,$$

$$dS = \frac{K\cos H\,dH + \sin H\,dK}{\sin H} = \frac{d(K\sin H)}{\sin H}.$$

On déduirait aisément de là l'expression des deux rayons de courbure.

SUR LES FONCTIONS *GAMMA* DE LEGENDRE;

PAR J. LIOUVILLE.

Communication verbale à l'Académie des Sciences. — *Comptes rendus*, tome XXXV, séance du 6 septembre 1852.

« J'appellerai d'abord l'attention de l'Académie sur une formule célèbre qui porte le nom de *Stirling* et qui a pour objet le calcul abrégé de la somme des logarithmes de $p-1$ nombres consécutifs, commençant à l'unité, ou plus généralement le calcul abrégé du logarithme de la fonction que Legendre désigne par $\Gamma(p)$, p étant une quantité positive très-grande qui peut ne pas être un entier. La série de Stirling, dans ses premiers termes, tend d'abord très-rapidement vers la valeur demandée, mais elle devient ensuite divergente; et de là naît une difficulté qui, dans ces derniers temps surtout, a beaucoup occupé les géomètres. Je ne rappellerai pas les noms très-connus de tous ceux qui ont écrit sur ce sujet, et parmi lesquels figurent deux de nos confrères, M. Binet et M. Cauchy. Je dirai seulement que M. Binet (*Journal de l'École Polytechnique*, XXVIIe cahier) a substitué à la formule de Stirling une autre série toujours convergente, qui ne peut donner lieu à aucune objection; et que, d'un autre côté, on a levé très-heureusement, de la manière la plus directe, la difficulté indiquée, en complétant par un reste la série de Stirling bornée à un nombre fini de termes, et mieux encore, en prouvant que l'*erreur commise en s'arrêtant à un terme quelconque de cette série est plus petite que le terme suivant et en a le signe*.

» Ce dernier théorème, dont Legendre avait acquis pour ainsi dire le sentiment par ses calculs numériques, est aujourd'hui bien démontré. Je nommerai d'abord M. Raabe (tomes XXV et XXVII du Journal de M. Crelle). Il est établi d'une manière très-simple et

très-élégante dans un Mémoire de M. Malmsten, que je me plais à citer comme remarquable à plus d'un titre (Journal de M. Crelle, tome XXXV). M. Cauchy l'a démontré (*Comptes rendus*, tome XVII) en s'appuyant sur la formule

$$\mu(p) = \int_0^\infty \left(\frac{e^t}{e^t - 1} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2}\right) e^{-pt} \frac{dt}{t},$$

une de celles au moyen desquelles on exprime la quantité $\mu(p)$ qu'il faut ajouter à $\left(p - \frac{1}{2}\right) \log p - p + \frac{1}{2} \log(2\pi)$ pour avoir $\log \Gamma(p)$, et que M. Binet a réunies dans son Mémoire. Je ferai à mon tour remarquer ici qu'on le déduit avec une merveilleuse facilité de la formule suivante :

$$\mu(p) = 2 \int_0 \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} \operatorname{arc\,tang} \frac{t}{p},$$

que M. Binet a donnée aussi, et à laquelle on arrive aisément par différents moyens.

» Après avoir écrit cette formule (*Journal de l'École Polytechnique*, XXVIIe cahier, page 241), M. Binet ajoute ce qui suit :

« D'autres formes se seraient offertes d'elles-mêmes, si l'on avait » remplacé d'abord t par pt; mais nous ne nous en occuperons pas » en ce moment, où nous voulons faire remarquer que si l'on déve- » loppait selon les puissances de t la fonction

$$\operatorname{arc\,tang} \frac{t}{p} = \frac{t}{p} - \frac{t^3}{3p^3} + \ldots,$$

» et si l'on procédait ensuite aux intégrations définies, on verrait se » présenter les nombres de Bernoulli, comme coefficients des puis- » sances réciproques impaires de p : ils tiendraient lieu des inté- » grales définies d'après l'expression (68). La formule divergente qui » en résulterait serait précisément celle que Stirling a formée pour la » sommation des logarithmes des nombres naturels. Mais, pour ar- » river à ce résultat, on aurait fait concourir à une intégration la suite » arc tang $\frac{t}{p}$ que nous venons d'écrire; cette intégration étant exé-

» cutée, 1° de $t = 0$ à $t = p$, fournira une partie exacte, car alors la » suite $\frac{t}{p} - \frac{t^3}{3p^3} + \ldots$ n'est pas encore divergente; 2° l'intégration » depuis $t = p$ à $t = \infty$ emploiera la même suite qui, devenue diver- » gente, et inexacte entre ces limites, fait naître une autre suite » divergente comme elle. »

» Ces remarques sont justes. Mais à présent nous ajoutons que, quelle que soit la valeur de t entre p et ∞, comme entre 0 et p, la série dans laquelle on développe arc tang $\frac{t}{p}$ est toujours telle, que l'erreur commise, en s'arrêtant à un terme, est de signe contraire au signe de ce terme, et alternativement positive ou négative, par suite toujours moindre que le terme suivant. C'est ce que l'on voit par la formule

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots \pm x^{2n} \mp \frac{x^{2n+2}}{1+x^2},$$

qui, intégrée, donne

$$\text{arc tang } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots \pm \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \mp \int_0^x \frac{x^{2n+2}\,dx}{1+x^2},$$

ou l'erreur

$$\mp \int_0^x \frac{x^{2n+2}\,dx}{1+x^2}$$

est toujours du signe du terme

$$\mp \frac{x^{2n+3}}{2n+3},$$

qui suit celui auquel on s'arrête, et est visiblement plus petite que ce terme, auquel l'intégrale se réduirait si l'on ôtait le dénominateur $1 + x^2$. Comme le facteur qui, dans la formule

$$\mu(p) = 2\int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} \text{ arc tang } \frac{t}{p},$$

multiplie arc tang $\frac{t}{p}$ sous le signe $\int$, est essentiellement positif, il est bien clair que la propriété signalée pour le développement de arc tang $\frac{t}{p}$ appartiendra aussi au développement de $\mu(p)$ et à la série de Stirling.

» L'analyse précédente donne, en outre, pour la valeur exacte du

reste de cette série, une expression en intégrale double d'un usage très-commode [*].

» Ces quelques lignes me semblent compléter naturellement le beau Mémoire de notre savant confrère, où l'on trouvera ainsi la double solution qu'on pouvait demander : la substitution d'une formule convergente à la série divergente de Stirling, et la discussion directe de cette série prise en elle-même.

» J'ai obtenu, au surplus, à l'aide de procédés qu'il serait trop long d'exposer ici, diverses formules nouvelles d'où l'on pourrait conclure également les propriétés de la fonction $\mu(p)$.

» Cette fonction, ou plutôt la fonction $\Gamma(p)$, a été le sujet principal de mes leçons au Collége de France dans le dernier semestre de l'année courante. J'ai présenté en particulier à mes auditeurs l'analyse du Mémoire de M. Malmsten, dont il a été question plus haut, et dont je crois avoir simplifié quelques détails. J'ai pris pour point de départ la définition des fonctions $\Gamma(p)$ donnée par M. Gauss, à savoir, que $\Gamma(p)$ est la limite vers laquelle tend, pour m grandissant à l'infini, la formule

$$\Gamma(p, m) = \frac{1.2.3\ldots m.m^{p-1}}{p(p+1)\ldots(p+m-1)}.$$

» Cette définition, qui permet à la variable p d'être indifféremment positive ou négative, réelle ou imaginaire, conduit de la manière la plus simple aux propriétés fondamentales des fonctions Γ, c'est-à-dire aux équations connues

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p), \quad \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

---

[*] J'aurais dû ajouter qu'une intégration par parties réduit cette intégrale double à une intégrale simple. Le reste s'obtiendrait même sur-le-champ sous cette dernière forme en développant $\frac{1}{p^2+t^2}$ suivant les puissances de t dans la formule

$$\mu(p) = \frac{p}{\pi}\int_0^\infty \log\left(\frac{1}{1-e^{-2\pi t}}\right)\frac{dt}{p^2+t^2},$$

qui résulte immédiatement de celle dont nous nous sommes servis et où nous avons développé $\operatorname{arc\,tang}\frac{t}{p}$.

et

$$\Gamma(p)\,\Gamma\left(p+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(p+\frac{n-1}{n}\right)=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,n^{\frac{1}{2}-np}\,\Gamma(np),$$

dont la seconde, écrite ainsi

$$\Gamma(p)\,\Gamma(-p)=-\frac{\pi}{p\sin p\pi},$$

montre comment le cas où la variable p est négative ou à partie réelle négative se ramène à celui où p est positive ou à partie réelle positive. Ceci est souvent utile, car la formule de Stirling même, complétée par un reste, et cette formule curieuse de Gudermann,

$$\mu(p)=\sum\left[\left(p+m+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{p+m}\right)-1\right],$$

où $m=0, 1, 2, \ldots$, et beaucoup d'autres formules encore, s'étendent aisément au cas de p imaginaire à partie réelle positive, mais non pas à partie réelle négative.

» J'ai cité en passant la formule de Gudermann, dont j'ai donné dans mes leçons deux démonstrations différentes, pour avoir une occasion d'avertir qu'il n'y a rien de fondé dans la crainte que Gudermann exprime (vaguement, il est vrai), que sa formule ne soit en contradiction avec celle de Stirling. Loin de là, on tire assez facilement de la formule de Gudermann la série de Stirling et une expression du reste qui la complète.

» L'exponentielle m^{p-1}, qui entre dans l'expression de $\Gamma(p, m)$, montre quelles sont les combinaisons des fonctions $\Gamma(p)$ dont on doit espérer les plus belles propriétés. Ce sont celles où l'exponentielle disparaît. Telle est la combinaison si connue

$$\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)};$$

telle est aussi la combinaison

$$\frac{\Gamma(ap+b)\ldots\Gamma(a_ip+b_i)}{\Gamma(a'p+b')\ldots\Gamma(a'_ip+b'_i)},$$

quand on y suppose

$$a + \ldots + a_i = a' + \ldots + a'_i,$$

et en particulier la combinaison

$$\Gamma(p)\,\Gamma(\alpha p)\ldots\Gamma(\alpha^{\nu-1}p),$$

où α est une racine imaginaire de l'unité, en sorte que $\alpha^\nu = 1$, et dont l'étude présente beaucoup d'intérêt. Quand on prend pour α une racine cubique de 1, on a

$$1 : \Gamma(p)\,\Gamma(\alpha p)\,\Gamma(\alpha^2 p) = p^3\left(1 + \frac{p^3}{1^3}\right)\left(1 + \frac{p^3}{2^3}\right)\left(1 + \frac{p^3}{3^3}\right)\cdots$$

et le produit $\varphi(p)$ placé au second membre, analogue à celui dont dépendent les sinus ou les différences d'exponentielles, mais d'un ordre supérieur, puisque les diviseurs sont des cubes et non plus des carrés, s'obtient de suite, en quantités trigonométriques et exponentielles, par son expression en Γ, quand p est un entier positif : quand p est un entier négatif, un des facteurs du produit s'évanouit ; mais ce facteur supprimé, le produit des facteurs restants se calcule aussi sans peine.

» Il y a d'autres produits semblables qui se rattachent à celui-là, et qui donnent lieu à des équations du genre de celles qui fournissent $\sin np$ ou $\cos np$ par $\sin p$ et $\cos p$. Soit, par exemple,

$$\psi(p) = \left(1 + \frac{8p^3}{1^3}\right)\left(1 + \frac{8p^3}{3^3}\right)\left(1 + \frac{8p^3}{5^3}\right)\cdots$$

et vous aurez

$$\varphi(2p) = 8\varphi(p)\,\psi(p).$$

Mais je réserve ces développements et d'autres encore pour la publication de mes leçons. »

SUR

UNE CLASSE REMARQUABLE DE SÉRIES INFINIES;

PAR M. E.-G. BJÖRLING.

Mémoire lu à l'Académie des Sciences de Stockholm, le 13 mai 1846.

Le terme général u_n d'une série infinie étant tel qu'on ne peut assigner quelque limite définie vers laquelle le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge quand n croît indéfiniment, on sait, qu'en général, on ne peut rien décider, à l'aide des découvertes faites jusqu'à présent dans le champ des séries infinies, relativement à la convergence ou la divergence de la série. On peut voir pourtant de quelle importance est cette sorte de séries infinies, si l'on observe, par exemple, que la plupart des séries dont les termes généraux sont

$$(1) \qquad f(n).\sin w_n \quad \text{et} \quad f(n).\cos w_n,$$

$f(n)$ étant le $n^{\text{ième}}$ des termes *positifs*,

$$(2) \qquad f(1),\quad f(2),\quad f(3),\quad \text{etc.}$$

s'y rapportent. Une espece de ces séries [*], et précisément celle qui se présente le plus souvent, vient d'être examinée décisivement par M. Malmsten dans les *Nova Acta* de la Société royale des Sciences d'Upsal [*]. Par suite de cet examen, on est maintenant assuré que

[*] *Nova Acta reg. Societ. scient. Upsal*, vol. XII : *Note sur la convergence des séries*, par C.-J. Malmsten. Cette Note, du moins en partie, a été insérée ensuite dans le Journal de M. Grunert (*Archiv der Mathemat. und Physik*, tome VI).

les séries dont les termes généraux sont

$$(3) \qquad f(n) \cdot \sin nw \quad \text{et} \quad f(n) \cdot \cos nw,$$

lorsque, n croissant indéfiniment, $\lim f(n)$ *est* $= 0$, *sont convergentes pour toute valeur réelle de* w [*] *qui ne soit pas de la forme* $\pm 2k\pi$ *k étant un nombre entier ou zéro*. Au reste, parmi les séries de la forme (1), l'espèce en question est, je crois, la seule qui ait été jusqu'à présent étudiée d'une manière satisfaisante [**].

§ Ier.

En examinant, il y a peu de temps, le théoreme concernant le développement de la fonction générale $(1+x)^{\mu+\nu\sqrt{-1}}$, le module de la variable x étant precisément l'unité [***], suivant les puissances ascendantes et entières de cette variable, il m'a été permis de jeter un

---

[*] Pour eviter toute espèce de confusion dans ce qui va suivre, qu'il me soit permis de rappeler ici une precaution fort nécessaire dans la théorie des series. En effet, *quand on est parvenu à démontrer qu'une série, dont les termes sont des fonctions d'une quantité* x, *converge (ou diverge) pour chaque valeur donnée de* x *jusqu'à une certaine limite* X, *il ne faut pas croire que la série continue nécessairement de converger (ou de diverger) pour des valeurs de* x *indéfiniment près de cette limite*. C'est ce que j'ai observé plus en détail dans une note sous le texte du § Ier dans mes *Doctrinæ serierum infinitarum exercitationes, pars* 1a, insérées dans les *Nova Acta reg. Societ. scient. Upsal*, vol. XIII. Pour l'instant il suffit du peu de mots qu'on vient de lire, afin que, dans ce qui va suivre, des termes tels que, par exemple, une serie est convergente (divergente) pour chaque valeur positive de x ou pour chaque valeur négative de x, soient bien entendus.

[**] La demonstration même dont se sert M. Malmsten, dans la Note citee, est à la fois tres-claire et très-simple. Cependant, on peut lui donner un plus grand degre d'évidence encore, et la faire dépendre du seul caractère $\lim f(n) = 0$. Je suis bien fâché de me voir ici réduit à la nécessite de prévenir, à cet égard, l'auteur eminent, pour me procurer le moyen d'effectuer la démonstration du théorème III ci-dessous. Aussi il faut avouer que c'est l'auteur lui-même qui a fixé premièrement mon attention, non-seulement sur la possibilite, mais aussi sur la forme même d'une demonstration améliorée de sa proposition.

[***] Dans la *pars* 1a des *Doctrinæ serierum, etc.*, dejà citees, je me suis occupé de recherches sur le développement de cette fonction générale, dans le cas du module

coup d'œil dans l'intérieur du système des séries mentionnées dans les premières lignes ci-dessus. Il m'en a réussi, entre autres choses, de démontrer rigoureusement un théorème général (*voir* le théorème III ci-dessous) dont la proposition que je viens rappeler, concernant les séries (3), ne fait qu'un simple corollaire.

Parmi les séries dont nous allons nous occuper dans le présent Mémoire, considérons d'abord l'espèce des séries (1) pour lesquelles

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} w_n = \operatorname{arc\,tang} \frac{v}{\rho+1} + \operatorname{arc\,tang} \frac{v}{\rho+2} + \operatorname{arc\,tang} \frac{v}{\rho+3} + \ldots \\ + \operatorname{arc\,tang} \frac{v}{\rho+n}. \end{aligned} \right.$$

le signe arc tang désignant, comme à l'ordinaire, un arc limité par $\pm \frac{\pi}{2}$, ρ étant réel non négatif et v positif ou négatif. La somme (4), dans ce qui va suivre, sera représentée, pour abréger, par le signe A_n.

Il est bon d'observer d'avance, quant à la nature de la somme A_n, que (v étant positif) cette somme croît indéfiniment avec n, bien qu'à partir du terme $n^{\text{ième}}$, chaque terme particulier pour de très-grandes valeurs de n soit très-petit [*]. Cela posé, il est clair, pour parler géométriquement, que, n croissant, l'extrémité de l'arc que représente la somme variable A_n, successivement, mais par des pas de plus en plus courts, à mesure que n croîtra, parcourra la circonférence entière autant de fois que l'on voudra, et que, plus on

---

de x inférieur à l'unité, et sur les avantages qu'on en peut tirer pour la théorie des séries dont les termes sont réels. L'examen de cette même chose pour le cas du module de x égal à l'unité est réservé pour la *pars* 2[a] des mêmes *Exercitationes*.

[*] En effet, il est clair, qu'à cet égard, il y a la même chose à dire de la série

$$\operatorname{arc\,tang} \frac{v}{\rho+n+1}, \quad \operatorname{arc\,tang} \frac{v}{\rho+n+2}, \ldots \quad \operatorname{arc\,tang} \frac{v}{\rho+n+m}.$$

que de la série même

$$\frac{v}{\rho+n+1}, \quad \frac{v}{\rho+n+2}, \ldots, \quad \frac{v}{\rho+n+m}.$$

avance dans les séries

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l} f(1).\sin\left(\text{arc tang}\,\dfrac{v}{\rho+1}\right),\\ f(2).\sin\left(\text{arc tang}\,\dfrac{v}{\rho+1}+\text{arc tang}\,\dfrac{v}{\rho+2}\right),\ldots,\\ f(n).\sin\left(\text{arc tang}\,\dfrac{v}{\rho+1}+\text{arc tang}\,\dfrac{v}{\rho+2}+\ldots+\text{arc tang}\,\dfrac{v}{\rho+n}\right).\\ \text{et}\\ f(1).\cos\left(\text{arc tang}\,\dfrac{v}{\rho+1}\right),\\ f(2).\cos\left(\text{arc tang}\,\dfrac{v}{\rho+1}+\text{arc tang}\,\dfrac{v}{\rho+2}\right),\ldots,\\ f(n).\cos\left(\text{arc tang}\,\dfrac{v}{\rho+1}+\text{arc tang}\,\dfrac{v}{\rho+2}+\ldots+\text{arc tang}\,\dfrac{v}{\rho+n}\right).\end{array}\right.$$

plus y seront longues les périodes des termes *de même signe*.

Observons en outre que, dans le même cas (v positif), la somme

$$(6)\quad \text{arc tang}\,\frac{v}{\rho+n+1}+\text{arc tang}\,\frac{v}{\rho+n+2}+\ldots+\text{arc tang}\,\frac{v}{\rho+n+m}$$

ou, pour abréger,

$$B_{n+m},$$

est constamment inférieure à

$$\frac{v}{\rho+n+1}+\frac{v}{\rho+n+2}+\ldots+\frac{v}{\rho+n+m},$$

partant aussi inférieure à

$$\frac{v}{n+1}+\frac{v}{n+2}+\ldots+\frac{v}{n+m},$$

et, à fortiori, plus petite que

$$\frac{m}{n+1}v,$$

en sorte qu'on a, pour toutes les valeurs de n,

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} B_{2n}\ \text{ou}\ \text{arc tang}\,\dfrac{v}{\rho+n+1}+\text{arc tang}\,\dfrac{v}{\rho+n+2}+\ldots\\ \qquad\qquad +\text{arc tang}\,\dfrac{v}{\rho+2n}<\dfrac{n}{n+1}v<v;\end{array}\right.$$

et, de cette remarque jointe à la précédente, nous pourrons aisément déduire la proposition que voici :

THÉORÈME I. *Si les termes positifs*

$$(8) \qquad f(1), \quad f(2), \quad f(3)\ldots, \quad f(n), \quad etc.,$$

sont tels que, pour chaque valeur entière de n au delà d'une certaine limite,

$$(9) \qquad nf(n) \text{ soit } \geqq \text{ à un nombre fini } \mathrm{N},$$

les deux séries, dont les termes généraux sont

$$(10) \quad \begin{cases} f(n).\sin\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+1} + \operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+2} + \ldots + \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{\rho+n}\right). \\ \text{et} \\ f(n).\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+1} + \operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+2} + \ldots + \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{\rho+n}\right). \end{cases}$$

ρ étant réel, non négatif, seront divergentes pour des valeurs quelconques positives ou négatives de v.

Démonstration. D'abord il est clair qu'il suffira de faire la démonstration pour le cas seul des valeurs *positives* de v. D'ailleurs, comme on sait, il suffira de montrer que, s_n désignant la somme des n premiers termes de l'une et de l'autre des séries dont il s'agit, la différence

$$s_{n+m} - s_n$$

n'est point pour chaque valeur de n au delà d'une certaine limite, quelque grand soit le nombre entier m, numériquement inférieure à toute limite donnée.

Quant à la première des deux séries (10), il ne faudra, pour atteindre ce but-là, que considérer un nombre n quelconque dont l'arc correspondant A_n se termine ou au point $\frac{\pi}{6}$ de la circonférence, ou du moins à quelque point intermédiaire entre $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{2}$, de manière que l'on ait $\sin A_n =$ ou $> \frac{1}{2}$. Qu'il y ait, en effet, de tels nombres n

aussi grands qu'on voudra, c'est ce qui est évident d'après ce qu'on vient de dire de la nature de A_n. Ici notre n doit être supposé très-grand, afin que les nombres $\frac{v}{\rho+n}$, $\frac{v}{\rho+n+1}$, etc., soient tous très-petits.

Maintenant, soit, 1°. $v =$ ou $< \frac{\pi}{3}$. Alors il suit de ce qui a été dit ci-dessus, que chaque *sinus*, dans la série

$$f(n-1).\sin\left(A_n + \text{arc tang}\,\frac{v}{\rho+n+1}\right),$$

$$f(n+2).\sin\left(A_n + \text{arc tang}\,\frac{v}{\rho+n+1} + \text{arc tang}\,\frac{v}{\rho+n+2}\right)\ldots\ldots$$

$$f(2n).\sin\left(A_n + \text{arc tang}\,\frac{v}{\rho+n+1} + \ldots + \text{arc tang}\,\frac{v}{\rho+2n}\right).$$

sera positif et supérieur à $\frac{1}{2}$, vu que, d'après la formule (7), toute somme B_{2n} est $< v$, et partant ici $< \frac{\pi}{3}$. Par conséquent, tous ces termes seront positifs, et leur somme

$$> \frac{1}{2}\left[f(n+1) + f(n-2) + \ldots + f(2n)\right],$$

et partant aussi, en vertu du caractère (9),

$$> \frac{N}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right).$$

et, à fortiori,

$$> \frac{N}{4}.$$

Soit, 2°. en général, $v =$ ou $< k \cdot \frac{\pi}{3}$ (k désignant un nombre entier quelconque). Puisque, pour chaque nombre entier m,

$$B_{n+m} \text{ est } < \frac{m}{n+1}v < \frac{mk}{n+1}\cdot\frac{\pi}{3} < \frac{mk}{n}\cdot\frac{\pi}{3}.$$

il s'ensuit que, si l'on prend pour m le plus grand nombre entier

compris dans $\frac{n}{k}$ $\left(\text{d'où } \frac{mk}{n} = 1\right)$, chaque *sinus* dans cette série

$$f(n-1) \,.\, \sin\left(A_n + \text{arc tang}\,\frac{v}{\rho+n+1}\right),$$

$$f(n+2) \,.\, \sin\left(A_n + \text{arc tang}\,\frac{v}{\rho+n+1} + \text{arc tang}\,\frac{v}{\rho+n+2}\right) \cdots,$$

$$f(n+m) \,.\, \sin\left(A_n + \text{arc tang}\,\frac{v}{\rho+n+1} + \ldots + \text{arc tang}\,\frac{v}{\rho+n+m}\right),$$

sera supérieur à $\frac{1}{2}$, vu que toute somme B_{n+m} est $< \frac{\pi}{3}$. Par conséquent, tous ces termes seront positifs, et leur somme

$$> \frac{1}{2}\left[f(n+1) + f(n+2) + \ldots + f(n+m)\right],$$

et partant aussi, en vertu du caractère (9),

$$> \frac{N}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+m}\right),$$

et, à fortiori,

$$> \frac{m}{n+m} \cdot \frac{N}{2} > \frac{m}{\frac{n}{k}(k+1)} \cdot \frac{N}{2}, \text{ vu que } m \text{ est } \leqq \frac{n}{k},$$

$$> \frac{m}{(m+1)(k+1)} \cdot \frac{N}{2}, \text{ vu que } \frac{n}{k} \text{ est } < m+1,$$

et, par suite,

$$> \frac{N}{2(k+1)}.$$

Donc la première des deux séries (10) est divergente.

Quant à la seconde, on peut dire à bon titre que sa divergence est une conséquence nécessaire et évidente de celle de l'autre; mais on peut aussi s'en convaincre d'une manière parfaitement semblable à celle que nous avons employée dans ce qui précède, pourvu que l'on y considère un nombre quelconque n dont l'arc correspondant A_n se termine ou au point $\frac{5\pi}{3}$ de la circonférence, ou, du moins, à quelque point compris entre $\frac{5\pi}{3}$ et 2π (en sorte que

$\cos A_n =$ ou $> \frac{1}{2}$), et que, du reste, on y remplace simplement le mot *sinus* par le mot *cosinus*.

§ II.

Considérons, en second lieu, la proposition suivante, dont, au surplus, la première partie n'est qu'un corollaire du précédent théorème I, et dont la seconde partie peut servir d'introduction à la proposition plus générale qui fait l'objet du § III.

THÉORÈME II. 1°. *Les termes positifs* (8) *étant, dans le théorème précédent, tels que, pour chaque valeur entière de n au delà d'une certaine limite,*

$$(9) \qquad n f(n) \text{ soit } \geqq \text{ à un nombre fini } \mathrm{N},$$

les deux séries, dont les termes généraux sont

$$(11) \quad \begin{cases} f(n) \cdot \dfrac{\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\dfrac{v}{\rho+1} + \operatorname{arc\,tang}\dfrac{v}{\rho+2} + \ldots + \operatorname{arc\,tang}\dfrac{v}{\rho+n}\right)}{\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\dfrac{v}{\rho+1}\right)\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\dfrac{v}{\rho+2}\right)\cdots\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\dfrac{v}{\rho+n}\right)}, \\ \text{et} \\ f(n) \cdot \dfrac{\sin\left(\operatorname{arc\,tang}\dfrac{v}{\rho+1} + \operatorname{arc\,tang}\dfrac{v}{\rho+2} + \ldots + \operatorname{arc\,tang}\dfrac{v}{\rho+n}\right)}{\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\dfrac{v}{\rho+1}\right)\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\dfrac{v}{\rho+2}\right)\cdots\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\dfrac{v}{\rho+n}\right)}. \end{cases}$$

seront divergentes pour des valeurs quelconques positives ou négatives de v.

2°. *Mais, si lesdits termes* (8) *sont tels que, pour chaque valeur entière de n au delà d'une certaine limite,*

$$(9') \qquad n f(n) \text{ soit } \leqq \text{ à un nombre fini } \mathrm{N};$$

alors les deux séries dont les termes généraux sont, non pas précisément les deux expressions (11), *mais bien ces mêmes expressions affectées l'une et l'autre du facteur* $(-1)^n$, *seront convergentes pour toute valeur réelle de v.*

La premiere partie de ce théorème n'est que la proposition même que l'on vient de démontrer dans le paragraphe précédent, parce que l'expression

$$(12)\qquad \frac{f(n)}{\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+1}\right)\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+2}\right)\cdots\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+n}\right)}.$$

ou, ce qui revient au même,

$$f(n)\cdot\sqrt{\left[1+\left(\frac{v}{\rho+1}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{v}{\rho+2}\right)^2\right]\cdots\left[1+\left(\frac{v}{\rho+n}\right)^2\right]}.$$

est elle-même une $f(n)$ positive qui satisfait à la condition (9), vu que le dernier facteur radical n'est évidemment jamais inférieur à l'unité.

La seconde partie, nous le répétons, n'est qu'un cas très-particulier de la proposition générale que contient le théorème III [*] dont la démonstration sera complétement faite dans le paragraphe qui va suivre. Cependant il est à propos d'énoncer ici déjà, comme une conséquence évidente et remarquable du présent théorème II, la proposition suivante :

COROLLAIRE. *Tout comme la série qui a pour terme général* $\frac{1}{n+1}$ *est divergente, tandis que celle qui a pour terme* $(-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}$ *est convergente; de même aussi les séries dont les termes généraux sont*

$$(13)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{n+1}\cdot\dfrac{\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+1}+\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+2}+\ldots+\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+n}\right)}{\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+1}\right)\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+2}\right)\cdots\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+n}\right)}, \\ \text{et} \\ \dfrac{1}{n+1}\cdot\dfrac{\sin\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+1}+\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+2}+\ldots+\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+n}\right)}{\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+1}\right)\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+2}\right)\cdots\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+n}\right)}, \end{cases}$$

[*] *Voir* la Note I à la fin de ce Mémoire.

ou, ce qui revient au même,

$$(13')\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{n+1}\sqrt{\left[1+\left(\frac{v}{\rho+1}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{v}{\rho+2}\right)^2\right]\cdots\left[1+\left(\frac{v}{\rho+n}\right)^2\right]}\\ &\times\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+1}+\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+2}+\ldots+\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+n}\right),\\ &\text{et}\\ &\frac{1}{n+1}\sqrt{\left[1+\left(\frac{v}{\rho+1}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{v}{\rho+2}\right)^2\right]\cdots\left[1+\left(\frac{v}{\rho+n}\right)^2\right]}\\ &\times\sin\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+1}+\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+2}+\ldots+\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+n}\right)\end{aligned}\right.$$

seront divergentes (v *étant soit positif, soit négatif*), *tandis que, au contraire, les séries dont les termes généraux sont ces mêmes expressions affectées, l'une et l'autre, du facteur* $(-1)^{n+1}$, *seront convergentes pour toute valeur réelle de* v.

§ III.

Maintenant nous allons démontrer cette proposition capitale :

THÉORÈME III. *Les termes positifs* (8) *étant tels que, pour chaque valeur entière de* n *au delà d'une certaine limite,*

$$(9')\qquad nf(n) \text{ soit } \overset{=}{<} \text{ à un nombre fini } N,$$

les quatre séries, dont les termes généraux sont ou le produit de

$$(14)\quad f(n)\cdot\frac{\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+1}+\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+2}+\ldots+\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+n}\right)}{\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+1}\right)\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+2}\right)\cdots\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+n}\right)},$$

soit par $\cos nw$, *soit par* $\sin nw$, *ou bien le produit de*

$$(15)\quad f(n)\cdot\frac{\sin\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+1}+\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+2}+\ldots+\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+n}\right)}{\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+1}\right)\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+2}\right)\cdots\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+n}\right)},$$

soit par $\cos nw$, *soit par* $\sin nw$ (ρ *étant réel, non négatif*), *seront toutes convergentes pour des valeurs réelles quelconques de* v *et de* w, *excepté seulement pour des valeurs de* w *de la forme* $\pm 2k\pi$ (k *désignant un nombre entier ou zéro*).

Démonstration. Observons d'abord que, si l'on désigne, pour

abréger, par A_p la somme

$$\text{arc tang}\frac{v}{\rho+1} + \text{arc tang}\frac{v}{\rho+2} + \ldots + \text{arc tang}\frac{v}{\rho+p},$$

on a évidemment

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\cos A_{p+1}}{\cos\left(\text{arc tang}\frac{v}{\rho+1}\right)\cos\left(\text{arc tang}\frac{v}{\rho+2}\right)\cdots\cos\left(\text{arc tang}\frac{v}{\rho+p+1}\right)} \\ &= \frac{\cos A_p - \frac{v}{\rho+p+1}\sin A_p}{\cos\left(\text{arc tang}\frac{v}{\rho+1}\right)\cos\left(\text{arc tang}\frac{v}{\rho+2}\right)\cdots\cos\left(\text{arc tang}\frac{v}{\rho+p}\right)}. \end{aligned}\right.$$

et

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\sin A_{p+1}}{\cos\left(\text{arc tang}\frac{v}{\rho+1}\right)\cos\left(\text{arc tang}\frac{v}{\rho+2}\right)\cdots\cos\left(\text{arc tang}\frac{v}{\rho+p+1}\right)} \\ &= \frac{\sin A_p - \frac{v}{\rho+p+1}\cos A_p}{\cos\left(\text{arc tang}\frac{v}{\rho+1}\right)\cos\left(\text{arc tang}\frac{v}{\rho+2}\right)\cdots\cos\left(\text{arc tang}\frac{v}{\rho+p}\right)}. \end{aligned}\right.$$

Maintenant, pour éviter toute espèce de confusion, distinguons deux cas A et B, suivant que v diffère de zéro, ou que $v = 0$.

A. *Supposant d'abord que v ne soit pas zéro*, voici comment nous raisonnerons :

1°. *Quant à la série dont le terme général est*

$$(18)\quad f(n)\cdot\frac{\cos A_n}{\cos\left(\text{arc tang}\frac{v}{\rho+1}\right)\cos\left(\text{arc tang}\frac{v}{\rho+2}\right)\cdots\cos\left(\text{arc tang}\frac{v}{\rho+n}\right)}\cos nw,$$

il suffira, comme on sait, pour prouver la vérité de notre assertion, de montrer que, s_n désignant la somme des n premiers termes de la série, la différence

$$(18)\quad s_{n+m} - s_n = \sum_{i=1}^{m} f(n+i)\frac{\cos A_{n+i}}{\cos\left(\text{arc tang}\frac{v}{\rho+1}\right)\cos\left(\text{arc tang}\frac{v}{\rho+2}\right)\cdots\cos\left(\text{arc tang}\frac{v}{\rho+n+i}\right)}\cos(n+i)w,$$

devient pour chaque valeur de n au delà d'une certaine limite, et quelque grand que soit le nombre entier m, numériquement inférieure à toute limite donnée.

En vertu de la formule

$$(19)\qquad 2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\ [*],$$

l'égalité (18), en y prenant $\alpha = (n+i)w$, $\beta = \frac{w}{2}$, se réduit à

$$(20)\left\{\begin{aligned}
&2(s_{n+m} - s_n)\sin\frac{w}{2}\\
&= \sum_{i=1}^{i=m} f(n+i)\,\frac{\cos A_{n+i}}{\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+1}\right)\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+2}\right)\cdots\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+n+i}\right)}\\
&\times\left[\sin\left(n+i+\frac{1}{2}\right)w - \sin\left(n+i-\frac{1}{2}\right)w\right],
\end{aligned}\right.$$

$$(20')\left\{\begin{aligned}
&= f(n+m)\,\frac{\cos A_{n+m}}{\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+1}\right)\cdots\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+n+m}\right)}\sin\left(n+m+\frac{1}{2}\right)w\\
&- f(n+1)\,\frac{\cos A_{n+1}}{\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+1}\right)\cdots\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+n+1}\right)}\sin\left(n+1-\frac{1}{2}\right)w\\
&+\left\{\begin{aligned}
&f(n+1)\,\frac{\cos A_{n+1}}{\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+1}\right)\cdots\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+n+1}\right)}\\
&-f(n+2)\,\frac{\cos A_{n+2}}{\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+1}\right)\cdots\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+n+2}\right)}
\end{aligned}\right\}\sin\left(n+1+\frac{1}{2}\right)w\\
&+\left\{\begin{aligned}
&f(n+2)\,\frac{\cos A_{n+2}}{\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+1}\right)\cdots\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+n+2}\right)}\\
&-f(n+3)\,\frac{\cos A_{n+}}{\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+1}\right)\cdots\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+n+3}\right)}
\end{aligned}\right\}\sin\left(n+2+\frac{1}{2}\right)w\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+\left\{\begin{aligned}
&f(n+m-1)\,\frac{\cos A_{n+m-1}}{\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+1}\right)\cdots\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+n+m-1}\right)}\\
&-f(n+m)\,\frac{\cos A_{n+m}}{\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+1}\right)\cdots\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+n-m}\right)}
\end{aligned}\right\}\sin\left(n+m-\frac{1}{2}\right)w.
\end{aligned}\right.$$

[*] On voit que nous prenons pour point de départ la même formule elementaire que M. Malmsten dans son Mémoire ci-dessus mentionné.

Cela posé, il est clair que, n croissant indéfiniment, les quantités contenues dans les deux premières lignes de cette expression, s'approcheront indéfiniment de zéro avec $f(n)$ même [selon la formule (9')], à cause que le facteur

$$(21)\qquad \frac{1}{\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+1}\right)\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+2}\right)\cdots\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+n}\right)},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\sqrt{\left[1-\left(\frac{v}{\rho+1}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{v}{\rho+2}\right)^2\right]\cdots\left[1+\left(\frac{v}{\rho+n}\right)^2\right]},$$

bien que n croisse à l'infini, conserve toujours une valeur finie, vu que ce facteur, en vertu de la formule $1+x<e^x$ (x positif) est évidemment inférieur à

$$(22)\qquad \sqrt{e^{v^2\left[\frac{1}{(\rho+1)^2}+\frac{1}{(\rho+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(\rho+n)^2}\right]}}.$$

Pour abréger, nous désignerons par l le nombre fini qui est la *limite* dont s'approche indéfiniment l'expression (21), lorsque n croît indéfiniment [*].

De plus, quant à l'autre partie de l'expression (20'), savoir la

---

[*] Quoique cela ne soit point *nécessaire* ici, il est bien loin d'être étranger au sujet dont il s'agit, de remarquer en passant, que cette limite, dans le cas particulier $\rho=0$, est précisément le nombre

$$(z)\qquad \sqrt{\frac{e^{v\pi}-e^{-v\pi}}{2v\pi}}.$$

En effet, puisqu'on a, pour chaque valeur de x, réelle ou imaginaire,

$$\frac{\sin x}{x}=\lim\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right),$$

en faisant croître n indéfiniment, et en posant $\frac{x}{\pi}=v\sqrt{-1}$, on obtient de suite

$$\frac{\sin v\pi\sqrt{-1}}{v\pi\sqrt{-1}},\ \text{c'est-à-dire}\ \frac{e^{v\pi}-e^{-v\pi}}{2v\pi}=\lim\left(1+\frac{v^2}{1^2}\right)\left(1+\frac{v^2}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{v^2}{n^2}\right).$$

somme

$$(23)\quad \mathop{\mathrm{S}}_{i=1}^{i=m-1}\left\{\begin{array}{l} f(n+i)\,\dfrac{\cos A_{n+i}}{\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\dfrac{v}{\rho+1}\right)\cdots\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\dfrac{v}{\rho+n+i}\right)} \\ -f(n+i+1)\,\dfrac{\cos A_{n+i}}{\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\dfrac{v}{\rho+1}\right)\cdots\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\dfrac{v}{\rho+n+i+1}\right)} \end{array}\right\}\sin\left(n+i+\frac{1}{2}\right)\omega.$$

elle se réduit, en vertu de la relation (16), à

$$(23')\quad \mathop{\mathrm{S}}_{i=1}^{i=m-1}\left\{\begin{array}{l} [f(n+i)-f(n+i+1)]\cos A_{n+i} \\ +\dfrac{v}{\rho+n+i+1}f(n+i+1)\sin A_{n+i} \end{array}\right\}\frac{\sin\left(n+i+\frac{1}{2}\right)\omega}{\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\dfrac{v}{\rho+1}\right)\cdots\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\dfrac{v}{\rho+n+i}\right)}.$$

Cette somme, évidemment, n'est pas plus grande que celle qu'on obtient après avoir remplacé l'expression sous le signe S par sa valeur numérique, et, par suite, elle est numériquement non supérieure à

$$(24)\quad \mathop{\mathrm{S}}_{i=1}^{i=m-1}\text{valeur numérique}\left\{\begin{array}{l} [f(n+i)-f(n+i+1)]\cos A_{n+i} \\ +\dfrac{v}{\rho+n+i+1}f(n+i+1)\sin A_{n+i} \end{array}\right\}$$
$$\times\sqrt{\left[1+\left(\frac{v}{\rho+1}\right)^2\right]\cdots\left[1+\left(\frac{v}{\rho+n+i}\right)^2\right]},$$

par conséquent, numériquement inférieure au produit

$$l\cdot\mathop{\mathrm{S}}_{i=1}^{i=m-1}\text{valeur numérique}\left\{\begin{array}{l} [f(n+i)-f(n+i+1)]\cos A_{n+i} \\ +\dfrac{v}{\rho+n+i+1}f(n+i+1)\sin A_{n+i} \end{array}\right\}.$$

et, à plus forte raison, au produit

$$(25)\qquad l\cdot\mathop{\mathrm{S}}_{i=1}^{i=m-1}\left[f(n+i)-f(n+i+1)+\mathrm{V}\cdot\frac{f(n+i+1)}{\rho+n+i+1}\right][*],$$

---

[*] En effet, il est clair que la différence $f(n+i)-f(n+i+1)$ étant positive aussi bien que $\dfrac{1}{\rho+n+i+1}f(n+i+1)$, la valeur numérique de l'expression

$$[f(n+i)-f(n+i+1)]\cos A_{n+i}+\frac{v}{\rho+n+i+1}f(n+i+1)\sin A_{n+i}$$

V désignant la valeur numérique de v; en d'autres termes, elle est numériquement inférieure au produit de l par

$$(26)\qquad f(n+1) - f(n+m) + \mathrm{V}\cdot\left[\frac{f(n+2)}{n+2} + \frac{f(n+3)}{n+3} + \ldots + \frac{f(n+m)}{n+m}\right],$$

et enfin, en vertu du caractère (9'), numériquement inférieure au produit de l par

$$(27)\qquad f(n+1) - f(n+m) + \mathrm{VN}\cdot\left[\frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+3)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+m)^2}\right].$$

Ce produit, tout comme la fonction même $f(n)$, est évidemment pour chaque valeur de n au delà d'une certaine limite, quelque grand que soit le nombre entier m, inférieur à tout nombre donné, vu que la série du terme général $\frac{1}{n^2}$ est convergente; on peut, dès lors, à plus forte raison, en dire autant de la valeur numérique de la somme (23), donc aussi de celle de toute la somme (20') ou du produit $2(s_{n+m} - s_n)\sin\frac{w}{2}$, et partant aussi, au moins si l'on excepte les valeurs de w de la forme $\pm 2k\pi$, de la valeur numérique de la différence même $s_{n-m} - s_n$. C. Q. F. D.

2°. *Quant à la série dont le terme général est*

$$(14'')\qquad f(n)\cdot\frac{\cos \mathrm{A}_n}{\cos\left(\text{arc tang}\,\frac{v}{\rho+1}\right)\cdots\cos\left(\text{arc tang}\,\frac{v}{\rho+n}\right)}\sin nw,$$

on peut prouver la vérité de notre assertion par un raisonnement semblable au précédent, pourvu que l'on y prenne pour point de départ, au lieu de la formule élémentaire (19), cette autre

$$(19')\qquad 2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta).$$

Mais exposer ici de nouveau ce raisonnement, serait se jeter mal à propos dans des détails tout à fait superflus, car évidemment toute

ne peut surpasser le nombre que l'on obtient en y remplaçant $\cos \mathrm{A}_{n+r}$ par ± 1, et, en même temps, $\sin \mathrm{A}_{n+r}$ par ± 1, selon que v est positif ou négatif.

la différence entre le cas actuel et le précédent consiste en ce que certains facteurs figurant dans les formules ci-dessus, savoir,

$$\cos(n+i)w, \quad \sin\left(n+i+\frac{1}{2}\right)w, \quad \sin\left(n+i-\frac{1}{2}\right)w,$$

doivent être à présent remplacés par ces autres

$$\sin(n+i)w, \quad -\cos\left(n+i+\frac{1}{2}\right)w, \quad -\cos\left(n+i-\frac{1}{2}\right)w.$$

3°. Pour prouver la vérité de notre assertion *concernant la série dont le terme général est*

$$(15') \qquad f(n)\cdot\frac{\sin A_n}{\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+1}\right)\cdots\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+n}\right)}\cos nw,$$

on peut procéder parfaitement de la même manière que dans le 1°, pourvu que l'on y remplace chaque expression de la forme $\cos A_{n-i}$ par $\sin A_{n-i}$, jusqu'à la ligne marquée par la formule (23) inclusivement; après quoi il faut se servir de la formule (17) au lieu de la formule (16), en vertu de laquelle on obtient, au lieu de la formule (23'),

$$\mathop{\mathrm{S}}_{i=1}^{i=m-1}\left\{\begin{array}{l}[f(n+i)-f(n+i+1)]\sin A_{n-i}\\ -\dfrac{v}{\rho+n+i+1}f(n+i+1)\cos A_{n-i}\end{array}\right\}\frac{\sin\left(n+i+\frac{1}{2}\right)w}{\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+1}\right)\cdots\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+n-1}\right)}$$

Comment, après cela, s'accomplira la démonstration, c'est chose évidente par ce qui a été dit, dans le 1°, après la formule (23').

4°. Et de même, on concevra aisément, d'après ce qui a été donné déjà et sans qu'il soit besoin d'ajouter aucune explication, ce qu'il faut faire pour prouver enfin la vérité de l'assertion *concernant la série dont le terme général est*

$$f(n)\cdot\frac{\sin A_n}{\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+1}\right)\cdots\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+n}\right)}\sin nw.$$

Ainsi nous avons établi notre théorème III pour toute valeur

réelle de v, différente de zéro [*]; le cas de $v = 0$ reste à examiner.

B. *Soit donc à présent* $v = 0$. Il est clair d'abord qu'il ne faut de démonstration que pour les séries des termes généraux (14) [**]. De plus, cette démonstration, qui n'est qu'une simple modification de celle indiquée dans la section 1° ci-dessus, va montrer que, dans la supposition dont il s'agit ici, *le théorème est vrai, non-seulement quand* $f(n)$ *satisfait à la condition* (9'), *mais encore toutes les fois que, n croissant indéfiniment,* $\lim f(n)$ *est* $= 0$ [***].

En effet, il est évident d'abord que la démonstration, donnée dans le 1°, jusqu'à la formule (20') inclusivement, subsiste pour toute valeur réelle de v. De plus, comme le nombre désigné par l, dans le cas particulier dont il s'agit ici, se réduit à l'unité, on pourra de la remarque seule, que l'on a $\lim\limits_{(n=\infty)} f(n) = 0$, conclure que, n croissant indéfiniment, les quantités dans les deux premières lignes de cette formule (20') s'approcheront indéfiniment de zéro. Et quant à l'autre partie de cette même formule (20'), savoir, dans le cas présent,

$$(23'') \qquad \mathop{\mathrm{S}}_{i=1}^{i=m-1} [f(n+i) - f(n+i+1)] \sin\left(n+i+\frac{1}{2}\right)\omega,$$

la valeur numérique de cette somme évidemment n'est pas supérieure à

$$(25') \qquad \mathop{\mathrm{S}}_{i=1}^{i=m-1} [f(n+i) - f(n+i+1)],$$

c'est-à-dire à la différence

$$(27') \qquad f(n+1) - f(n+m),$$

[*] Il est bon de remarquer que, d'après la démonstration ci-dessus, la proposition énoncée subsiste encore pour des valeurs numériques *indéfiniment* petites de v.

[**] Voilà le cas particulier de notre théorème dont nous avons dit, au commencement de ce Mémoire, qu'il a fait l'objet de la discussion de M. Malmsten dans les *Nova Acta* de la Société des Sciences d'Upsal.

[***] *Voir* la troisième note dans le texte, immédiatement avant le § Ier ci-dessus.

qui, visiblement, en vertu de la seule propriété $\lim f(n) = 0$, s'évanouit pour $n = \infty$.

Cela suffit, pour le cas de $v = 0$, quant à la série du terme général (14'). De plus, si l'on observe qu'une semblable modification de la démonstration, dans la section 2° ci-dessus indiquée, suffit pour ce qui concerne la série du terme général (14''), on se trouve maintenant autorisé à cette conclusion, que *le théorème dont il s'agit, dans le cas particulier de* $v = 0$, *subsiste dès que* $\lim_{(n=\infty)} f(n)$ *est* $= 0$, ce qui peut aussi s'exprimer ainsi :

COROLLAIRE. *Les termes positifs* (8) *étant tels que, n croissant indéfiniment,* $\lim f(n)$ *soit* $= 0$; *les séries dont les termes généraux sont*

$$(3) \qquad f(n) \cdot \sin nw, \quad f(n) \cdot \cos nw.$$

seront convergentes pour des valeurs réelles quelconques de w, *qui ne soient pas de la forme* $\pm 2k\pi$.

NOTE I.

La vérité de la proposition 2°, dans le théorème II ci-dessus, résulte immédiatement de ce qui vient d'être démontré, vu que poser $w = \pi$, dans les expressions (14) et (15'), suffit pour les réduire aux expressions (11) affectées l'une et l'autre du facteur $-1/^n$.

Ajoutons que la *divergence* des séries de ces mêmes termes généraux (14') et (15') pour des valeurs quelconques positives ou négatives de v lorsque w est de la forme $\pm 2k\pi$ et qu'en même temps on a constamment, pour des valeurs de n au delà d'une certaine limite,

$$nf(n) \geqq \text{à un nombre fini N},$$

est elle-même constatée par la proposition 1° de ce même théorème II.

NOTE II.

Pour plus de simplicité, nous avons posé, dans le théorème précédent,

$$\cos nw \quad \text{et} \quad \sin nw,$$

comme facteurs dans les termes généraux des séries proposées. Cependant il est évident par la nature même de la démonstration, que le théorème subsiste également

pour des facteurs de la forme plus generale

$$\cos(n+k)\omega \quad \text{et} \quad \sin(n+k)\omega,$$

k désignant un nombre entier quelconque ou zéro.

NOTE III.

Il est à propos de remarquer, en finissant, 1° que le theorème I ci-dessus suffit pour établir la *divergence* de la série binomiale [*],

$$1, \quad (\mu + v\sqrt{-1})_1 x, \quad (\mu + v\sqrt{-1})_2 x^2, \quad (\mu + v\sqrt{-1})_3 x, \quad \text{etc.},$$

quand on y suppose $x = -1$ pour des valeurs quelconques positives ou negatives de v, μ étant ou $= 0$ ou negatif et numériquement < 1 ; et 2° qu'on peut obtenir la somme de certaines familles de séries qui font l'objet du theorème III précédent, en appliquant convenablement le théorème binomial à des expressions de la forme $(1+x)^{-\mu+v\sqrt{-1}}$, le module de $x = u(\cos w + \sqrt{-1}\sin w)$ étant $= 1$. A cet égard, nous renvoyons le lecteur aux *Doctrinæ serierum infinitarum exercitationes* ci-dessus mentionnées.

---

* Ou bien des deux parties à la fois, de la partie réelle et des coefficients du $\sqrt{-1}$ de cette série.

Extrait d'une Lettre adressée à M. CHARLES HERMITE, *par* M. EISENSTEIN.

Dans la communication que vous me faites sur les formes ternaires, etc., vous vous êtes extrêmement approché d'une théorie que j'ai imaginée pour la comparaison des formes de déterminants *quelconques différents*, et à laquelle je vous ai déjà fait une légère allusion lors de votre séjour à Berlin. Pour les formes binaires, on arrive par des transformations rationnelles toujours à des formes dont les déterminants sont en raison de *nombres carrés*, mais vous verrez bientôt que la chose est toute différente pour les formes ternaires et pour toutes celles d'un nombre impair d'indéterminées. Soit proposée, par exemple, la forme

$$x^2 + y^2 + z^2;$$

D étant un entier quelconque, elle se change par une substitution S de déterminant D^2, en général, dans une forme de déterminant D^4; mais si l'on ajoute la condition que tous les coefficients de la forme transformée soient divisibles par D, on obtient DF, la forme F ayant le nombre D pour déterminant. Cette forme est alors exprimée ainsi :

$$F = \frac{1}{D}\left[(\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 + (\alpha' x + \beta' y + \gamma' z)^2 + (\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z)^2\right],$$

le système linéaire

$$S = \begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{vmatrix},$$

étant assujetti à la condition que tous les coefficients de F soient des entiers.

La question principale est maintenant celle-ci : Quelles sont ces formes F de déterminant D qui naissent de la forme très-simple

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{D}, & \frac{1}{D}, & \frac{1}{D} \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix},$$

et pour chacune quelles sont les substitutions différentes?

Je trouve qu'en général toutes ces formes F appartiennent à des genres déterminés, et que, réciproquement, toutes les formes de ces genres ont la propriété dont il s'agit; pour le nombre des transformations il y a des théorèmes très-simples. Pour abréger, je suppose $D = pp'p''\ldots$ égal au produit de plusieurs nombres premiers inégaux, deux excepté. On a, dans ce cas, les théorèmes qui suivent. Nommons deux systèmes S et T équivalents à droite si l'on a une relation de la forme $S = T \times E$, et équivalents à gauche si ces systèmes sont liés par une relation de la forme $S = E \times T$, le signe $\times$ dénotant la composition des systèmes, et E étant un système quelconque de déterminant 1. Il faut bien distinguer ces deux notions d'équivalence pour les systèmes linéaires, c'est-à-dire pour les substitutions ou transformations; au reste, il existe quelque chose d'analogue pour les formes simultanées de degrés supérieurs. Cela posé, j'espère que vous donnerez votre approbation aux théorèmes suivants :

I. Toute forme

$$F = \begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b \end{pmatrix}$$

de déterminant $D = pp'p''\ldots$ et à coefficients entiers qui se tire de la forme

$$G = \begin{pmatrix} \frac{1}{D}, & \frac{1}{D}, & \frac{1}{D} \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$$

par une transformation de déterminant D^2, a la propriété que l'un des trois nombres $b^2 - a'a''$, $b'^2 - aa'$, $b''^2 - aa'$ est résidu quadratique de D; plus généralement ΦRD[*], Φ étant la forme adjointe de F, savoir,

$$\Phi = \left\{ \begin{matrix} b^2 - a'a'', & b'^2 - aa'', & b''^2 - aa' \\ ab - bb'', & a'b' - bb'', & a''b'' - bb' \end{matrix} \right\},$$

c'est-à-dire que cette forme réunit les caractères ΦRp, $\Phi Rp'$, $\Phi Rp''$

* D'après la notation de M. Gauss, pour exprimer que la forme Φ est résidu quadratique du nombre D. Ch. H.

et que tout nombre représentable par Φ et premier à p est résidu quadratique de p, que tout nombre représentable par Φ et premier à p' est résidu quadratique de p', etc. Remarquez que Φ est une forme négative, et ainsi

$$-\Phi = \begin{pmatrix} a'a'' - b^2, \ldots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{pmatrix}$$

une forme positive.

2. Cette condition est nécessaire, mais elle est aussi *suffisante*, et dans le genre auquel conviennent les caractères $\Phi R p$, $\Phi R p'$, $\Phi R p''$, etc. (genre principal si vous voulez), toute forme est renfermée dans G; ainsi *toutes les formes non équivalentes de ce genre se dérivent de la même source.*

3. La forme F étant une quelconque de ce genre, le nombre N total des transformations de G en F est $= 24 . 2^{\mu}$, μ étant le nombre des facteurs premiers p, p', p''...., de D. Il est très-remarquable que ce nombre $24 . 2^{\mu}$ est parfaitement indépendant de la classe individuelle à laquelle la forme F appartient, et toujours la même pour toutes les classes du genre entier. Le nombre des *substitutions non équivalentes à droite* ne monte qu'à $\frac{24 . 2^{\mu}}{\delta}$ [*], δ se rapportant à F, car toutes ces N transformations de G en F se divisent naturellement en un nombre de groupes dont chacun contient δ substitutions équivalentes à droite, et qui se dérivent les unes des autres par la composition avec les transformations de F en elle-même dont le nombre est δ. Pour arriver à ces résultats, je m'occupe d'abord du problème d'assigner toutes les classes de substitutions (ou, si vous voulez, toutes les substitutions réduites) de déterminant D^2 par lesquelles la forme adjointe Φ d'une forme définie positive de déterminant D, se change en une forme divisible par D^2 (le quotient de la division sera une forme quelconque de déterminant 1 et ainsi équivalente à

[*] La quantité δ désigne, dans les travaux de M. Eisenstein, le nombre des transformations par lesquelles une forme quadratique ternaire se change en elle-même.

$x^2 + y^2 + z^2$). Je trouve le nombre de ces classes de substitutions par lesquelles Φ devient divisible par D^2, sans la moindre difficulté égal à 2^ν, supposé que la condition ΦRD soit remplie, autrement le problème n'a point de solution. Or vous verrez que le nombre des substitutions non équivalentes à gauche de G en F est le même que celui de ces classes de substitutions, c'est-à-dire égal à 2^ν (pour voir cela, pensez à la transposition des systèmes); enfin, on déduit de là le nombre total $24 . 2^\nu$ des transformations de G en F, 24 étant le nombre des transformations de G en elle-même qu'il faut composer avec les 2^ν substitutions déjà trouvées. Dans ces recherches, il faut toujours bien distinguer l'ordre de la composition des substitutions.

4. F, F′, F″,... étant le système complet des formes non équivalentes de déterminant D et du genre dont il s'agit, et δ, δ', δ'',... étant les nombres de transformations en elles-mêmes, bien connus pour ces différentes formes respectivement, on obtient d'après le n° 3 pour le nombre des substitutions non équivalentes à droite, de G en F, de G en F′, etc., respectivement $\frac{24 . 2^\nu}{\delta}$, $\frac{24 . 2^\nu}{\delta'}$, $\frac{24 . 2^\nu}{\delta''}$,..., ces substitutions étant réparties en raison de la densité [*].

Il suit de là que le nombre total de toutes les substitutions non équivalentes à droite, par lesquelles G se change dans une *quelconque* des formes F, F′, F″,..., monte à

$$\frac{24 . 2^\nu}{\delta} + \frac{24 . 2^\nu}{\delta'} + \frac{24 . 2^\nu}{\delta''} + \ldots = 24 . 2^\nu \sum \frac{1}{\delta}.$$

C'est donc aussi le nombre total des substitutions non équivalentes à droite par lesquelles la forme

$$x^2 + y^2 + z^2$$

se change en une forme divisible par D.

5. On peut, d'un autre côté, trouver ces substitutions par un procédé bien différent, en cherchant directement toutes les classes de

* Cette notion nouvelle et importante d'arithmétique transcendante se trouve exposée dans le Mémoire intitulé : *Neue theoreme der höherer arithmetik*. Gr. H.

substitutions

$$\begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{vmatrix}$$

(toutes les substitutions réduites de déterminant D^2, qui satisfont à la congruence

$$(\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 + (\alpha' x + \beta' y + \gamma' z)^2 + (\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z)^2 \equiv 0 \quad \text{mod. } D^2,$$

qu'il faut résoudre indépendamment de x, y, z; je trouve le nombre des substitutions essentiellement différentes, c'est-à-dire des systèmes α, β, γ, ..., non équivalents à droite (ou réduits) égal à

$$(p+1)(p'+1)(p''+1)\ldots.$$

6. Des n^{os} **5** et **4** comparés, on tire ce résultat remarquable,

$$24.2^{\nu}\sum\frac{1}{\delta} = (p+1)(p'+1)(p''+1)\ldots,$$

donc

$$\sum\frac{1}{\delta} = \frac{1}{24.2^{\nu}}(p+1)(p'+1)(p''+1)\ldots.$$

Voilà la démonstration d'un de mes théorèmes sur la quantité $\sum\frac{1}{\delta}$ [*], du moins pour le genre dont les caractères sont $\Phi R p$, $\Phi R p'$, $\Phi R p''$, etc.

7. Je fais une application de ce dernier résultat à la théorie des formes quaternaires, en démontrant que le nombre des représentations de D par la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2$$

est égal à

$$8.24.2^{\nu}\sum\frac{1}{\delta} = 8(p+1)(p'+1)(p''+1)\ldots.$$

comme le trouve aussi M. Jacobi par la théorie des fonctions elliptiques.

---

[*] *Voir* le Mémoire cité plus haut, Journal de M. Crelle, tome XXXV. CH. H.

NOTE

Sur la théorie des formules différentielles;

par J. LIOUVILLE.

Dans des leçons au Collège de France, dont j'ai déjà eu occasion de parler (tome XV de ce Journal, page 130), j'ai considéré la formule

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

par laquelle s'exprime en particulier le carré ds^2 de la distance de deux points d'une surface infiniment voisins, sous un point de vue plus général que celui qu'offrirait naturellement la géométrie, où les racines de l'équation

$$ds^2 = 0$$

ne peuvent jamais être réelles. J'ai traité en elle-même, et dans toute sa généralité, cette formule différentielle, et j'ai essayé de l'étudier comme dans la théorie des nombres on étudie, par des moyens très-différents, il est vrai, la formule quadratique

$$ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

J'ai dit aussi quelques mots de la formule différentielle à trois variables dont dépend l'expression du carré de la distance de deux points infiniment voisins pris à volonté dans l'espace. Mais le petit nombre de leçons que j'avais à faire m'a permis à peine d'exposer alors les premiers rudiments du peu même que j'ai réussi à trouver dans cette vaste théorie de la discussion des formules différentielles entières et homogènes que j'avais prise pour texte. Aussi ai-je dessein d'y revenir un jour dans des leçons nouvelles, en y ajoutant la théorie des formules différentielles fractionnaires, qui n'offre pas moins d'utilité.

Quand il n'y a que deux variables, la formule proposée se décompose en facteurs linéaires, et l'expression à discuter peut être écrite ainsi :

$$(ldu + mdv)^{\mu}\,(ndu + pdv)^{\nu}\ldots,$$

l, m, etc., étant des fonctions de u, v, et μ, ν, etc., des exposants constants, positifs ou négatifs. Les deux formules

$$(ldu + mdv)(ndu + pdv), \quad ldu + mdv : ndu + pdv.$$

dont la première est celle de la théorie des surfaces, y sont comprises et offrent surtout de l'intérêt. Mais quel que soit le nombre des facteurs, et quels que soient les exposants μ, ν, ..., toujours la théorie reste facile et se ramène à la discussion approfondie des simples formules linéaires. Mes recherches à ce sujet sont terminées depuis longtemps et pourraient être publiées dès à présent dans leur ensemble. La matière assurément n'est pas épuisée : je veux dire seulement que j'ai rempli le cadre limité dont j'avais fait l'objet de mon travail.

Les formules à trois ou à plus de trois variables offrent bien plus de difficultés, et je suis loin d'avoir obtenu là tout le succès que j'aurais désiré. Mais j'ai du moins, je crois, réussi, par exemple, quant à ce qui concerne la formule

$$E_1 du_1^2 + E_2 du_2^2 + E_3 du_3^2 + 2F_1 du_2 du_3 + 2F_2 du_1 du_3 + 2F_3 du_1 du_2,$$

lorsque cette formule représente le carré ds^2 de la distance de deux points infiniment voisins quelconques, c'est-à-dire est réductible à la forme

$$dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Je me contenterai, dans cette Note, de dire un mot d'un des problèmes que j'ai résolus. Étant donnée l'équation

$$\varphi(u_1, u_2, u_3) = 0$$

d'une surface, on demande de trouver, à l'aide de la seule valeur de ds^2, et sans connaître la relation des coordonnées curvilignes u_1, u_2, u_3 avec les coordonnées rectangles ordinaires x, y, z, 1° la direction de la normale et celles des lignes de courbure en chaque point ; 2° la grandeur du rayon de courbure d'une section normale quelconque.

L'analyse qui résout cette question, donnant en particulier pour le produit des rayons de courbure principaux une valeur qui doit revenir à celle qu'on obtiendrait directement par une formule connue de M. Gauss, en chassant de l'expression de ds^2 une des quantités u_1, u_2, u_3 au moyen de l'équation

$$\varphi(u_1, u_2, u_3) = 0$$

de la surface, on a, en égalant les deux résultats, une équation de condition que E_1, E_2, etc., doivent vérifier, quelle que soit la fonction φ, si ds représente en effet la distance de deux points. Mais ne nous livrons pas à des digressions qui nous entraîneraient beaucoup trop loin.

La place me manque même pour écrire les formules générales qui résolvent le problème énoncé plus haut. Bornons-nous donc au cas où la surface proposée a pour équation

$$u = \text{constante}$$

Voici la formule qui donnera alors le rayon de courbure R d'une section normale quelconque :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2\sqrt{D\Delta}}\left[L\left(\frac{du_1}{ds}\right)^2 + 2M\frac{du_1}{ds}\frac{du_2}{ds} + N\left(\frac{du_2}{ds}\right)^2\right],$$

où l'on a tout

$$L = (E_1F_2 - F_1F_1)\frac{dE_1}{du_1} + (E_1F_1 - F_2F_1)\left(2\frac{dF_1}{du_1} - \frac{dE_1}{du_1}\right)$$
$$- (E_1E_1 - F_1^2)\left(\frac{dE_1}{du_1} - 2\frac{dF_1}{du_1}\right),$$

$$M = (E_1F_2 - F_2F_1)\frac{dE_2}{du_1} + (E_2F_1 - F_1F_1)\frac{dE_1}{du_2}$$
$$- (E_1E_2 - F_1F_2)\left(\frac{dF_1}{du_1} + \frac{dF_1}{du_1} - \frac{dF_1}{du_1}\right),$$

$$N = (E_1F_2 - F_1F_1)\frac{dE_2}{du_2} + (E_2F_1 - F_1F_2)\left(2\frac{dF_2}{du_2} - \frac{dE_2}{du_1}\right)$$
$$- (E_1E_2 - F_1^2)\left(\frac{dE_2}{du_1} - 2\frac{dF_2}{du_1}\right),$$

et

$$\Delta = E_1E_2 - F_1^2, \quad D = E_1E_2E_3 + 2F_1F_2F_3 - E_1F_3^2 - E_2F_1^2 - E_3F_2^2.$$

Dans le cas particulier de $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0$, c'est-à-dire des coordonnées curvilignes rectangulaires, il vient simplement

$$L = E_1E_2\frac{dE_1}{du_1}, \quad M = 0, \quad N = E_1E_2\frac{dE_2}{du_2}, \quad \Delta = E_1E_2, \quad D = E_1E_2E_3$$

Ce cas était déjà connu par un beau travail de M. Lamé. La simplification même qui s'y opère montre assez qu'il y avait quelque chose à faire et une autre méthode à chercher, pour aborder le cas général.

Le problème de trouver la direction de la normale principale et la grandeur du rayon de courbure d'une courbe dont on a les deux équations en u_1, u_2, u_3, est plus facile que le précédent. D'autres problèmes, que j'aurais bien désiré pouvoir mentionner ici, sont plus difficiles; j'en parlerai dans un autre article.

FIN DU DIX-SEPTIÈME VOLUME.

QA
1
J684
t.17
Physical &
Applied Sci.
Serials
Math

Journal de mathématiques
pures et appliquées

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY